MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3, 19 (1981)

WRAŻLIWOŚĆ ROZWIĄZAŃ RÓWNANIA LINIOWYCH DRGAŃ MEMBRANY NA ZMIANY WSPÓŁCZYNNIKÓW RÓWNANIA

ROMAN GUTOWSKI (WARSZAWA)

I. Wstęp

Problem wrażliwości modeli matematycznych powstał w ostatnim dwudziestoleciu a więc stosunkowo niedawno. Stał on się wkrótce jednym z najbardziej aktualnych problemów badawczych zarówno teorii jak i praktyki modeli matematycznych opisujących zjawiska rzeczywiste. W problemie tym występują dwa główne zagadnienia, a mianowicie jakościowe i ilościowe. W celu wyrobienia sobie bliższego poglądu na oba te zagadnienia, warto przedstawić skrótowo istotę problematyki wrażliwości. Ograniczymy się tu do modeli w postaci równań różniczkowych. Dla modeli tych formułuje się szereg zagadnień takich jak istnienie i jednoznaczność rozwiązania, ciągła zależność względem wartości początkowych i parametrów, stateczność (np. w sensie Lapunowa) ze względu na zaburzenia wartości początkowych, lub prawych stron równania i inne. Wrażliwość jest problemem polegającym na zbadaniu zmiany rozwiązania równania różniczkowego, powstającej wskutek zmiany któregoś ze współczynników występujących w równaniu. Okazuje się, że zmiana stałego współczynnika o pewną niewielką wartość, nie powoduje bynajmniej stałej odchyłki od starego rozwiązania, lecz odchyłkę zmienną w czasie, odnośnie której można badać bądź jakościowo pewną jej miarę informującą nas o ograniczoności tej odchyłki, lub jej zachowaniu się z biegiem czasu, bądź też można tę odchyłkę wyznaczyć ilościowo. Opisana powyżej koncepcja pojęcia wrażliwości nie jest jedyna i istnieją również inne koncepcje wrażliwości, jak na przykład wrażliwość strukturalna, zajmująca się badaniem odchyłki od starego rozwiązania, w przypadku zmiany struktury, czyli postaci równania różniczkowego, lub zmiany ilości stopni swobody. Pozostając przy zmianie współczynników, można badać również zmiany innych charakterystyk niż samo rozwiązanie, takich jak na przykład widma częstości, lub postaci własnych, w liniowych układach drgających. W każdym z rozważanych przypadków należy zdefiniować odpowiednią miarę wrażliwości. W niniejszej pracy ograniczymy się do badania klasycznej wrażliwości, to znaczy zmiany rozwiązania spowodowanego małą zmianą jednego ze współczynników równania. Badanie to przeprowadza się za pomocą odpowiednio zdefiniowanej funkcji wrażliwości, którą można wprowadzić w rozmaity sposób. W przedstawionej pracy podane jest badanie jakościowe wprowadzonej funkcji wrażliwości. W tym zakresie zagadnienie można zaliczyć do grupy jakościowej problematyki teorii stateczności specyficznego rodzaju, a mianowicie stateczności na małe zaburzenia stałych współczynników równania. Badanie takie powinno poprzedzać zagadnienie ilościowe wyznaczenia funkcji wrażliwości, które nadaje problemowi wrażliwości ostateczny wyraz praktyczny. Jednakże nawet jakościowe zbadanie zachowania się funkcji wrażliwości i stwierdzenie, że jest ona na przykład ograniczona, lub zmierza do zera i od jakich parametrów fizycznych zagadnienia to zależy, daje pewne interesujące informacje praktyczne o wrażliwości modelu matematycznego, w postaci równania różniczkowego, na małe zaburzenia współczynnika.

Z praktycznego punktu widzenia, badanie wrażliwości w sensie omówionym powyżej pozwala na przewidzenie, jak znacznie będą się różniły rozwiązania np. drgań elementów wykonywanych seryjnie, dopuszczając pewien rozrzut parametrów fizycznych (mas, sztywności) podczas produkcji. Na podstawie analizy wrażliwości można również rozwiązywać zagadnienie odwrotne, to znaczy podać dopuszczalny rozrzut parametrów fizycznych aby odchyłka rozwiązań od egzemplarza wzorcowego nie przekroczyła z góry żądanej wartości.

Należy podkreślić, że problematyka ta została w mniejszym lub większym stopniu zbadana dla równań różniczkowych zwyczajnych [2], [3]. Dla równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych problematyka ta znajduje się w stadium formułowania i uzyskiwania pierwszych rezultatów. Niektóre z nich, dla zagadnień zawierających jedną zmienną przestrzenną są przedstawione w pracach [4], [5], [6]. Niniejsza praca przedstawia problem wrażliwości na zmiany współczynników równania dla równania o pochodnych cząstkowych z dwiema zmiennymi przestrzennymi. W tym przypadku, jak również w przypadku wielu zmiennych przestrzennych powstają jakościowo nowe problemy, w porównaniu z przypadkami, w których występuje jedna zmienna przestrzenna. Dla przejrzystości rozważań zagadnienie zostało przedstawione nie na przykładzie ogólnego równania o pochodnych cząstkowych o wielu zmiennych przestrzennych, lecz na przykładzie drgań membrany, mającej znane znaczenie i zastosowanie w teorii i praktyce drgań układów ciągłych.

2. Sformułowanie zagadnienia

Rozważmy równanie różniczkowe drgań membrany prostokątnej w postaci

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\mu\frac{\partial u}{\partial t}+ru = T_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+F(x,t), \tag{1}$$

gdzie

m — masa przypadająca na jednostkę powierzchni membrany,
μ — współczynnik tłumienia liniowego zewnętrznego drgań poprzecznych,
r — współczynnik sprężystości podłoża sprężystego,
T_0 — napięcie membrany,
$F(x, t)$ — siła wymuszająca,
$u(x, y, t)$ — przemieszczenie poprzeczne membrany.

Niech boki rozważanej membrany prostokątnej będą odpowiednio równe a i b, przy czym $b < a$.

Wprowadzamy oznaczenia

$$\frac{\mu}{m} = 2\beta,\quad \frac{r}{m} = c,\quad \frac{T_0}{m} = \gamma,\quad \frac{1}{m}F = f,$$

gdzie β, c, γ oznaczają stałe dodatnie. Równanie (1) przybiera postać

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2\beta\frac{\partial u}{\partial t}+cu=\gamma\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x,t). \tag{2}$$

Niech warunki początkowe mają postać

$$u(x,y,0)=\psi_1(x,y),\qquad \frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t}=\psi_2(x,y), \tag{3}$$

zaś warunki brzegowe niech mają postać

$$\begin{cases} u(0,y,t)=0, & u(a,y,t)=0,\\ u(x,0,t)=0, & u(x,b,t)=0. \end{cases} \tag{4}$$

Warunki te odpowiadają przypadkowi membrany zamocowanej wzdłuż wszystkich boków.

Zakładamy, że rozwiązanie równania (2) z warunkami (3) i (4) jest znane. Zagadnieniem, które chcemy zbadać, jest wrażliwość rozwiązań równania (2) na zmiany współczynnika ξ, który jest równy γ lub β lub c. W tym celu wprowadzamy funkcję wrażliwości w postaci

$$\omega(x,y,t,\xi)=\lim_{\Delta\xi\to 0}\frac{u(x,y,t,\xi+\Delta\xi)-u(x,y,t,\xi)}{\Delta\xi}=\frac{\partial u}{\partial\xi}. \tag{5}$$

Na mocy (5) mamy następującą równość przybliżoną

$$u(x,y,t,\xi+\Delta\xi)-u(x,y,t,\xi)\cong\omega(x,y,t,\xi)\Delta\xi. \tag{6}$$

Jeśli wyznaczymy, lub oszacujemy funkcję $\omega(x,y,t,\xi)$, wtedy na podstawie wzoru (6) możemy wyznaczyć w przybliżeniu, lub oszacować zmianę funkcji $u(x,y,t,\xi)$ odpowiadającą zmianie $\Delta\xi$ parametru ξ. Również na odwrót, jeśli różnica $\Delta u=u(x,y,t,\xi+\Delta\xi)-$ $-u(x,y,t,\xi)$ jest z góry dana, wtedy na mocy (6) możemy wyznaczyć w przybliżeniu dopuszczalną wartość $\Delta\xi$.

Wyprowadzimy równanie różniczkowe dla funkcji $\omega(x,y,t,\xi)$. Różniczkując równanie różniczkowe (2) względem $\xi=\gamma,\beta,c$ otrzymujemy równanie różniczkowe wrażliwości w postaci

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}+2\beta\frac{\partial \omega}{\partial t}+c\omega=\gamma\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right)+\varphi(x,y,t,\xi) \tag{7}$$

gdzie

$$\varphi(x,y,t,\xi)=\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \text{dla } \xi=\gamma\\ -2\dfrac{\partial u}{\partial t} & \text{dla } \xi=\beta\\ -u & \text{dla } \xi=c. \end{cases} \tag{8}$$

Warunki początkowe i brzegowe mają postać

$$(9)\quad \begin{cases} \omega(x,y,0,\xi) = \dfrac{\partial}{\partial\xi}u(x,y,0,\xi) = \dfrac{\partial}{\partial\xi}\psi_1(x,y) = 0, \\ \dfrac{\partial\omega((x,y,0,\xi)}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial\xi}\left[\dfrac{\partial u(x,y,0,\xi)}{\partial t}\right] = \dfrac{\partial}{\partial\xi}\psi_2(x,y) = 0, \end{cases}$$

$$(10)\quad \begin{cases} \omega(0,y,t,\xi) = \dfrac{\partial}{\partial\xi}u(0,y,t,\xi) = 0, \quad \omega(a,y,t,\xi) = \dfrac{\partial}{\partial\xi}u(a,y,t,\xi) = 0, \\ \omega(x,0,t,\xi) = \dfrac{\partial}{\partial\xi}u(x,0,t,\xi) = 0, \quad \omega(x,b,t,\xi) = \dfrac{\partial}{\partial\xi}u(x,b,t,\xi) = 0. \end{cases}$$

Zagadnienie polega na zbadaniu zachowania się rozwiązań równania (7), to znaczy na znalezieniu warunków dostatecznych ich ograniczoności, lub zmierzania do zera przy $t \to \infty$.

3. Badanie zachowania się rozwiązań równania różniczkowego wrażliwości

Jeśli współczynnik ξ nie ulega zmianie, wtedy jest $\omega \equiv 0$. Jeśli współczynnik ξ zmienia się o $\Delta\xi$, wtedy rozwiązanie równania (7) odchyla się od rozwiązania zerowego. Odchylenie powyższe będziemy mierzyli za pomocą odległości w postaci

$$(11)\quad \varrho(\omega) = \int_0^a\int_0^b \left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2 + 2\beta\omega\frac{\partial\omega}{\partial t} + c\omega^2 + \gamma\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \gamma\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2\right]dxdy =$$

$$= \int_0^a\int_0^b \left[(c-\beta^2)\omega^2 + \left(\beta\omega + \frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2 + \gamma\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \gamma\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2\right]dxdy,$$

gdzie zakładamy, że

$$(12)\quad c-\beta^2 > 0.$$

Wprowadzona odległość spełnia warunki

$$\varrho(\omega) \geqslant 0, \quad \varrho(0) = 0.$$

Odległość ta nie musi spełniać aksjomatów przestrzeni metrycznej.

Dla pewnego $\omega(x,y,t,\xi)$ odległość będziemy oznaczali przez $\varrho(t)$ i zakładamy, że jest ona jednoznaczną i ciągłą funkcją czasu t.

Różniczkując odległość (11) względem czasu i podstawiając zamiast $\dfrac{\partial^2\omega}{\partial t^2}$ odpowiednie składniki z równania (7) otrzymujemy po przekształceniach

$$(13)\quad \dot{\varrho} = 2\int_0^a\int_0^b \left[-\beta\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2 - 2\beta^2\omega\frac{\partial\omega}{\partial t} - \beta c\omega^2 + \beta\gamma\omega\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \beta\gamma\omega\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} + \right.$$

$$\left. + \gamma\frac{\partial\omega}{\partial t}\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \gamma\frac{\partial\omega}{\partial t}\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} + \gamma\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial t} + \gamma\frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial^2\omega}{\partial y\partial t}\right]dxdy +$$

$$+ 2\int_0^a\int_0^b \left(\beta\omega + \frac{\partial\omega}{\partial t}\right)\varphi dxdy.$$

Obliczmy całkując przez części następujące całki, uwzględniając przy tym warunki brzegowe

$$\int_0^a\int_0^b \omega\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\,dxdy = -\int_0^a\int_0^b \left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 dxdy,$$

$$\int_0^a\int_0^b \omega\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\,dxdy = -\int_0^a\int_0^b \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2 dxdy,$$

$$\int_0^a\int_0^b \frac{\partial\omega}{\partial t}\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\,dxdy = -\int_0^a\int_0^b \frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial t}\,dxdy,$$

$$\int_0^a\int_0^b \frac{\partial\omega}{\partial t}\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\,dxdy = -\int_0^a\int_0^b \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial^2\omega}{\partial y\partial t}\,dxdy.$$

Wzór (13) przybiera więc postać

$$\dot{\varrho} = -2\beta\int_0^a\int_0^b \left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2 + 2\beta\omega\frac{\partial\omega}{\partial t} + c\omega^2 + \gamma\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \gamma\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2\right] dxdy + $$

$$+2\int_0^a\int_0^b \left(\beta\omega + \frac{\partial\omega}{\partial t}\right)\varphi\, dxdy.$$

Na mocy (11) mamy więc

$$\dot{\varrho} = -2\beta\varrho + 2\int_0^a\int_0^b \left(\beta\omega + \frac{\partial\omega}{\partial t}\right)\varphi\, dxdy. \tag{14}$$

Stąd otrzymujemy

$$\dot{\varrho} \leqslant -2\beta\varrho + \int_0^a\int_0^b 2\left|\beta\omega + \frac{\partial\omega}{\partial t}\right| |\varphi|\, dxdy \leqslant -2\beta\varrho + \int_0^a\int_0^b \left[\left(\beta\omega + \frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2 + \varphi^2\right] dxdy,$$

$$\dot{\varrho} \leqslant -2\beta\varrho + \int_0^a\int_0^b \left[(c-\beta^2)\omega^2 + \gamma\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \gamma\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2 + \left(\beta\omega + \frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2\right] dxdy + \int_0^a\int_0^b \varphi^2 dxdy,$$

$$\dot{\varrho} \leqslant -2\beta\varrho + \varrho + \int_0^a\int_0^b \varphi^2 dxdy = (1-2\beta)\varrho + \int_0^a\int_0^b \varphi^2 dxdy. \tag{15}$$

Oznaczmy

$$\Phi(t, \xi) = \int_0^a\int_0^b \varphi^2(x, y, t, \xi)\, dxdy. \tag{16}$$

Na mocy (15) otrzymujemy nierówność

$$\varrho \leqslant B\exp[(1-2\beta)t]+\int_0^t \Phi(s,\xi)\exp[(1-2\beta)(t-s)]ds, \qquad t\in[0,\infty) \tag{17}$$

Na podstawie warunków początkowych (9) i wzoru (11) mamy

$$B = \varrho\big|_{t=0} = 0.$$

Nierówność (17) przybiera więc postać

$$\varrho \leqslant \int_0^t \Phi(s,\xi)\exp[(1-2\beta)(t-s)]ds. \tag{18}$$

Ponieważ rozwiązanie $u(x, y, t, \xi)$ jest znane, więc znana jest również funkcja $\Phi(t, \xi)$. Możemy więc wyznaczyć analitycznie, lub numerycznie, obszar parametrów, dla których nierówność (18) jest spełniona.

Mając oszacowaną odległość ϱ, możemy oszacować całkę podwójną z kwadratu funkcji wrażliwości ω rozciągniętą na obszar powierzchni membrany. Istotnie na mocy (11) i (18) mamy

$$\int_0^a\int_0^b \omega^2 dx\,dy \leqslant \frac{1}{c-\beta^2}\int_0^t \Phi(s,\xi)\exp[(1-2\beta)(t-s)]ds \tag{19}$$

W przypadku szczególnym $\beta = 0$, $c = 0$ nie można skorzystać z oszacowania (19), jednakże oszacowanie typu (19), niezależne od β i c można otrzymać jeszcze w następujący sposób.

Funkcję wrażliwości $\omega^2(x, y, t, \xi)$ możemy przedstawić w postaci

$$\omega^2(x,y,t,\xi) = \int_0^y \frac{\partial}{\partial s}\omega^2(x,s,t,\xi)dS = \int_0^y 2\omega(x,s,t,\xi)\frac{\partial\omega(x,s,t,\xi)}{\partial s}ds.$$

Stąd mamy

$$\begin{gathered}\int_0^a\int_0^b \omega^2(x,y,t,\xi)dx\,dy = \int_0^a\int_0^b\left[\int_0^y 2\omega(x,s,t,\xi)\frac{\partial\omega(x,s,t,\xi)}{\partial s}ds\right]dx\,dy,\\ \int_0^a\int_0^b \omega^2(x,y,t,\xi)dx\,dy = \int_0^a\left\{\int_0^b\left[\int_0^y 2\omega(x,s,t,\xi)\frac{\partial\omega(x,s,t,\xi)}{\partial s}ds\right]dy\right\}dx.\end{gathered} \tag{20}$$

Zmieniamy kolejność całkowania względem y i s stosując wzór Dirichleta w postaci

$$\int_0^b dy\int_0^y f(s,y)ds = \int_0^b ds\int_s^b f(s,y)dy, \tag{21}$$

przy czym w rozważanym przypadku, funkcja f we wzorze (20) nie zależy od zmiennej y. Na podstawie (21) otrzymujemy wzór (20) w postaci

$$\int_0^a\int_0^b \omega^2(x,y,t,\xi)dx\,dy = \int_0^a\left\{\int_0^b\left[\int_s^b 2\omega(x,s,t,\xi)\frac{\partial\omega(x,s,t,\xi)}{\partial s}dy\right]ds\right\}dx.$$

Jednakże funkcja podcałkowa po prawej stronie nie zależy od y więc mamy

$$\int_0^a\int_0^b \omega^2(x,y,t,\xi)dxdy = \int_0^a\int_0^b 2\omega(x,s,t,\xi)\frac{\partial\omega(x,s,t,\xi)}{\partial s}(b-s)dxds.$$

Ponieważ zmienna s zmienia się w granicach $0 \leqslant s \leqslant b$ więc ma miejsce nierówność $b-s \leqslant b$. Oznaczając s przez y otrzymujemy więc

$$\int_0^a\int_0^b \omega^2(x,y,t,\xi)dxdy \leqslant 2b\int_0^a\int_0^b |\omega(x,y,t,\xi)|\left|\frac{\partial\omega(x,y,t,\xi)}{\partial y}\right|dxdy.$$

Stosując nierówność Buniakowskiego-Schwarza mamy

$$\int_0^a\int_0^b \omega^2(x,y,t,\xi)dxdy \leqslant 2b\left[\int_0^a\int_0^b \omega^2(x,y,t,\xi)dxdy\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_0^a\int_0^b\left(\frac{\partial\omega(x,y,t,\xi)}{\partial y}\right)^2dxdy\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Podnosząc tę nierówność obustronnie do kwadratu otrzymujemy ostatecznie

$$\int_0^a\int_0^b \omega^2dxdy \leqslant 4b^2\int_0^a\int_0^b\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2dxdy. \tag{22}$$

Na mocy (11) i (18) mamy

$$\int_0^a\int_0^b\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2dxdy \leqslant \frac{1}{\gamma}\int_0^t \Phi(s,\xi)\exp[(1-2\beta)(t-s)]ds.$$

Wobec tego na mocy (22) otrzymujemy

$$\int_0^a\int_0^b \omega^2dxdy \leqslant \frac{4b^2}{\gamma}\int_0^t \Phi(s,\xi)\exp[(1-2\beta)(t-s)]ds. \tag{23}$$

Nierówności (19) i (23) możemy napisać w postaci

$$\int_0^a\int_0^b \omega^2dxdy \leqslant N\int_0^t \Phi(s,\xi)\exp[(1-2\beta)(t-s)]ds, \tag{24}$$

gdzie

$$N = \min\left(\frac{1}{c-\beta^2}, \frac{4b^2}{\gamma}\right). \tag{25}$$

Załóżmy, że jest spełniona nierówność

$$1-2\beta < 0. \tag{26}$$

Jeśli funkcja $\Phi(t,\xi)$ jest ograniczona dla $t \in [0,\infty)$, wtedy całka podwójna z kwadratu funkcji wrażliwości jest również ograniczona, gdy zaś $\Phi(t,\xi) \to 0$ dla $t \to \infty$, wtedy całka podwójna z kwadratu funkcji wrażliwości ma również tę własność.

Załóżmy, że ma miejsce nierówność (26) i rozważmy przypadek, gdy rozwiązanie $u(x,y,t,\xi)$ równania (2) oraz pochodne występujące w tym równaniu są ograniczone. Wtedy funkcja Φ jest również ograniczona, to znaczy

$$\Phi(t,\xi) \leqslant \lambda = \text{const} < \infty, \quad t \in [0,\infty). \tag{27}$$

Nierówność (24) przybiera wtedy postać

$$\int_0^a \int_0^b \omega^2 dx dy \leqslant \frac{\lambda N}{2\beta - 1}(1 - \exp[(1-2\beta)t]). \tag{28}$$

Gdy funkcja $u(x, y, t, \xi)$ jest nieznana, wtedy w przypadku $\xi = c$ to znaczy $\varphi = -u$ możemy otrzymać oszacowanie całki podwójnej z kwadratu funkcji wrażliwości w sposób następujący.

Dla funkcji u możemy otrzymać analogicznie jak powyżej oszacowanie

$$J = \int_0^a \int_0^b \left[(c-\beta^2)u^2 + \left(\beta u + \frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \gamma\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \gamma\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx dy \leqslant \tag{29}$$

$$\leqslant A\exp[(1-2\beta)t] + \int_0^t Q(s)\exp[(1-2\beta)(t-s)]ds,$$

gdzie

$$Q(t) = \int_0^a \int_0^b f^2 dx dy, \qquad A = J\big|_{t=0}.$$

Stąd otrzymujemy w sposób analogiczny jak w przypadku nierówności (24) nierówność w postaci

$$\Phi = \int_0^a \int_0^b u^2 dx dy \leqslant N\left(A\exp[(1-2\beta)t] + \int_0^t Q(s)\exp[(1-2\beta)(t-s)]ds\right).$$

Wobec tego na mocy (24) mamy

$$\int_0^a \int_0^b \omega^2 dx dy \leqslant N^2 \int_0^t \Big(A\exp[(1-2\beta)s] + \tag{30}$$

$$+ \int_0^s Q(\tau)\exp[(1-2\beta)(s-\tau)]d\tau\Big)\exp[(1-2\beta)(t-s)]ds$$

Na podstawie nierówności (30) można zbadać zachowanie się całki podwójnej z kwadratu funkcji wrażliwości z biegiem czasu, w zależności od własności funkcji Q.

Należy podkreślić, że w przypadku membrany, w której równaniu drgań poprzecznych występują dwie zmienne przestrzenne x i y, nie udaje się uzyskać informacji bezpośrednich o funkcji wrażliwości ω, lecz tylko o całce podwójnej z kwadratu funkcji wrażliwości.

Wynika stąd na przykład, że jeśli oznaczymy przez u_1 rozwiązanie równania (2) dla $\beta \neq 0$, zaś przez u_2 rozwiązanie równania (2) dla $\beta = 0$, to przy $\beta \to 0$ nie należy spodziewać się, że $u_2 \to u_1$. Natomiast powinno być

$$\int_0^a \int_0^b u_2^2 dx dy \to \int_0^a \int_0^b u_1^2 dx dy \quad \text{przy} \quad \beta \to 0$$

Podsumowując uzyskane rezultaty można stwierdzić co następuje. Badając wrażliwość drgań membrany w oparciu o liniowy model matematyczny drgań, za pomocą wprowadzonej funkcji wrażliwości, nie daje się uzyskać wartości ograniczającej samą funkcję wrażliwości, co jak stwierdziliśmy na początku jest na ogół nadzwyczaj pożądaną informacją jakościową mającą samodzielne znaczenie praktyczne. Odnośnie funkcji wrażliwości możemy uzyskać tylko informację, że całka podwójna z jej kwadratu jest ograniczona, lub zmierza do zera, co wynika ze wzoru (24). W nierówności tej prawą stronę otrzymujemy ustalając wartość stałej N, którą można wyznaczyć znając wymiary i parametry fizyczne membrany (wzór (25)) oraz mając informację o zachowaniu się rozwiązania równania (1) membrany z niezaburzonymi współczynnikami, to znaczy znając funkcję Φ daną wzorem (16). Skończoną postać oszacowania (24), w przypadku gdy funkcja Φ jest ograniczona stałą λ (wzór 27) przedstawia wzór (28). Oznacza to, że stosując model liniowy membrany w postaci równania (1), możemy w przypadku małej zmiany współczynników równania spodziewać się tylko małej zmiany całki z kwadratu funkcji wrażliwości, a nie samej funkcji wrażliwości. Jest to podstawowa cecha charakterystyczna i trudność występująca przy badaniu modeli matematycznych układów dynamicznych ciągłych, zawierających więcej niż jedną zmienną przestrzenną, którą trzeba brać pod uwagę przy fizycznej interpretacji wyników dotyczących badania wrażliwości, lub przy badaniach numerycznych.

Wzór (24) podaje oszacowanie całki podwójnej z kwadratu funkcji wrażliwości przy założeniu, że rozwiązanie równania (1) to znaczy również i funkcja Φ dana wzorem (16) są znane. W przypadku gdy zmianie ulega współczynnik c (p. równanie (2)), wtedy możemy nie rozwiązywać tego równania w celu wyznaczenia funkcji Φ lecz posłużyć się oszacowaniem funkcji Φ, co wystarczy do skonstruowania oszacowania całki podwójnej z kwadratu funkcji wrażliwości danej wzorem (30). Sens tego wzoru jest taki sam jak wzoru (24), z tą jednak różnicą, że po prawej stronie wzoru (30) nie występuje już jawnie funkcja Φ której nie trzeba więc wyznaczać. Należy jednak podkreślić, że wynik ten został uzyskany kosztem dokładności oszacowania, to znaczy oszacowanie (30) jest „grubsze" niż oszacowanie (24), w tym samym przypadku badania wrażliwości rozwiązania na zmianę współczynnika c. Oszacowanie to zachowuje jednakże te same cechy jakościowe, to znaczy można na jego podstawie wnioskować o ograniczoności i zmierzaniu do zera całki podwójnej z kwadratu funkcji wrażliwości.

Literatura cytowana w tekście

1. В. И. Смирнов, *Курс высшей математики*, t. IV Гос. Изд Тех.-Теорет. Лит. Москва, Ленинград, 1951
2. R. Tomovic, *Sensitivity analysis of dynamic systems*, NY 1963 Mac Graw Hill.
3. Р. Томович, М. Вукобратович, *Общая теория чувствительности*, Изд. Советское Радио, 1972.
4. R. Gutowski, *Introduction sur la stabilité du mouvement des systems continus*, Laboratoire de mécanique des solides, L'Université de Poitiers 1978.
5. R. Gutowski, *Stateczność i wrażliwość w ukladach mechanicznych*, rozdział w: Wprowadzenie do stateczności ruchu układów ciągłych, Ossolineum 1978.
6. R. Gutowski, *Чувствительность решений уравнений движения некоторых колебательных систем с распределенными параметрами*, Proceedings of the VIII-th International Conference on Nonlinear Oscillations, Prague, 1978.

Резюме

ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕМБРАНЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ИЗМЕНЕНИЙ ЕГО КОЭФФИЦИЕНТОВ

В работе исследуется чувствительность решений уравнения линейных колебаний прямоугольной мембраны относительно изменений коэффициентов этого уравнения. Чувствительность исследуется с помошью апределённой в работе функции чувсвительности для которой выводится дифференциальное уравнение в частных производных. С помощью соответствующим образом выбранного расстояния между решениями дифференциального уравнения чувствительности и нулевым решением этого уравнения получены эффективные оценки двойного интеграла из квадрата функции чувствительности. На основании этих оценок исследуется поведение рассматриваемого двойного интеграла с течением времени, между прочим его ограниченность и стремление к нулю при $t \to \infty$.

Summary

SENSITIVITY OF SOLUTIONS OF LINEAR EQUATION FOR A VIBRATING MEMBRANE TO VARIATION OF EQUATION COEFFICIENTS

The sensitivity of solution of is investigated the linear equation for a vibrating rectangular membrane, with respect to variation of equation coefficients.

The sensitivity has been tested by the sensitivity function, defined in the paper, for which a partia, differential equation has been derived.

A properly established distance between the null solution to this equation and the solution of the differential equation of sensitivity has been used to estimate the double integral of the square of the sensitivity function. The estimation served later to investigate the variation with time of the double integrall and permitted to determine its limitations and convergence to zero as $t \to \infty$.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 2 września 1980 roku