

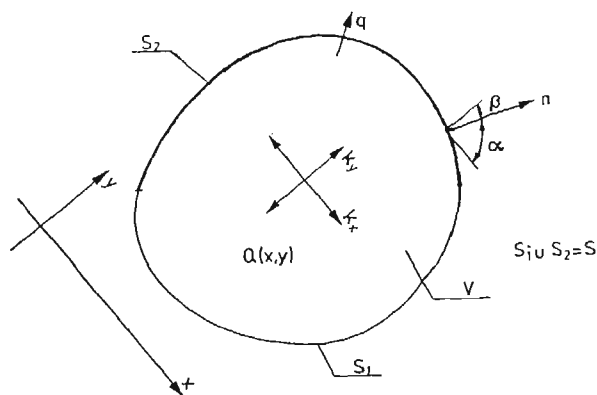
O PEWNEJ INTERPRETACJI METOD ENERGETYCZNYCH DLA PROBLEMÓW FILTRACJI  
USTALONEJ

BOGDAN WOSIEWICZ (POZNAŃ)

1. Sformułowanie problemu i zależności podstawowe

W pracy wykażemy, że poszukiwanie rozwiązania problemów filtracji ustalonej metodami energetycznymi przez minimalizację funkcjonału energii jest równoważne z minimalizacją metodą najmniejszych kwadratów ważonych błędów wyznaczenia składowych wektora prędkości filtrującej cieczy.

Założymy, że filtracja odbywa się w trójwymiarowym anizotropowym obszarze filtracji  $V$  a osie układu współrzędnych pokrywają się z głównymi osiami anizotropii ośrodka (rys. 1). Przy takich założeniach problem filtracji sprowadza się do wyznaczenia funkcji



Rys. 1. Oznaczenia (płaski obszar filtracji dla uproszczenia rysunku).

$h(x, y, z)$ , opisującej rozkład ciśnienia piezometrycznego, spełniającej w obszarze filtracji równanie różniczkowe

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) + Q = 0, \quad (x, y, z) \in V,$$

a na brzegu  $S$  mieszane i niejednorodne warunki brzegowe

$$(2) \quad h(x, y, z) = g, \quad (x, y, z) \in S_1,$$

oraz

$$(3) \quad u \cos \alpha + v \cos \beta + w \cos \gamma = q, \quad (x, y, z) \in S_2,$$

W zależnościach powyższych przez  $k_x, k_y, k_z$  oznaczono współczynniki filtracji odpowiednio wzdłuż osi  $x, y, z$ , przez  $u, v, w$  składowe wektora prędkości wzdłuż tych osi, przez  $Q, g, q$  odpowiednio wydatek źródeł wewnętrznych, zadane na brzegu  $S_1$  ciśnienie piezometryczne oraz wydatek przez brzeg  $S_2$  a przez  $\alpha, \beta, \gamma$  kąty jakie tworzy normalna do brzegu  $S$  z osiami współrzędnych.

Związek pomiędzy składowymi wektora prędkości a ciśnieniem piezometrycznym dany jest za pomocą prawa Darcy'ego

$$(4) \quad \begin{aligned} u &= -k_x \frac{\partial h}{\partial x}, \\ v &= -k_y \frac{\partial h}{\partial y}, \\ w &= -k_z \frac{\partial h}{\partial z}. \end{aligned}$$

Alternatywnie zagadnienie sprowadza się do znalezienia takiej funkcji  $h(x, y, z)$ , która minimalizuje funkcjonal energii

$$(5) \quad \pi(h) = \int_V \int \int \left[ k_x \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + k_y \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 + k_z \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 - 2Qh \right] dV + 2 \int_{S_2} \int q h ds$$

i spełnia zasadniczy dla tego problemu warunek brzegowy (2).

W metodach energetycznych stosowanych do zagadnień filtracji ustalonej poszukuje się przybliżonego rozkładu ciśnienia piezometrycznego  $\tilde{h}$  w postaci

$$(6) \quad \tilde{h}(x, y, z) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y, z) H_i$$

gdzie liczby  $H_i (i = 1, 2, \dots, n)$  są szukanymi współczynnikami (w metodzie elementów skończonych są to wprost wartości ciśnień piezometrycznych w wyróżnionych punktach obszaru filtracji) a znane funkcje  $N_i(x, y, z)$  stanowią zbiór funkcji bazowych (układ współrzędnych) w rozpatrywanej przestrzeni funkcyjnej. Po wyznaczeniu współczynników  $H_i$  przez minimalizację funkcjonału (5) możemy także wyznaczyć przybliżone wartości składowych wektora prędkości  $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$  na podstawie prawa Darcy'ego.

## 2. Funkcjonał błędu wyznaczenia składowych wektora prędkości i jego minimalizacja

Jako miarę błędu przybliżonego rozwiązania problemu filtracji uznać można następujące wyrażenie

$$(7) \quad e = \frac{1}{k_x} (u - \tilde{u})^2 + \frac{1}{k_y} (v - \tilde{v})^2 + \frac{1}{k_z} (w - \tilde{w})^2.$$

Zależność (7) jest ważonym błędem kwadratowym wyznaczenia składowych wektora prędkości. Jako wagi przyjęto odwrotności współczynników filtracji. Wartość błędu  $e$  jest oczywiście funkcją położenia a także zależy od sposobu aproksymacji składowych wektora prędkości.

Jako najlepsze rozwiązanie, w sensie metody najmniejszych kwadratów, można uznać takie, które całce

$$(8) \quad E = \int_V \int_V \int_V edv = \int_V \int_V \int_V \left[ \frac{1}{k_x} (u - \tilde{u})^2 + \frac{1}{k_y} (v - \tilde{v})^2 + \frac{1}{k_z} (w - \tilde{w})^2 \right] dV,$$

nadaje najmniejszą wartość.

Wykażemy teraz, że wyznaczenie liczb  $H_i$  przez minimalizację funkcjonału (8) jest równoważne minimalizacji funkcjonału (5).

Wyrażając  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{w}$  poprzez funkcję  $\tilde{h}(x, y, z)$  za pomocą formuł (4) możemy funkcjonał (8) zapisać w sposób następujący

$$(9) \quad E = \int_V \int_V \int_V \left[ k_x \left( \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} \right)^2 + k_y \left( \frac{\partial \tilde{h}}{\partial y} \right)^2 + k_z \left( \frac{\partial \tilde{h}}{\partial z} \right)^2 + 2 \left( u \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} + v \frac{\partial \tilde{h}}{\partial y} + w \frac{\partial \tilde{h}}{\partial z} \right) \right] dV + \\ + \int_V \int_V \int_V \left( \frac{1}{k_x} u^2 + \frac{1}{k_y} v^2 + \frac{1}{k_z} w^2 \right) dV.$$

Ostatnia całka w powyższej zależności ma dla każdego konkretnego zadania stałą wartość (choć oczywiście inną dla różnych zadań), w żaden bowiem sposób nie zależy ona od wyboru przybliżenia funkcji  $\tilde{h}(x, y, z)$  za pomocą wyrażenia (6). Wartość tej całki oznaczmy przez  $C_1$ .

Do ostatniego składnika w pierwszej całce zastosujemy teraz twierdzenie Gaussa-Ostrogradzkiego w postaci

$$(10) \quad \int_V \int_V \int_V \left( u \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} + v \frac{\partial \tilde{h}}{\partial y} + w \frac{\partial \tilde{h}}{\partial z} \right) dV + \int_V \int_V \int_V \tilde{h} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dV = \\ = \int_S \tilde{h} (u \cos \alpha + v \cos \beta + w \cos \gamma) dS.$$

Wyrażenie w nawiasie drugiej całki objętościowej jest dywergencją wektora prędkości. Jest zatem równe wydatkowi źródeł wewnętrznych  $Q$  w obszarze filtracji. Wyrażenie w nawiasie w całce po powierzchni  $S$  przedstawia natomiast jednostkowy przepływ  $q$  przez brzeg obszaru filtracji. Wartość tego wydatku przez część  $S_2$  brzegu jest określona na podstawie warunku brzegowego (3). Na części  $S_1$  brzegu wartość rzeczywistego wydatku  $q$  nie jest natomiast znana. Pamiętać jednak należy, że rozwiązania zagadnienia brzegowego (1), (2) i (3) a także problemu wariacyjnego (5) i (2) poszukiwać należy wśród funkcji  $\tilde{h}(x, y, z)$  spełniających zasadniczy dla tego problemu warunek brzegowy (2) [1].

Na brzegu  $S_1$  musi być zatem spełniona zależność

$$(11) \quad \tilde{h}(x, y, z) \equiv h(x, y, z) = g(x, y, z) \quad (x, y, z) \in S_1.$$

Tym samym wartość tej całki po brzegu  $S_1$  jest dla konkretnego zadania stałą, niezależną od wyboru funkcji  $\tilde{h}(x, y, z)$ . Oznaczmy jej wartość przez  $C_2$ .

Podstawiając do funkcjonału (9) wyrażenia wynikające z twierdzenia Gaussa-Ostrogradzkiego (10) i wykorzystując wnioski z przeprowadzonych powyżej rozważań uzyskamy

$$(12) \quad E(\tilde{h}) = \int_V \int_V \int_V \left[ k_x \left( \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} \right)^2 + k_y \left( \frac{\partial \tilde{h}}{\partial y} \right)^2 + k_z \left( \frac{\partial \tilde{h}}{\partial z} \right)^2 - 2\tilde{h}Q \right] dV + 2 \int_{S_1} \tilde{h}q dS + C_1 + C_2.$$

Porównując funkcjonały (5) i (12) widać, że różnią się one tylko o stały składnik, jest bowiem:

$$(13) \quad E(\tilde{h}) = \pi(\tilde{h}) + C_1 + C_2.$$

Poszukując przybliżonego rozwiązania problemu filtracji poprzez minimalizację funkcjonału (5) lub funkcjonału (12) uzyskać musimy identyczne wyniki. Tym samym teza, że metody energetyczne dla problemów filtracji ustalonej traktować można jako procedurę minimalizacji metodą najmniejszych kwadratów ważonych błędów wyznaczenia składowych wektora prędkości filtrującej cieczy została wykazana.

W identyczny sposób interpretować można metody energetyczne dla innych problemów fizycznych opisanych równaniem (1) i warunkami brzegowymi (2) i (3). Wystarczy tylko podać fizyczną interpretację funkcjonału (8) i wyrażen w formule (10). Dla procesów fizycznych w których konieczne jest uwzględnienie warunku brzegowego trzeciego rodzaju

$$(14) \quad u \cos \alpha + v \cos \beta + w \cos \gamma + ah = q, \quad (x, y, z) \in S_3,$$

gdzie iloczyn  $ah$  uwzględnia takie zjawiska jak na przykład straty konwekcyjne i radiacyjne, funkcjonał (8) musi zostać rozbudowany o składnik

$$(15) \quad 2 \int \int_{S_3} da(h - \tilde{h})^2 dS.$$

Składnik ten można interpretować jako ważony błąd kwadratowy wyznaczenia funkcji  $h$  na części  $S_3$  brzegu.

### 3. Wyprowadzanie funkcjonału błędu wyznaczenia składowych wektora prędkości

W podobny sposób można, jak się wydaje, zinterpretować metody energetyczne dla innych zagadnień brzegowych. Wystarczy jedynie odgadnąć postać takiego funkcjonału metody najmniejszych kwadratów, którego minimalizacja jest równoznaczna z minimalizacją funkcjonału energii dla danego zagadnienia brzegowego i nadać mu odpowiednią interpretację fizyczną. Tą drogą w pracy [2] zinterpretowano na przykład metodę elementów skończonych w zagadnieniach teorii konstrukcji jako procedurę minimalizacji ważonych błędów wyznaczenia składowych dewiatora i aksjatora naprężeń.

Jednakże w pewnych przypadkach odpowiednią postać funkcjonału błędu można, jak się okazuje wydedukować wprost z postaci równania różniczkowego problemu i jego interpretacji fizycznej. Rozpatrzmy równanie różniczkowe

$$(16) \quad Au = f$$

gdzie  $A$  jest operatorem różniczkowym problemu a  $f$  i  $u$  są daną i szukaną funkcją w pewnej przestrzeni funkcyjnej. W przypadku gdy operator  $A$  jest operatorem dodatnio określonym można wprowadzić operator  $B$  taki, że  $A = B^2$  i dowieść [1] istnienie ograniczonego operatora  $B^{-1}$  do niego odwrotnego. W tym wypadku rozwiązanie równania (16) jest równoznaczne rozwiązaniu równania

$$(17) \quad Bu = B^{-1}f.$$

Ponadto funkcjonały metody energetycznej dla równania (16) i najmniejszych kwadratów dla równania (17) różnią się wtedy tylko o stały składnik [1]. Z tego wynika, że w przypadku dodatnio określonego operatora  $A$  zastosowanie metody energetycznej do problemu opisanego równaniem (16) prowadzi do tego samego wyniku co zastosowanie metody najmniejszych kwadratów do równania (17).

Problemem pozostaje oczywiście konstrukcja równania (17). Nie wydaje się bowiem możliwe podanie efektywnej drogi znalezienia operatora  $B$  w każdym przypadku. Ponadto operator  $B^{-1}$  jest przecież poszukiwanym rozwiązaniem problemu, zachodzi bowiem  $B^{-1}Bu = u$ . Tym samym konstrukcja równania (17) jest w zasadzie równoznaczna znalezieniu poszukiwanego rozwiązania.

Tym niemniej jeżeli uda się rozłożyć operator równania różniczkowe o (16) na iloczyn dwóch identycznych operatorów  $B$  można także zinterpretować prawą stronę równania (17). Tym samym uzyskać można funkcjonał metody najmniejszych kwadratów dla równania (17), funkcjonał o określonej interpretacji fizycznej.

Idąc tą drogą wykażemy, że wprowadzony a priori funkcjonał (8) jest w analizowanym problemie identyczny z funkcjonałem metody najmniejszych kwadratów dla równania (17).

W przypadku problemów filtracji ustalonej operator  $A$  z równania (1) jest dodatnio określony i daje się przedstawić w postaci iloczynu dwóch identycznych operatorów macierzowych względem siebie transponowanych. Istotnie, można sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że

$$(18) \quad A = B^T B$$

gdzie macierzowy operator  $B$  ma postać

$$(19) \quad B = KD = \begin{bmatrix} -\sqrt{k_x} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{k_y} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{k_z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix}.$$

Tym samym zależność (17) dla problemu opisanego równaniem (1) można zapisać następująco

$$(20) \quad KDh = \begin{Bmatrix} -\sqrt{k_x} \frac{\partial h}{\partial x} \\ -\sqrt{k_y} \frac{\partial h}{\partial y} \\ -\sqrt{k_z} \frac{\partial h}{\partial z} \end{Bmatrix} = -B^{-1}Q.$$

Prawa strona powyższej równości nie jest dana w jawnej postaci. Aby jednak równość była spełniona winna być ona równa stronie lewej. Biorąc pod uwagę prawo Darcy'ego (4) widzimy, że lewa strona zależności (20) przedstawia podzielone odpowiednio przez  $\sqrt{k_x}$ ,  $\sqrt{k_y}$ ,  $\sqrt{k_z}$  składowe  $u$ ,  $v$ ,  $w$  wektora prędkości. Można więc napisać, że

$$(21) \quad \begin{pmatrix} -\sqrt{k_x} \frac{\partial h}{\partial x} \\ -\sqrt{k_y} \frac{\partial h}{\partial y} \\ -\sqrt{k_z} \frac{\partial h}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{k_x}} \\ \frac{v}{\sqrt{k_y}} \\ \frac{w}{\sqrt{k_z}} \end{pmatrix}.$$

Podstawiając teraz w miejsce  $h$  wartość przybliżoną  $\tilde{h}$  równanie (21) nie będzie oczywiście spełnione. Jako najlepsze przybliżenie można uważać to, które minimalizuje funkcjonal metody najmniejszych kwadratów dla tego równania

$$(22) \quad E = \int_V \int_V \int_V \left[ \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{k_x}} \\ \frac{v}{\sqrt{k_y}} \\ \frac{w}{\sqrt{k_z}} \end{pmatrix} - \mathbf{KD}\tilde{h} \right]^2 dV.$$

Wykonując działania w funkcjale (22) z wykorzystaniem formuł (4) uzyskamy

$$(23) \quad E = \int_V \int_V \int_V \left[ \left( \frac{u}{\sqrt{k_x}} + \sqrt{k_x} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{v}{\sqrt{k_y}} + \sqrt{k_y} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{w}{\sqrt{k_z}} + \sqrt{k_z} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial z} \right)^2 \right] dV = \\ = \int_V \int_V \int_V \left[ \frac{1}{k_x} (u - \tilde{u})^2 + \frac{1}{k_y} (v - \tilde{v})^2 + \frac{1}{k_z} (w - \tilde{w})^2 \right] dV.$$

Otrzymaliśmy zatem wyjściowy funkcjonal (8). Innymi słowy wprowadzony poprzednio funkcjonal (8) jako całka z ważonych błędów kwadratowych wyznaczenia składowych wektora prędkości jest identyczny z funkcjalem metody najmniejszych kwadratów dla równania (17). Funkcjonał ten istotnie różni się od funkcjonału metody energetycznej dla równania (1) tylko stałą co wykazano poprzednio.

Zastosowane tutaj postępowanie może być, jak się wydaje użyte do interpretacji podobnych zależności dla innych procesów fizycznych.

#### 4. Metoda elementów skończonych

Wśród metod energetycznych stosowanych do rozwiązywania zagadnień filtracji ustalonej największe uznanie zdobyła ostatnio metoda elementów skończonych (MES) [3]. Można ją oczywiście także traktować jako procedurę minimalizacji błędów wyznaczenia składowych wektora prędkości w sensie najmniejszych kwadratów. Ma to o tyle ważne znaczenie praktyczne, że z jednej strony pozwala na interpretację niektórych właściwości rozwiązań uzyskiwanych za jej pomocą a z drugiej strony umożliwia ogólne wnioskowanie o zbieżności metody oraz warunkach i kryteriach tej zbieżności. Dla przykładu:

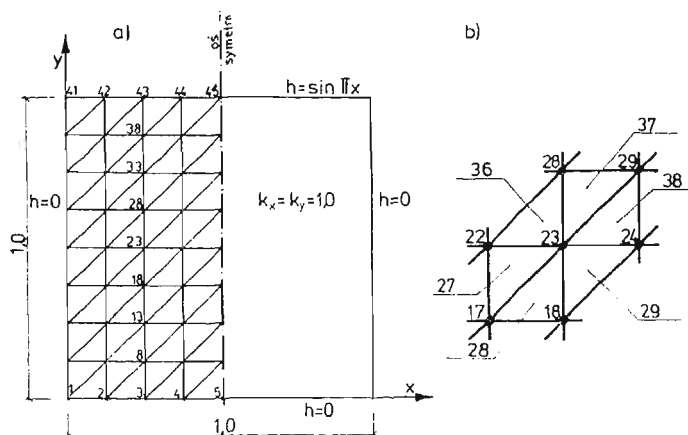
(i) Rozwiązania przybliżone minimalizujące średni błąd kwadratowy mają jak wiadomo [2] tendencję do oscylacji wokół wartości dokładnych a zatem prędkości obliczone metodą elementów skończonych będą także wykazywać taką naturę. Istotnie, taka oscy-

łacja składowych wektora prędkości jest powszechnie obserwowana w MES, szczególnie w pobliżu osobliwości w rozkładzie prędkości. Z tego też powodu jako ostateczne wartości przyjmowane są zwykle wartości uśrednione z różnych elementów.

Dla ilustracji tego faktu w tabeli 1 zestawiono  $u/k_x$  i  $v/k_y$  obliczone w węźle 23 dla obszaru filtracji i podziału na elementy przedstawionego na rys. 2. Obliczenia wykonano za pomocą programu zreferowanego w pracy [4].

Tabela 1

Prędkości obliczone z elementu	$\frac{u}{k_x}$	$\frac{v}{k_y}$
27	-0,527	-0,223
28	-0,338	-0,412
29	-0,352	-0,412
36	-0,527	-0,587
37	-0,532	-0,587
38	-0,352	-0,767
Wartości średnie	-0,438	-0,498
Wartości dokładne	-0,443	-0,483



Rys. 2. Obszar filtracji, warunki brzegowe i podział na elementy dla zadania przykładowego (a) oraz numeracja węzłów i elementów w otoczeniu węzła 23.

(ii) Błąd bezwzględny wielkości uzyskanych przez minimalizację błędu kwadratowego może być tego samego rzędu dla wszelkich wartości (dużych i małych) obliczonych tym sposobem.

Tym samym należy liczyć się z większymi błędami względnymi wyznaczenia składowych wektora prędkości dla obszarów gdzie prędkości te są małe. W tabeli 2 zestawiono przykładowo wartości  $u/k_x$  i  $v/k_y$  obliczone dla węzłów leżących wewnątrz obszaru filtracji z rys. 2 wzdłuż prostej  $x = 0,25$ . Obliczone błędy względne wskazują istotnie największe wartości dla prędkości małych co do modułu. Jest to szczególnie widoczne w tym przypadku dla składowej  $v$ .

Tabela 2

Węzeł	$\frac{u}{k_x}$			$\frac{v}{k_y}$		
	MES	Dokładnie	Błąd względny w %	MES	Dokładnie	Błąd względny w %
8	-0,074	-0,077	3,9	-0,215	-0,207	3,9
13	-0,165	-0,167	1,2	-0,264	-0,255	3,5
18	-0,280	-0,283	1,1	-0,354	-0,342	3,5
23	-0,438	-0,443	1,1	-0,498	-0,483	3,1
28	-0,663	-0,672	1,3	-0,717	-0,699	2,6
33	-0,988	-1,006	1,8	-1,046	-1,024	2,1
38	-1,464	-1,497	2,2	-1,534	-1,509	1,7

(iii) Zbieżność metody elementów skończonych, traktowanej jako procedura minimalizacji błędu kwadratowego wynika z poniższego twierdzenia [5]:

Jeżeli: 1) ciąg elementów  $BN_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) jest zupełny w rozpatrywanej przestrzeni funkcyjnej, do której należą zarówno poszukiwana funkcja  $u$  jak i znana funkcja  $f$  z równania (16) 2) równanie (17) ma rozwiązanie oraz 3) istnieje ograniczony operator odwrotny  $B^{-1}$  wówczas układ równań uzyskiwany metodą najmniejszych kwadratów ma jedno i tylko jedno rozwiązanie, które przy  $n \rightarrow \infty$  zapewnia zbieżność  $u_n$  do  $u$  jak i  $Bu_n$  do  $B^{-1}f$ .

Zupełność elementów  $BN_n$  oznacza tutaj fakt, że funkcje bazowe w MES muszą być tak dobrane aby ze wzrostem  $n$  dowolnie dokładnie przybliżyć rzeczywisty rozkład prędkości. Natomiast zbieżność  $u_n \rightarrow u$  oraz  $Bu_n$  do  $B^{-1}f$  oznacza w przypadku problemów filtracji ustalonej zbieżność zarówno funkcji  $h(x, y, z)$ , opisującej rozkład ciśnienia piezometrycznego, jak i składowych wektora prędkości filtrującej cieczy do wartości dokładnych. Pamiętać jedynie należy, że pojęcie zbieżności odnosi się tutaj do zbieżności według normy w analizowanej przestrzeni funkcyjnej.

#### Literatura cytowana w tekście

1. С. Т. МИХЛИН; *Вариационные методы в математической физике*, Изд. Наука, Москва, 1970.
2. L. R. HERRMANN; *Interpretation of finite element procedure as stress error minimization procedure*, J. Eng. Mech. Div. 98, 1972, 1330 - 1336.
3. O. C. ZIENKIEWICZ; *Metoda elementów skończonych*, ARKADY, Warszawa 1972.
4. B. WOSIEWICZ, S. FRĄCKOWIAK; *Program obliczeń płaskiej filtracji ustalonej na EMC ODRA 1204*, Wiad. Mel. i Łąk., 1/1979, s. 25 - 27.
5. S. G. MICHLIN, C. L. SMOLICKI; *Metody przybliżone rozwiązywania równań różniczkowych i całkowych*, PWN, Warszawa 1972.



## Р е з ю м е

К ИНТЕРПРЕТАЦИИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ  
ЗАДАЧ СТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

В качестве меры ошибки приближённого решения задачи фильтрации в вариационной формулировке (5) и (2) или эквивалентной ей краевой задачи (1), (2) и (3) принято взвешенную квадратичную невязку определения составляющих вектора скорости фильтрующейся жидкости (7).

Доказано, что минимизация такой невязки по всей области фильтрации (8) приводит к минимизации функционала диссипации энергии (5).

Данный подход к энергетическим методам позволяет определить некоторые свойства решений, а также, сходимость самого метода. Он проанализирован для метода конечных элементов.

## S u m m a r y

## AN INTERPRETATION OF VARIATIONAL METHODS FOR STEADY SEEPAGE PROBLEMS

Analysed boundary value problem for steady seepage is described by partial differential equation (1) with boundary conditions (2) and (3) or by energy functional (5) with boundary conditions (2). The weighted squared error of velocity components (7) is assumed as the error measure of an approximate solution to the problem. It is proved that the minimization of the weighted squared error over whole flow domain (8) is equivalent to the corresponding variational formulation (5). Thus, variational methods for steady seepage problems may be interpreted as the least squared error procedure where the measure of error is the weighted function of the errors in the velocity components. The formulation of variational methods as a minimum least squared error procedure is susceptible to interpretation of some properties of the obtained solutions and affords a method of convergence. These aspects have been discussed for the finite elements method.

INSTYTUT BUDOWNICTWA WODNO-MELIORACYJNEGO  
POZNAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 13 listopada 1979 roku.*