

REOLOGICZNE EFEKTY PRĘTÓW METALOWYCH RÓWNOCZEŚNIE ZGINANYCH
I ROZCIĄGANYCH¹⁾

ADAM KISIEL, STEFAN PIECHNIK (KRAKÓW)

Wstęp

W pracy sformułowano i rozwiązano problem mimośrodowego rozciągania pręta pryzmatycznego w warunkach pełzania ustalonego. Materiał pręta opisuje uproszczone równanie Odqvista [4] (dla ustalonego pełzania)

$$(0.1) \quad s_{ij} = \sigma_0 \dot{\epsilon}_e^{\frac{1-n}{n}} \dot{\epsilon}_{ij},$$

gdzie

s_{ij} — składowe dewiatora naprężeń
 $\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}$ (dla $\nu = 0,5$) — składowe tensora prędkości odkształceń
 $\dot{\epsilon}_e$ — intensywność tensora prędkości odkształceń
 σ_0, n — stałe materiałowe.

Sposób rozwiązania problemu (podejście kinematyczne) pozwolił na pełną analizę pól odkształceń, naprężeń i przemieszczeń (z dokładnością do stałych występujących w ruchu bryły sztywnej), dla pręta pryzmatycznego, prostego, o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego, obciążonego siłą rozciągającą na dowolnym mimośrodku (nie uwzględniono nie sprawiającego w rozwiązaniu analitycznym żadnych trudności przypadku, gdy punkt przyłożenia siły pokrywa się ze środkiem ciężkości przekroju poprzecznego).

Analizy takiej z uwagi na trudności numeryczne brakuje w dotychczasowej literaturze. Rozwiązanie problemu równoczesnego rozciągania i zginania podał S. PIECHNIK w pracach [5] i [6], ograniczając się jednak do prętów o przekrojach posiadających jedną oś symetrii i obciążonych w taki sposób, że deformacja pręta zachowuje własność symetrii względem płaszczyzny wyznaczonej przez oś pręta i oś symetrii przekroju poprzecznego. Przypadek prostego zginania prętów o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego rozwiązał A. JAKUBOWICZ [2]. Podał on tylko rozkład naprężeń (nie przeprowadził analizy stanu deformacji), przy czym metoda graficzna, jaką posłużył się do wyznaczenia charakterystyk geometrycznych przekroju nie pozwala na uzyskanie dokładnych wyników numerycznych. W pracach, których celem było wyznaczenie czasu powstania pierwszych pęknięć, bądź też całkowitego zniszczenia pręta, najczęściej wprowadzano założenia upraszczające odnośnie rozkładu naprężeń. I tak np. I. N. RABOTONW w [8] przyjął poło-

¹ Praca wykonana w ramach problemu węzłowego 05.12, temat 13.1.

zenie osi obojętnej jak przy pełnym uplastycznieniu, niezależnie od wartości wykładnika w prawie (0.1). Wyniki uzyskane przez S. PIECHNIKA w [5] i [6] wykorzystał do wyznaczenia czasu powstania pierwszych pęknięć M. CHRZANOWSKI w [1], natomiast do wyznaczenia czasu całkowitego zniszczenia S. PIECHNIK i M. CHRZANOWSKI w [6], wykazując, że jest on nieznacznie większy od czasu powstania pierwszych pęknięć. Dlatego w niniejszej pracy ograniczono się do obliczania czasu powstania pierwszych pęknięć, przyjmując prawo zniszczenia kruchego za Ł. M. KACZANOWEM [3]:

$$(0.2) \quad \frac{d\psi}{dt} = -A \cdot \left(\frac{\max \sigma_x}{\psi} \right)^m,$$

z warunkiem początkowym $\psi(t=0) = 1$, gdzie:

- ψ — funkcja charakteryzująca rozluźnienie materiału ($\psi = 0$ dla czasu zniszczenia),
- $\max \sigma_x$ — maksymalne naprężenie rozciągające,
- A, m — stałe materiałowe.

1. Sformułowanie problemu

Pręt pryzmatyczny, prosty, o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego, wykonany z materiału podlegającego prawu fizycznemu (0.1), którego pierwotne położenie w przestrzeni identyfikujemy z konfiguracją początkową, poddany jest mimośrodowemu rozciąganiu.

Celem pracy jest znalezienie:

- 1 — stanu prędkości odkształcenia,
- 2 — stanu naprężenia,
- 3 — stanu przemieszczenia,
- 4 — czasu powstania pierwszych pęknięć.

W analizie przyjęto założenia:

- (a) — wielkości kinematyczne (prędkość zmiany krzywizny, prędkość odkształcenia osi pręta) są stałe w czasie,
- (b) — w czasie pracy pręta, aż do momentu powstania pierwszych pęknięć, przemieszczenia i ich pochodne względem zmiennych określających położenie punktów pręta są wystarczająco małe, aby słuszne były: zasada zeszywnienia, pominięcie wpływu przemieszczeń w płaszczyźnie przekroju poprzecznego na jego kształt i wielkość, oraz liniowe związki geometryczne Cauchyego,
- (c) — kinematyczne warunki brzegowe odbierają ruch pręta jako ciała sztywnego (sześć niezależnych równań więzów),
- (d) — pobocznica pręta wolna jest od obciążeń,
- (e) — zniszczenie materiału opisuje prawo kruchego pęknięcia (0.2).

2. Rozwiązanie problemu

2.1. Matematyczna postać zagadnienia. Konfigurację pierwotną prostego pręta pryzmatycznego identyfikujemy z obszarem w trójwymiarowej przestrzeni Euklidesowej sparametryzowanej kartezjańskim układem współrzędnych (x, y, z) , przy czym przyjmujemy

zaniedbać jako małe względem y_n . Wykorzystując założenie (a) można przyjąć $B(t) = B_0 \cdot t$. Z zależności (2.1) otrzymuje się wówczas

$$(2.2) \quad \Delta w_a = \Delta w = B_0 \cdot y \cdot \Delta z \cdot t,$$

co można zapisać także w postaci

$$\Delta w = \Delta \dot{w} \cdot t.$$

Z liniowych związków geometrycznych Cauchy'ego otrzymujemy

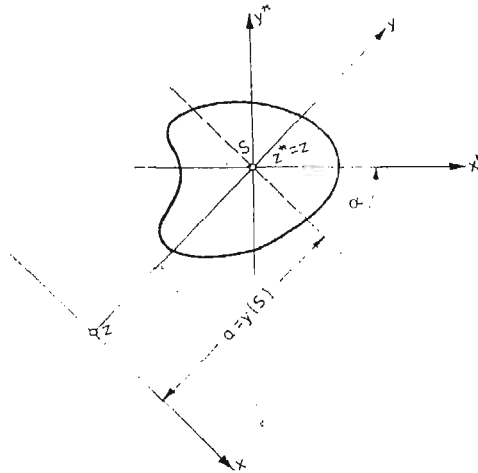
$$(2.3) \quad \varepsilon_z = \dot{\varepsilon}_z(x, y, z) \cdot t = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta \dot{w}(x, y, z) \cdot t}{\Delta z} = B_0 \cdot y \cdot t = \dot{\varepsilon}_z(y) \cdot t,$$

skąd

$$(2.4) \quad \dot{\varepsilon}_z(y) = B_0 \cdot y.$$

Nie ograniczając ogólności rozwiązania przyjęto $B_0 > 0$.

Aby zagadnienie postawione w p. 1 rozwiązać dla dowolnego kształtu przekroju poprzecznego, układ współrzędnych (x, y, z) należy związać z pewnym charakterystycznym układem współrzędnych dla każdego przekroju. Niech będzie nim układ głównych centralnych osi przekroju poprzecznego (osie x^* , y^*) i osi pręta (oś z) (rys. 2).



Rys. 2.

Związki transformacyjne przedstawiają się więc w sposób:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} x^* &= x \cdot \cos \alpha + (y - a) \cdot \sin \alpha, \\ y^* &= -x \cdot \sin \alpha + (y - a) \cdot \cos \alpha, \end{aligned}$$

lub

$$(2.6) \quad \begin{aligned} x &= x^* \cdot \cos \alpha - y^* \cdot \sin \alpha, \\ y &= x^* \cdot \sin \alpha + y^* \cdot \cos \alpha + a, \end{aligned}$$

gdzie

α — kąt mierzony przeciwnie do ruchu wskazówek zegara od osi x do osi x^* ,

a — miara odległości środka ciężkości przekroju poprzecznego S od osi x , równa współrzędnej $y(S)$. Wielkość a jest zależna od czasu, jednak na podstawie rozumowania prowadzącego do zależności (2.2) można przyjąć $a(t) = \text{const}$.

2.2. Stan naprężenia i odkształcenia. Wykorzystując założenia (a) i (d) oraz związki fizyczne (0.1), w prosty sposób można określić tensory prędkości odkształceń i naprężeń, które spełniają komplet równań geometrycznie liniowej teorii pełzania:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \dot{\epsilon}_y = -0,5 \cdot B_0 \cdot y, & \dot{\epsilon}_z &= B_0 \cdot y, \\ \dot{\epsilon}_{xy} &= \dot{\epsilon}_{xz} = \dot{\epsilon}_{yz} = 0, \end{aligned}$$

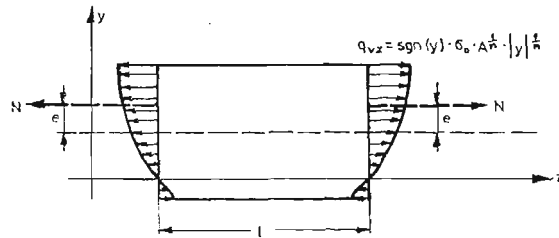
$$(2.8) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_y = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0, \\ \sigma_z &= \text{sgn}(y) \cdot \sigma_0 \cdot B_0^{1/n} \cdot |y|^{1/n}. \end{aligned}$$

Z zależności (2.6) i (2.7) wynika, że w punktach leżących na osi x prędkość odkształcenia $\dot{\epsilon}_z$ oraz naprężenia σ_z są równe zero, stąd oś tę będziemy dalej nazywać osią obojętną.

Styczne warunki brzegowe spełnione są w sposób ścisły jedynie dla rozkładu obciążeń q_{vz} przyłożonych do ścianek poprzecznych pręta (rys. 3):

$$q_{vz} = \text{sgn}(y) \cdot \sigma_0 \cdot B_0^{1/n} \cdot |y|^{1/n}.$$

W innych przypadkach wykorzystujemy zasadę de Saint-Venanta.



Rys. 3.

2.3. Stan przemieszczenia. Określone powyżej odkształcenia pozwalają z równań Cauchy'ego wyznaczyć następujące funkcje przemieszczeń:

$$(2.9) \quad u(x, y, z, t) = -0,5 \cdot B_0 \cdot x \cdot y \cdot t + a_0 + b_0 \cdot y + c_0 \cdot z,$$

$$(2.10) \quad v(x, y, z, t) = -0,25 \cdot B_0 (-x^2 + y^2 + 2 \cdot z^2) \cdot t + d_0 - b_0 \cdot x + f_0 \cdot z,$$

$$(2.11) \quad w(x, y, z, t) = B_0 \cdot y \cdot z \cdot t + e_0 - c_0 \cdot x - f_0 \cdot y,$$

gdzie stałą B_0 należy wyznaczyć ze statycznych warunków brzegowych na ściankach poprzecznych pręta, natomiast stałe $a_0, b_0, c_0, d_0, e_0, f_0$ — z kinematycznych warunków brzegowych dla czasu $t = 0$. Przy pominięciu założenia (c), wielkości a_0 — f_0 należy traktować jako liniowe funkcje czasu t , a dodatkowych sześć stałych wyznaczyć z warunków początkowych nałożonych na prędkości.

Stała B_0 posiada interpretację prędkości głównej krzywizny powierzchni obojętnej $\dot{\kappa}_0$, co pokazano niżej (rys. 4). Przyjęto następujące oznaczenia:

$$\Delta z_0 = \varrho_0(t) \cdot \Delta \varphi(t) \quad \text{— długość włókna równoległego do osi } z \text{ przed deformacją, które w czasie } t \text{ nie doznaje odkształceń,}$$

$\Delta z(y, t) = [\varrho_0(t) + y] \cdot \Delta\varphi(t)$ — długość włókna równoległego do osi z , odległego o y od powierzchni obojętnej (utworzonej z osi obojętnych każdego przekroju poprzecznego), zmienna w czasie deformacji,

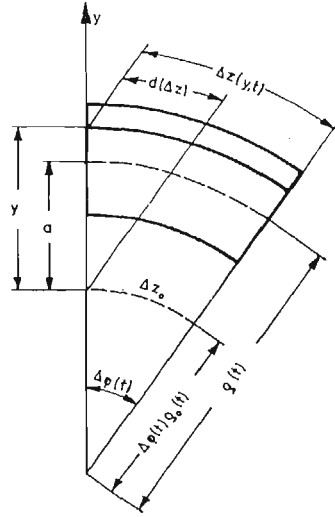
$\varrho_0(t)$ — promień głównej krzywizny powierzchni obojętnej,

$\varrho(t)$ — promień głównej krzywizny osi pręta,

a — odległość osi pręta od osi obojętnej,

$\Delta\varphi(t)$ — kąt między sąsiednimi przekrojami,

$\varkappa_0(t), \dot{\varkappa}_0$ — główna krzywizna powierzchni obojętnej i jej prędkość.



Rys. 4

Z rys. 4 odczytujemy:

$$\varepsilon_z(y, t) = \dot{\varepsilon}_z(y) \cdot t = \lim_{\Delta z_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta z(y, t) - \Delta z_0}{\Delta z_0} = \lim_{\Delta\varphi(t) \rightarrow 0} \frac{[\varrho_0(t) + y - \varrho_0(t)] \cdot \Delta\varphi(t)}{\varrho_0(t) \cdot \Delta\varphi(t)} = \frac{y}{\varrho_0(t)},$$

skąd, oraz z (2.3)

$$\frac{1}{\varrho_0(t)} = B_0 \cdot t.$$

Ponieważ

$$\frac{1}{\varrho_0(t)} = \varkappa_0(t),$$

więc

$$B_0 \cdot t = \varkappa_0(t), \quad B_0 = \dot{\varkappa}_0(t) = \text{const.}$$

2.4. Zredukowany układ sił wewnętrznych w układzie (x^*, y^*, z) W celu praktycznego zastosowania otrzymanych wyników należy skorzystać z zasady de Saint-Venanta. Ponieważ zredukowany układ sił wewnętrznych na ogół podawany jest w układzie głównych centralnych osi przekroju poprzecznego, dlatego w tym właśnie układzie zredukowano obciążenie przyłożone do ścianek poprzecznych pręta.

Z równań równoważności wynika:

$$(2.12) \quad N_z = \iint_F \sigma_z(x^*, y^*) dF,$$

$$(2.13) \quad M_{x^*} = \iint_F \sigma_z(x^*, y^*) \cdot y^* dF,$$

$$(2.14) \quad M_{y^*} = - \iint_F \sigma_z(x^*, y^*) \cdot x^* dF.$$

Z budowy macierzy naprężeń (2.8) widać od razu, że

$$Q_{x^*} = Q_{y^*} = M_z = 0.$$

Aby uzyskać wygodne wielkości do tablicowania, wprowadzono układ współrzędnych bezwymiarowych (x', y', z') , zdefiniowany związkami

$$\begin{aligned} x^* &= x' \cdot r, \\ y^* &= y' \cdot r, \\ z &= z'. \end{aligned}$$

Jakobian tego przekształcenia $J(x', y') = r$, gdzie r jest dowolną stałą o wymiarze długości. W niniejszej pracy przyjęto, że r jest promieniem koła o środku w punkcie S , zawierającego cały przekrój poprzeczny.

Dla wygody obliczeń, całkowanie przeprowadzono w układzie współrzędnych (x, y, z) określonym związkami (2.6). Przekształcono więc związki (2.12) - (2.14), podstawiając naprężenie σ_z wyrażone w układzie (x, y, z) i przedstawione zależnością (2.8):

$$(2.15) \quad N_z = \sigma_0 \cdot B_0^{1/n} \cdot r^{(1+2 \cdot n)/n} \cdot \iint_{F'} \operatorname{sgn}(y') \cdot |y'|^{1/n} dF',$$

$$(2.16) \quad M_{x^*} = \sigma_0 \cdot B_0^{1/n} \cdot r^{(1+3 \cdot n)/n} \cdot \iint_{F'} \operatorname{sgn}(y') \cdot |y'|^{1/n} \cdot [-x' \cdot \sin \alpha + (y' - a') \cdot \cos \alpha] dF',$$

$$(2.17) \quad M_{y^*} = \sigma_0 \cdot B_0^{1/n} \cdot r^{(1+3 \cdot n)/n} \cdot \iint_{F'} \operatorname{sgn}(y') \cdot |y'|^{1/n} \cdot [-x' \cdot \cos \alpha - (y' - a') \cdot \sin \alpha] dF'.$$

Dalej przyjęto oznaczenia:

$$(2.18) \quad B_N = \sigma_0 \cdot B_0^{1/n} \cdot r^{(1+2 \cdot n)/n},$$

$$(2.19) \quad B_M = \sigma_0 \cdot B_0^{1/n} \cdot r^{(1+3 \cdot n)/n} = B_N \cdot r,$$

$$(2.20) \quad N' = \iint_{F'} \operatorname{sgn}(y') \cdot |y'|^{1/n} dF',$$

$$(2.21) \quad M'_{x^*} = \iint_{F'} \operatorname{sgn}(y') \cdot |y'|^{1/n} \cdot [-x' \cdot \sin \alpha + (y' - a') \cdot \cos \alpha] dF',$$

$$(2.22) \quad M'_{y^*} = \iint_{F'} \operatorname{sgn}(y') \cdot |y'|^{1/n} \cdot [-x' \cdot \cos \alpha - (y' - a') \cdot \sin \alpha] dF'.$$

Wielkości N' , M'_{x^*} , M'_{y^*} zależą tylko od kształtu przekroju poprzecznego F' i jednej stałej materiałowej n . Związki (2.15) - (2.17) można więc zapisać w postaci:

$$(2.23) \quad N = B_N \cdot N',$$

$$(2.24) \quad M_{x^*} = B_M \cdot M'_{x^*},$$

$$(2.25) \quad M_{y^*} = B_M \cdot M'_{y^*}.$$

Z zależności (2.24) i (2.25) można wyznaczyć wielkość B_M jako funkcję momentu $M = |\bar{M}| = (M_{x^*}^2 + M_{y^*}^2)^{1/2}$.

Z (2.19) oraz warunku $B_0 > 0$ wynika $B_M > 0$, więc

$$(2.26) \quad B_M = M / (M_{x^*}^2 + M_{y^*}^2)^{1/2}.$$

Korzystając z ostatniej zależności oraz z (2.19) można wyznaczyć stałą B_0 jako funkcję momentu M :

$$(2.27) \quad B_0 = \sigma_0^{-n} \cdot r^{-1-3 \cdot n} \cdot (M_{x^*}^2 + M_{y^*}^2)^{-n/2} \cdot M^n.$$

Podstawiając (2.26) do (2.23) - (2.25) otrzymujemy:

$$(2.28) \quad N \cdot r / M = N' / (M_{x^*}^2 + M_{y^*}^2)^{1/2},$$

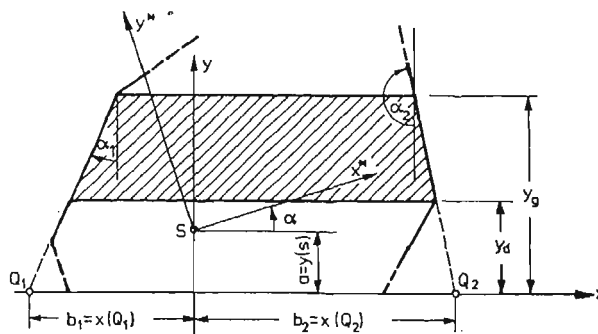
$$(2.29) \quad M_{x^*} / M = \cos \varphi(x^*, \bar{M}) = M'_{x^*} / (M_{x^*}^2 + M_{y^*}^2)^{1/2},$$

$$(2.30) \quad M_{y^*} / M = \sin \varphi(x^*, \bar{M}) = M'_{y^*} / (M_{x^*}^2 + M_{y^*}^2)^{1/2}.$$

Z postaci związków (2.28) - (2.30) wynika, że dla ustalonego kierunku wektora momentu \bar{M} i ustalonego stosunku N/M (niezależnie od wielkości N i M), kąt zawarty między osią obojętną x i osią x^* oraz miara odległości a osi obojętnej od środka ciężkości S (od tych wielkości zależą wartości N' , M'_{x^*} i M'_{y^*}) pozostają stałe. Jest to własność ogólna dla dowolnego związku fizycznego typu $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\epsilon_{ij})$ przy założeniu, że można go przedstawić jedną funkcją ciągłą w obszarze przekroju poprzecznego (por. [2]).

Fakt ten jest cenną wskazówką dla przejrzystego tablicowania funkcji (2.28) - (2.30), bądź innych wielkości, które opisano niżej. Ponieważ nie jest możliwe przedstawienie zamkniętych wzorów na całki (2.20) - (2.22) dla dowolnego kształtu obszaru F' , w pracy wprowadzono odpowiednie wzory i ułożono program na maszynę cyfrową dla obszaru opisanego dowolnym wielokątem. Posłużono się przy tym następującym algorytmem:

- W celu uniknięcia niejednoznaczności w przypadku przekrojów wklęsłych bądź wielospójnych, należy je podzielić na skończoną ilość wielokątów wypukłych.
- Całkę po całym obszarze oblicza się jako sumę całek po wielokątach wypukłych.
- Całkowanie po wielokącie wypukłym oparto na spostrzeżeniu, że każdy taki wielokąt można w sposób jednoznaczny podzielić na skończoną ilość trapezów o pod-



Rys. 5.

stawach równoległych do dowolnie danego kierunku. Zakładając, że tym kierunkiem jest oś obojętna x (rys. 5), wzory na całki (2.20) - (2.22) dla pojedynczego trapezu można przedstawić w sposób:

$$\begin{aligned} N'^{\square} &= (a_2 - a_{21}) \cdot g_2 + (b_2 - b_1) \cdot g_1, \\ M'_{x^*}{}^{\square} &= (M'_x{}^{\square} - N'^{\square} \cdot a) \cdot \cos \alpha + M'_y{}^{\square} \cdot \sin \alpha, \\ M'_{y^*}{}^{\square} &= -(M'_x{}^{\square} - N'^{\square} \cdot a) \cdot \sin \alpha + M'_y{}^{\square} \cdot \cos \alpha, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} M'_x{}^{\square} &= (a_2 - a_1) \cdot g_3 + (b_2 - b_1) \cdot g_2, \\ M'_y{}^{\square} &= 0,5 \cdot (a_1^2 - a_2^2) \cdot g_3 + (a_1 \cdot b_1 - a_2 \cdot b_2) \cdot g_2 + 0,5 \cdot (b_1^2 - b_2^2) \cdot g_1, \\ \left. \begin{aligned} a_1 &= \operatorname{tg} \alpha_1, & a_2 &= \operatorname{tg} \alpha_2, \\ b_1, b_2 & \text{— jak na rys. 5} \end{aligned} \right\} \text{ dla } y_g \neq y_d, \\ a_1 &= a_2 = b_1 = b_2 = 0, & \text{ dla } y_g = y_d, \\ g_1 &= n/(n+1) \cdot (|y_g|^{(n+1)/n} - |y_d|^{(n+1)/n}), \\ g_2 &= n/(2 \cdot n+1) \cdot e \cdot (|y_g|^{(2 \cdot n+1)/n} - f \cdot |y_d|^{(2 \cdot n+1)/n}), \\ g_3 &= n/(3 \cdot n+1) \cdot (|y_g|^{(3 \cdot n+1)/n} - |y_d|^{(3 \cdot n+1)/n}), \\ e &= \operatorname{sgn}(y_g), & f &= e \cdot \operatorname{sgn}(y_d), \end{aligned}$$

2.5. Czas powstania pierwszych pęknięć. Rozwiązując równanie różniczkowe (0.2) i wykorzystując warunek $\psi(t = t_k) = 0$, czas powstania pierwszych pęknięć można określić wzorem

$$(2.31) \quad t_k = 1/[A \cdot (m+1) \cdot (\sigma_{z \max})^m],$$

gdzie A , m są stałymi materiałowymi.

3. Zebranie wyników i podsumowanie

Podstawiając we wszystkich zależnościach wielkość określoną zależnością (2.27), otrzymano:

a) Stan odkształcenia

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_y = -0,5 \cdot y' \cdot (M'_{x^*}{}^2 + M'_{y^*}{}^2)^{-n/2} \cdot [M/(\sigma_0 \cdot r^3)]^n \cdot t, \\ \varepsilon_z &= y' \cdot (M'_{x^*}{}^2 + M'_{y^*}{}^2)^{-n/2} \cdot [M/(\sigma_0 \cdot r^3)]^n \cdot t, \\ \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0. \end{aligned}$$

Wprowadzając oznaczenie

$$(3.2) \quad \varepsilon'(y') = y' / (M'_{x^*}{}^2 + M'_{y^*}{}^2)^{n/2},$$

można krótko zapisać:

— maksymalną prędkość odkształcenia

$$(3.3) \quad \max \cdot \dot{\varepsilon}_z = \dot{\varepsilon}_z(y' = y'_{\max}) = \varepsilon'(y' = y'_{\max}) \cdot [M/(\sigma_0 \cdot r^3)]^n$$

— prędkość odkształcenia osi pręta

$$(3.4) \quad \dot{\varepsilon}_0 = \dot{\varepsilon}_z(y' = a') = \varepsilon'(y' = a') \cdot [M/(\sigma_0 \cdot r^3)]^n.$$

Wielkości $\varepsilon'(y' = y'_{\max})$ i $\varepsilon'(y' = a')$ są bezwymiarowe i zależą tylko od kształtu przekroju poprzecznego i jednej stałej materiałowej n — są więc wielkościami wygodnymi do tablicowania.

b) Stan naprężenia

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_y = 0, \\ \sigma_z &= M \cdot r^{-3} \cdot (M'_{x*2} + M'_{y*2})^{-1/2} \cdot \operatorname{sgn}(y') \cdot |y'|^{1/n}, \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0, \end{aligned}$$

Oznaczając bezwymiarową wielkość naprężenia w sposób

$$(3.6) \quad \sigma(y') = (M'_{x*2} + M'_{y*2})^{-1/2} \cdot \operatorname{sgn}(y') \cdot |y'|^{1/n}$$

maksymalną wartość naprężenia rozciągającego można wyznaczyć z zależności

$$(3.7) \quad \max \cdot \sigma_z = \sigma'(y' = y'_{\max}) \cdot M/r^3.$$

c) Stan przemieszczenia (w układzie współrzędnych (x', y', z)):

$$(3.8) \quad \begin{aligned} u(x', y', z, t) &= -0,5 \cdot \sigma_0^{-n} \cdot r^{-1-3 \cdot n} \cdot (M'_{x*2} + M'_{y*2})^{-n/2} \cdot M^n \cdot y' \cdot x' \cdot t + a_0 + b_0 \cdot y' + c_0 \cdot z, \\ v(x', y', z, t) &= -0,25 \cdot \sigma_0^{-n} \cdot r^{-1-3 \cdot n} \cdot (M'_{x*2} + M'_{y*2})^{-n/2} \cdot M^n \cdot (y'^2 - x'^2 + 2 \cdot z^2) \cdot t + \\ &\quad + d_0 - b_0 \cdot x' + e_0 \cdot z; \\ w(x', y', z, t) &= \sigma_0^{-n} \cdot r^{-1-3 \cdot n} \cdot (M'_{x*2} + M'_{y*2})^{-n/2} \cdot M^n \cdot y' \cdot z \cdot t + f_0 - c_0 \cdot x' - g_0 \cdot y'. \end{aligned}$$

Ponieważ stała B_0 posiada interpretację prędkości krzywizny powierzchni obojętnej, więc wprowadzono bezwymiarową wielkość

$$(3.9) \quad \kappa'_0 = (M'_{x*2} + M'_{y*2})^{-n/2},$$

skąd:

$$(3.10) \quad B_0 = \kappa'_0 \cdot \sigma_0^{-n} \cdot r^{-1-3 \cdot n} \cdot M^n.$$

d) Czas powstania pierwszych pęknięć

$$(3.11) \quad t_k = 1/[A \cdot (m+1) \cdot (\sigma'(y' = y'_{\max}))^m] \cdot (r^3/M)^m.$$

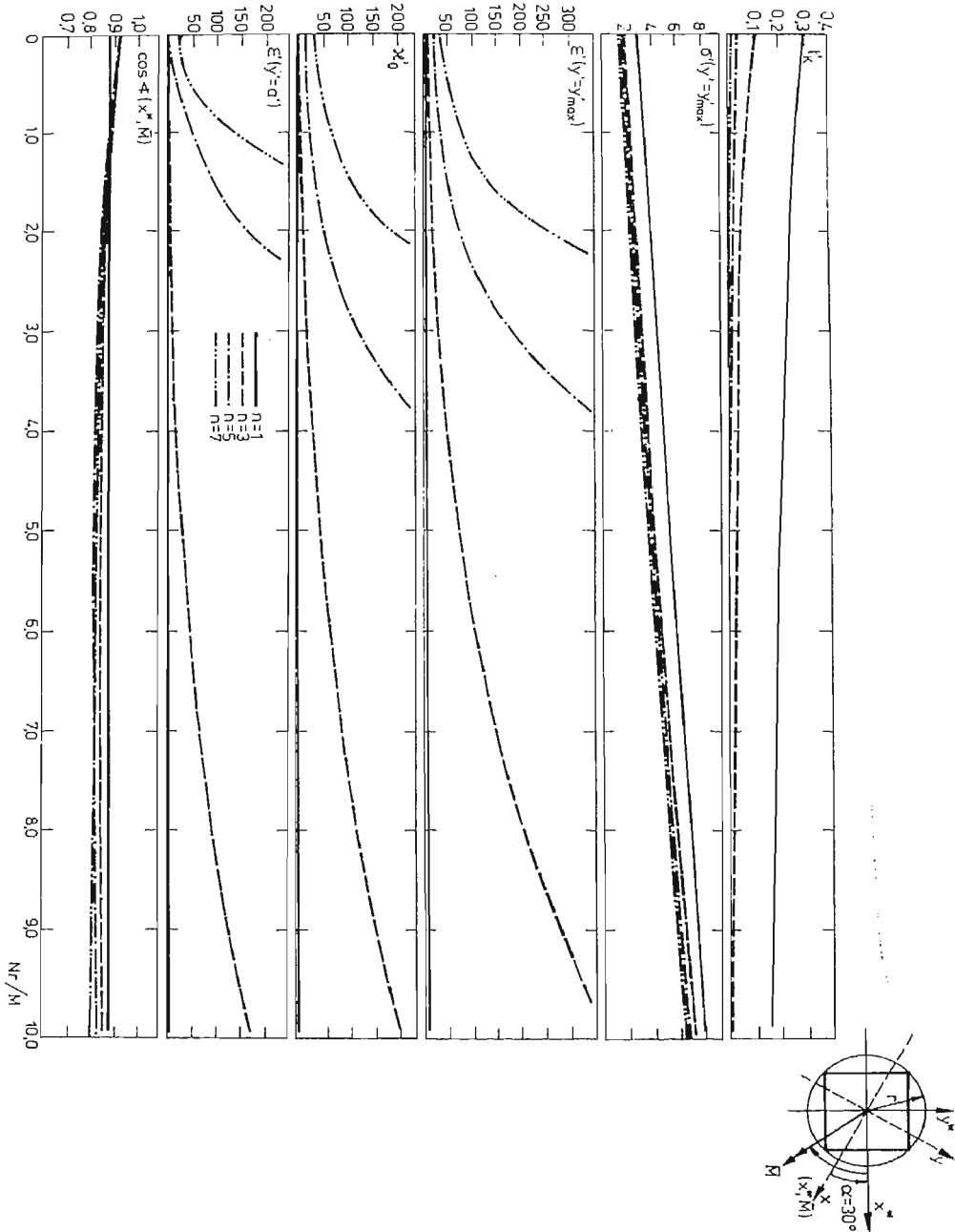
Analogicznie oznaczono bezwymiarowy czas zniszczenia

$$(3.12) \quad t'_k = 1/[(m+1) \cdot (\sigma'(y' = y'_{\max}))^m].$$

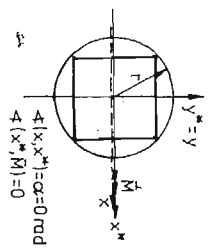
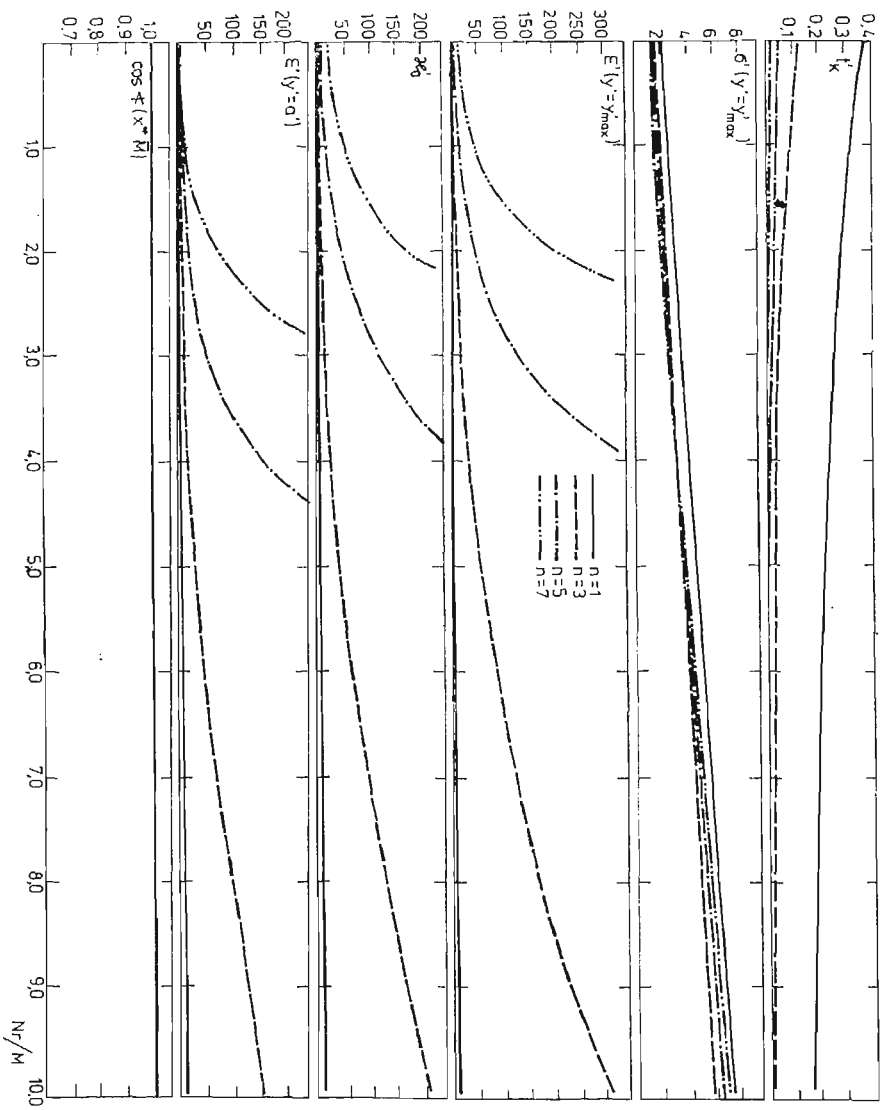
Z postaci związku (2.27) wynika, że wszystkie wielkości określone w tym punkcie zależą od całek (2.20) - (2.22), które w istotny sposób są zależne od sił działających na pręt. Stąd rzeczą korzystną jest ich tablicowanie. Ponieważ jednak ze wzorów przedstawiających rozwiązanie zagadnienia można wybrać pewne bezwymiarowe wielkości zależne od tych właśnie całek, więc program na maszynę cyfrową tak ułożono, aby bezpośrednio te wielkości tabelaryzować.

Przykładowe wyniki przedstawiono w postaci wykresów na rysunkach 6 i 7. Można się nimi w prosty sposób posłużyć przy wstępnym wymiarowaniu mimośrodowo rozciąganych elementów prętowych konstrukcji pracujących w warunkach pełzania ustalonego, bądź (interpretując wielkości kinematyczne jako statyczne) w warunkach fizykalnie nieliniowej teorii sprężystości. Dla celów dokładnego projektowania należy posłużyć się programem. Program i sposób jego wykorzystania oraz numeryczny przykład przedstawiono w sprawozdaniu realizacji problemu węzłowego 05.12, temat 13.1.

Rozwiązane w niniejszej pracy zagadnienie mimośrodowego rozciągania pozwala na łatwe wykorzystanie otrzymanych tu wyników w analizie wybożenia w warunkach pełzania ustalonego, umożliwiając jego rozwiązanie bez powszechnie wprowadzanych przez autorów ograniczeń, dotyczących dowolności kształtu przekroju poprzecznego pręta i jego obciążenia.



Rys. 6.



Rys. 7.

Literatura cytowana w tekście

1. M. CHRZANOWSKI; *Zniszczenie kruche prętów mimośrodowo rozciąganych przy uwzględnieniu pełzania ustalonego*, Rozpr. Inż. T. 16, z. 4, 1969.
2. A. JAKUBOWICZ, *Techniczna teoria zginania prętów dla pewnego przypadku materiału fizycznie nieliniowego*, Rozpr. Inż. T. 10, z. 3, 1963.
3. Ł. M. KACZANOW; *Teorija polzuczesti*, Fitmatgiz, Moskwa 1960.
4. F. K. G. ODQVIST; *On theories of creep rupture*, Publ. nr 136 Institutionen för hallfasthetslära, Kungl. Tekniska Högskolan, Stockholm, 1961.
5. S. PIECHNIK; *Combined tension-bending creep for a solid bar*, Trans. of the Royal Inst. of Technology, nr 194, Stockholm 1962.
6. S. PIECHNIK; *Pełzanie prętów przyzmatycznych przy łącznym obciążeniu*, Zeszyty Naukowe Politechniki Krakowskiej, nr 1, Bud. Łąd., Kraków 1963.
7. S. PIECHNIK, M. CHRZANOWSKI; *Time of total creep rupture of a beam under combined tension and bending*, Inst. J. Solids and Structures, vol. 6, 1970.
8. I. N. RABOTNOW; *Polzuczest' elementow konstrukcji*, Moskwa 1966.

Резюме

РЕОЛОГИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ В ИЗГИБАЕМЫХ И РАЗТЯГИВАЕМЫХ
МЕТАЛЛИЧЕСКИХ БАЛКАХ

Принимая степенный закон ползучести (закон Одквиста для установившейся ползучести), а также линейные уравнения Коши и Навье (для ускорений равных нулю) решено задачу одновременного растяжения и изгиба призматических стержней о произвольной форме поперечного сечения. Предполагая, что некоторые параметры деформации выполняют систему уравнений, показано способ приложения сил исполняющего точно статические краевые условия, а также получено все компоненты тензоров напряжений, скоростей деформаций, перемещения, и время до появления трещин (за Качановым).

Особению точному анализу подвергнуто состояние деформации стержня. Приведен алгоритм вычисления неопределённых параметров.

Summary

REOLOGICAL EFFECTS IN METAL BEAMS UNDER BENDING AND TENSION

The problem of simultaneous tension and bending of prismatic bar of arbitrary cross-section shape has been solved in the case of the steady state creep law in the power form (Odquist's law) and linear Cauchy and Navier relations.

Assuming that certain parameters of deformation satisfy the system of equations. The method of the application of loads satisfying exactly the boundary conditions was shown, and the components of the stress tensor, rate of strains and displacements have been obtained as well as the time of crack initiation (according to Kachanov). The state of the bar deformation was subjected to detailed analysis. The numerical algorithm of unknown parameters of deformation has been given.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 19 marca 1979 roku.