

O WYKORZYSTANIU FUNKCJI WŁASNYCH DO OPISU DRGAŃ WYMUSZONYCH PODATNIE  
PODPARTYCH ASYMETRYCZNYCH WAŁÓW

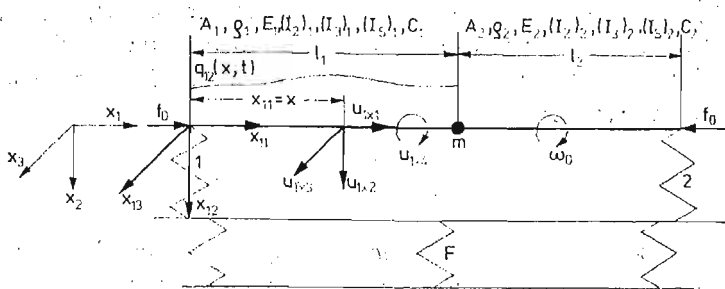
JANUSZ KOLEŃDA (GDAŃSK)

1. Wstęp

Drgania linii wałów z uwzględnieniem asymetrii sztywności giętej i podatności fundamentów rozpatrywano w pracach [1], [2] i [3] przy założeniu, że wymuszenia mogą być traktowane jako siły skupione. Drgania wymuszone podatnie podpartych asymetrycznych wałów przy obciążeniach rozłożonych nie były dotychczas analizowane w literaturze. Zagadnienie to rozpatrzone poniżej, przy czym do rozwiązania wykorzystano funkcje własne drgań. Przyjęto, że funkcje własne drgań podatnie podpartego asymetrycznego wału są znane. Sposób ich wyznaczenia przedstawiono w pracach [4] i [5]. W niniejszej pracy rozpatrzone także przypadek wymuszeń skupionych.

2. Drgania podatnie podpartego asymetrycznego wału przy obciążeniach rozłożonych

Obliczeniowy schemat rozpatrywanego układu przedstawiono na rys. 1. Zachowuje się oznaczenia i założenia, jak w pracy [5]. Przyjmuje się, że na pierwszy odcinek wału działa



Rys. 1.

w płaszczyźnie  $x_{11}$ ,  $x_{12}$  obciążenie rozłożone  $q_{12}(x, t)$  i drgania tego odcinka w ruchomym układzie współrzędnych  $x_{11}$ ,  $x_{12}$ ,  $x_{13}$  opisują się niesprzężonymi równaniami:

$$(2.1) \quad \varrho_1 \ddot{u}_{1x1} - E_1 u_{1x1}^{\text{II}} = 0, \quad (\cdot) = \frac{\partial}{\partial t}, \quad (') = \frac{\partial}{\partial x},$$

$$(2.2) \quad (\varrho A)_1 (\ddot{u}_{1x2} - \omega_0^2 u_{1x2}) + f_0 u_{1x2}^{\text{II}} + (EI_2)_1 u_{1x2}^{\text{IV}} = q_{12},$$

$$(2.3) \quad (\varrho A)_1 (\ddot{u}_{1x3} - \omega_0^2 u_{1x3}) + f_0 u_{1x3}^{\text{II}} + (EI_3)_1 u_{1x3}^{\text{IV}} = 0,$$

$$(2.4) \quad (I_2)_1 \ddot{u}_{1x4} - C_1 u_{1x4}^{\text{II}} = 0.$$

Na skutek podatności konstrukcji podpierającej mogą wystąpić sprzężenia pomiędzy drganiami  $u_{ix1}$ ,  $u_{ix2}$ ,  $u_{ix3}$  oraz  $u_{ix4}$ .

Warunki, jakie spełniają macierze podatności dynamicznej konstrukcji podpierającej w poszczególnych przypadkach sprzężeń, omówiono w pracy [3]. Rozpatrując ogólny przypadek drgań wymuszonych przy sprzężeniach pomiędzy w/w drganiami zakłada się, że znane są częstości nietłumionych drgań swobodnych układu  $\omega_k$  i funkcje  $u_{ix\alpha}^{(k,\mu)}(x)$ , stanowiące składniki funkcji własnych drgań podatnie podpartego asymetrycznego wału [5]

$$(2.5) \quad \bar{u}_{ix\alpha}^{(k)} = \sum_{\mu=-r}^r u_{ix\alpha}^{(k,\mu)}, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4, \quad k = 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2.$$

Jak ukazano w pracy [4], w ogólnym przypadku sprzężeń drgania swobodne podatnie podpartego asymetrycznego wału opisują się zależnościami

$$(2.6) \quad u_{ix\alpha}(x, t) = \sum_{k,\mu} u_{ix\alpha}^{(k,\mu)}(x) \tau^{(k,\mu)}(t),$$

w których funkcje czasu  $\tau^{(k,\mu)}$  są identyczne dla wszystkich sprzężonych drgań  $u_{ix\alpha}$  ( $i = 1, 2, \alpha = 1, 2, 3, 4$ ), gdyż wpływ parametrów układu i sprzężeń na amplitudy drgań uwzględniają funkcje  $u_{ix\alpha}^{(k,\mu)}$  [4], [5].

Funkcje  $\tau^{(k,\mu)}$  są rozwiązaniami równań

$$(2.7) \quad \ddot{\tau}^{(k,\mu)} + (\omega_k + \mu\omega_0)^2 \tau^{(k,\mu)} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \mu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm r.$$

Dzięki istnieniu sprzężeń pomiędzy drganiami stałe rozwiązań równań (2.7) wyznaczono w pracach [4] i [5] z warunków początkowych, określających w chwili  $t = 0$  jedynie stan odkształceń giętnych wału w płaszczyznach  $x_{i1}$ ,  $x_{i2}$ .

Gdy znany jest stan obciążeń wału w płaszczyznach  $x_{i1}$ ,  $x_{i2}$  ( $q_{12}(x, t) \neq 0$ ,  $q_{22}(x, t) = 0$ ), również poszukiwać będziemy drgań wymuszonych wału w postaci (2.6), dokonując rozkładu funkcji  $q_{12}$  w szereg według układu funkcji własnych drgań giętnych pierwszego odcinka w płaszczyźnie  $x_{11}$ ,  $x_{12}$ :

$$(2.8) \quad q_{12}(x, t) = \sum_k \bar{u}_{1x2}^{(k)}(x) q_{12}^{(k)}(t).$$

Mnożąc (2.8) przez  $\bar{u}_{1x2}^{(k)}$  i całkując obustronnie otrzymane równanie po  $x$  w przedziale  $[0, l_1]$  otrzymuje się z uwzględnieniem (2.5) i ortogonalności funkcji  $u_{1x2}^{(k,\mu)}$

$$(2.9) \quad q_{12}^{(k)}(t) = \frac{\int_0^{l_1} q_{12}(x, t) \bar{u}_{1x2}^{(k)}(x) dx}{\int_0^{l_1} \sum_{\mu=-r}^r [u_{1x2}^{(k,\mu)}(x)]^2 dx}.$$

Podstawienie (2.6) dla  $\alpha = 2$  oraz (2.8) do równania (2.2) daje dla każdego  $k$  i  $\mu$  równanie:

$$(2.10) \quad \frac{\ddot{\tau}^{(k,\mu)}}{\tau^{(k,\mu)}} + \frac{f_0}{(\rho A)_1} \frac{(u_{1x2}^{(k,\mu)})^{II}}{u_{1x2}^{(k,\mu)}} + \left( \frac{EI_2}{\rho A} \right)_1 \frac{(u_{1x2}^{(k,\mu)})^{IV}}{u_{1x2}^{(k,\mu)}} - \omega_0^2 = \frac{q_{12}^{(k)}}{(\rho A)_1 \tau^{(k,\mu)}}.$$

Uwzględniając, że zachodzi relacja [5]

$$(2.11) \quad \frac{f_0}{(\rho A)_1} \frac{(u_{1x2}^{(k,\mu)})^{II}}{u_{1x2}^{(k,\mu)}} + \left( \frac{EI_2}{\rho A} \right)_1 \frac{(u_{1x2}^{(k,\mu)})^{IV}}{u_{1x2}^{(k,\mu)}} - \omega_0^2 = (\omega_k + \mu\omega_0)^2,$$

otrzymuje się równania

$$(2.12) \quad \ddot{\tau}^{(k,\mu)} + (\omega_k + \mu\omega_0)^2 \tau^{(k,\mu)} = \frac{q_{12}^{(k)}}{(\rho A)_1},$$

z których dla  $(\omega_k + \mu\omega_0) \neq 0$  wynika

$$(2.13) \quad \tau^{(k,\mu)} = \frac{1}{(\rho A)_1(\omega_k + \mu\omega_0)} \int_0^t q_{12}^{(k)}(\tau) \sin[(\omega_k + \mu\omega_0)(t - \tau)] d\tau.$$

Rozpatrywany układ jest traktowany jako liniowy, zatem zgodnie z zasadą superpozycji drgania wału w przypadku występowania dodatkowych obciążeń rozłożonych  $q_{11}(x, t)$ ,  $q_{13}(x, t)$  i  $q_{14}(x, t)$  w równaniach (2.1), (2.3) i (2.4) określone są zależnościami (2.6) i wyrażeniem

$$(2.14) \quad \tau^{(k,\mu)} = \sum_{\alpha=1}^4 \tau_{\alpha}^{(k,\mu)}.$$

Funkcje  $\tau_{\alpha}^{(k,\mu)}$  są rozwiązaniami równań

$$(2.15) \quad \begin{aligned} \ddot{\tau}_1^{(k,\mu)} + (\omega_k + \mu\omega_0)^2 \tau_1^{(k,\mu)} &= \frac{1}{\rho_1} q_{11}^{(k)}, \\ \ddot{\tau}_2^{(k,\mu)} + (\omega_k + \mu\omega_0)^2 \tau_2^{(k,\mu)} &= \frac{1}{(\rho A)_1} q_{12}^{(k)}, \\ \ddot{\tau}_3^{(k,\mu)} + (\omega_k + \mu\omega_0)^2 \tau_3^{(k,\mu)} &= \frac{1}{(\rho A)_1} q_{13}^{(k)}, \\ \ddot{\tau}_4^{(k,\mu)} + (\omega_k + \mu\omega_0)^2 \tau_4^{(k,\mu)} &= \frac{1}{(I_s)_1} q_{14}^{(k)}, \end{aligned}$$

w których  $q_{1\alpha}^{(k)}$  wynoszą:

$$(2.16) \quad q_{1\alpha}^{(k)} = \frac{\int_0^{l_1} q_{1\alpha} \bar{u}_{2x\alpha}^{(k)} dx}{\int_0^{l_1} \sum_{\mu=-r}^r (u_{1x\alpha}^{(k,\mu)})^2 dx}, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4.$$

Gdy drugi odcinek wału również poddany jest wymuszeniom rozłożonym, to należy podobnie dodać do funkcji  $\tau^{(k,\mu)}$  odpowiednie człony. Przykładowo, jeśli płaszczyzna  $X_1, X_3$  jest pozioma i wał przedstawiony na rys. 1 znajduje się w polu sił wywierających na jednostkę długości  $i$ -tego odcinka pionowe obciążenia  $Q_i(x, t) = \text{const}$ , to drgania  $i$ -tego odcinka oraz funkcje  $\tau^{(k,\mu)}$  można przedstawić w postaci (2.6) i

$$(2.17) \quad \tau^{(k,\mu)} = \tau_{12}^{(k,\mu)} + \tau_{13}^{(k,\mu)} + \tau_{22}^{(k,\mu)} + \tau_{23}^{(k,\mu)}.$$

W celu wyznaczenia poszczególnych funkcji  $\tau_{i\alpha}^{(k,\mu)}$  (2.17) należy odnieść obciążenia  $Q_i$  do ruchomych układów współrzędnych obu odcinków wału. Jeśli ruchomy układ współ-

rzędnych  $x_{21}$ ,  $x_{22}$ ,  $x_{23}$  drugiego odcinka jest obrócony w kierunku wirowania wału o kąt  $\delta_2$  względem ruchomego układu współrzędnych  $x_{11}$ ,  $x_{12}$ ,  $x_{13}$  pierwszego odcinka i w chwili  $t = 0$  oś  $x_{12}$  jest zwrócona pionowo w dół, to przy prędkości kątowej wirowania wału  $\omega_0$  obciążenia rozłożone w ruchomych układach współrzędnych wynoszą w dowolnej chwili  $t$ :

$$(2.18) \quad \begin{aligned} q_{12} &= Q_1 \cos \omega_0 t, & q_{13} &= -Q_1 \sin \omega_0 t, \\ q_{22} &= Q_2 \cos(\omega_0 t + \delta_2), & q_{23} &= -Q_2 \sin(\omega_0 t + \delta_2). \end{aligned}$$

Funkcje  $\tau_{i\alpha}^{(k,\mu)}$  są zatem rozwiązaniami równań

$$(2.19) \quad \ddot{\tau}_{i\alpha}^{(k,\mu)} + (\omega_k + \mu\omega_0)^2 \tau_{i\alpha}^{(k,\mu)} = \frac{1}{(\rho A)_i} q_{i\alpha}^{(k)}, \quad i = 1, 2, \quad \alpha = 2, 3$$

w których  $q_{i\alpha}^{(k)}$  są zgodnie z (2.16) i (2.18) następującymi funkcjami czasu:

$$(2.20) \quad \begin{aligned} q_{12}^{(k)} &= Q_1 \cos \omega_0 t \frac{\int_0^{l_1} \bar{u}_{1x2}^{(k)} dx}{\int_0^{l_1} \sum_{\mu=-r}^r (u_{1x2}^{(k,\mu)})^2 dx}, & q_{13}^{(k)} &= -Q_1 \sin \omega_0 t \frac{\int_0^{l_1} \bar{u}_{1x3}^{(k)} dx}{\int_0^{l_1} \sum_{\mu=-r}^r (u_{1x3}^{(k,\mu)})^2 dx}, \\ q_{22}^{(k)} &= Q_2 \cos(\omega_0 t + \delta_2) \frac{\int_0^{l_2} \bar{u}_{2x2}^{(k)} dx}{\int_0^{l_2} \sum_{\mu=-r}^r (u_{2x2}^{(k,\mu)})^2 dx}, \\ q_{23}^{(k)} &= -Q_2 \sin(\omega_0 t + \delta_2) \frac{\int_0^{l_2} \bar{u}_{2x3}^{(k)} dx}{\int_0^{l_2} \sum_{\mu=-r}^r (u_{2x3}^{(k,\mu)})^2 dx}. \end{aligned}$$

W celu uwzględnienia tłumienia wewnętrznego w wale oraz w filmie olejowym łożysk i w konstrukcji podpierającej wał wykorzystać można pewne relacje, dotyczące drgań swobodnych układu niezachowawczego [5]. W pracy [5] założono, że tłumione drgania swobodne podatnie podpartego asymetrycznego wału mogą być opisane zależnościami (2.6), w których funkcje  $u_{i\alpha}^{(k,\mu)}$  są wyznaczone jak dla układu zachowawczego, natomiast funkcje  $\tau^{(k,\mu)}$  są przy zastąpieniu częstości  $\omega_k$  zespolonymi częstościami  $\tilde{\omega}_k = \bar{\omega}_k + j\bar{\omega}_k$  drgań swobodnych układu z tłumieniem rozwiązaniami równań:

$$(2.21) \quad \ddot{\tau}^{(k,\mu)} + 2\bar{\omega}_k \dot{\tau}^{(k,\mu)} + [(\bar{\omega}_k + \mu\omega_0)^2 + \bar{\omega}_k^2] \tau^{(k,\mu)} = 0.$$

Przyjęcie analogicznego założenia w odniesieniu do opisu drgań wymuszonych przy wykorzystaniu funkcji własnych prowadzi w przypadkach rozpatrywanych w niniejszej pracy do zastąpienia (2.12) równaniem

$$(2.22) \quad \ddot{\tau}^{(k,\mu)} + 2\bar{\omega}_k \dot{\tau}^{(k,\mu)} + [(\bar{\omega}_k + \mu\omega_0)^2 + \bar{\omega}_k^2] \tau^{(k,\mu)} = \frac{1}{(\rho A)_i} q_{i\alpha}^{(k)}$$

i do wprowadzenia podobnych zmian w równaniach (2.15), (2.19).

### 3. Drgania podatnie podpartego asymetrycznego wału przy wymuszeniach skupionych

Wykorzystanie funkcji własnych do opisu drgań podatnie podpartego asymetrycznego wału przy wymuszeniach skupionych nie różni się w istotny sposób od podobnego zagadnienia przy obciążeniach rozłożonych. Przykładowo, jeśli nie występują obciążenia rozłożone i w płaszczyźnie  $x_{11}, x_{12}$  działa w punkcie  $x = \xi$  prostopadłe do osi wału siła skupiona  $f_{12}^w(t)$ , to równanie (2.2) przyjmuje postać:

$$(3.1) \quad (\rho A)_1 (\ddot{u}_{1x_2} - \omega_0^2 u_{1x_2}) + f_0 u_{1x_2}'' + (EI_2)_1 u_{1x_2}^{IV} = \delta(x - \xi) f_{12}^w(t),$$

gdzie  $\delta$  oznacza dystrybucję Diraca. Poszukując drgań wymuszonych wału w postaci (2.6) należy rozłożyć funkcję  $\delta(x - \xi) f_{12}^w(t)$  w szereg według układu funkcji własnych drgań giętnych pierwszego odcinka w płaszczyźnie  $x_{11}, x_{12}$ :

$$(3.2) \quad \delta(x - \xi) f_{12}^w(t) = \sum_k \bar{u}_{1x_2}^{(k)}(x) q_{12}^{(k)}(t).$$

Zważywszy, że

$$(3.3) \quad \int_0^{l_1} \delta(x - \xi) f_{12}^w(t) \bar{u}_{1x_2}^{(k)}(x) dx = f_{12}^w(t) \bar{u}_{1x_2}^{(k)}(\xi),$$

otrzymuje się w odróżnieniu od (2.9)

$$(3.4) \quad q_{12}^{(k)} = f_{12}^w(t) \frac{\bar{u}_{1x_2}^{(k)}(\xi)}{\int_0^{l_1} \sum_{\mu=-r}^r [u_{1x_2}^{(k,\mu)}(x)]^2 dx}.$$

Funkcje  $\tau^{(k,\mu)}$  są rozwiązaniami równań (2.12) (lub (2.22) przy uwzględnieniu tłumienia w układzie), do których należy podstawić (3.4).

Rozpatrzenie w oparciu o zasadę superpozycji przypadków działania większej liczby sił skupionych lub równoczesnego występowania obciążeń skupionych i rozłożonych nie nastęrcza trudności.

### 4. Uwagi końcowe

Drgania wymuszone bardziej złożonych układów z asymetrycznymi wałami (np. układów rozpatrywanych w pracach [1] i [2]) mogą być wyznaczane analogicznie jak w p. 2 i 3 niniejszej pracy. Przedstawione w p. 3 podejście stanowi alternatywny sposób rozwiązania zagadnienia drgań podatnie podpartych asymetrycznych wałów przy wymuszeniach skupionych w stosunku do metody opisanej w pracy [1]. W metodzie tej stosuje się macierze przejścia, odnoszące się do poszczególnych odcinków obliczeniowych. Biorąc pod uwagę, że wymaga się przy tym dokonania podziału wału (linii wałów) na odcinki obliczeniowe m.in. w miejscach działania sił skupionych, wykorzystanie funkcji własnych do analizy drgań wymuszonych może się okazać bardziej celowe w przypadkach występowania sił skupionych w odpowiednio licznych przekrojach wału.

## Literatura cytowana w tekście

1. J. KOLENDA, *Drgania wymuszone linii wałów z uwzględnieniem asymetrii sztywności giętej i podatności fundamentów. Metoda identyfikacji podatności fundamentów linii wałów*, Mech. Teor. i Stos., 4, 16, 1978.
2. J. KOLENDA, *Uściślony opis drgań wymuszonych linii wałów z uwzględnieniem asymetrii sztywności na zginanie i podatności fundamentów*, Mech. Teor. i Stos., 1, 17 1979.
3. J. KOLENDA, *Wymuszone drgania giętne podatnie podpartego asymetrycznego wału*. Mech. Teor. i Stos. 3, 18, 1980.
4. J. KOLENDA, *Sprężone drgania prętów z więzami zależnymi od częstości*, W Redakcji Zeszytów Nauk. Politechniki Gdańskiej, Bud. Okrętowe
5. J. KOLENDA, *Swobodne i wymuszone drgania podatnie podpartego asymetrycznego wału*, Zeszyty Nauk. Politechniki Gdańskiej, nr 319, Budownictwo Okrętowe 32, 1980

## Резюме

## О ИСПОЛЬЗОВАНИИ СОБСТВЕННЫХ ФОРМ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ АСИММЕТРИЧЕСКИХ ВАЛОВ НА ПОДАТЛИВЫХ ФУНДАМЕНТАХ

Работа касается вынужденных изгибных, продольных и крутильных колебаний вала с асимметрией изгибной жесткости, описанных несопряженными линейными дифференциальными уравнениями в частных производных. Учитывается сопряжения между колебаниями вследствие податливого подкрепления вала и трение в системе. Рассматривается случаи распределенных и сосредоточенных возмущений. Решения представляется при помощи разложений в ряды по собственным формам.

## Summary

## USE OF MODES FOR DESCRIPTION OF FORCED VIBRATIONS OF FLEXIBLE SUPPORTED ASYMMETRICAL SHAFTS

The paper deals with flexural, longitudinal and torsional forced vibrations of a shaft with an asymmetry of a flexural rigidity, being governed by non-coupled linear partial differential equations. The couplings between vibrations due to the flexibility of the shaft support as well as a damping in the analysed system are taken into account. The cases of distributed and discrete loadings are considered. Solutions are expressed in terms of the normal modes.

POLITECHNIKA GDAŃSKA  
INSTYTUT OKRĘTOWY

*Praca została złożona w Redakcji dnia 9 października 1979 roku.*