

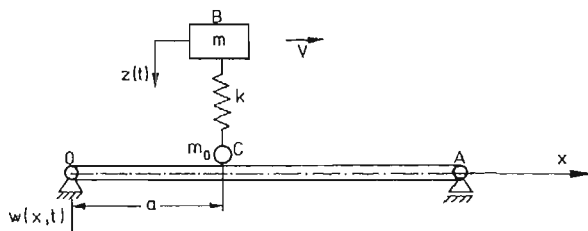
DRGANIA GIĘTNE BELKI WYWOŁANE PORUSZAJĄCYM SIĘ UKŁADEM DYSKRETNYM

STANISŁAW KASPRZYK, RYSZARD ZIERNICKI, (KRAKÓW)

W pracy analizowane są swobodne drgania giętne belki elastosprężystej wymuszone poruszającym się po niej ze stałą prędkością układem o dyskretnym rozłożeniu masy. Zagadnienia tego typu są rozważane w pracach [1, 2, 4, 5] przy założeniu *a priori*, że funkcje własne i wartości własne belki nie zależą od parametrów poruszającego się układu dyskretnego. W pracach tych drgania układu przybliża się pierwszą harmoniczną, tj. pierwszą postacią drgań wprowadzając w ten sposób układ dyskretno-ciągły do układu o dwóch stopniach swobody.

W pracy [3] pokazano, że funkcje i wartości własne belki w przypadku ustalonego położenia układu dyskretnego na belce zależą również w istotny sposób od parametrów układu dyskretnego. Wykorzystując ideę wyznaczania funkcji własnych [3], w pracy [6] pokazano, że siła w liniowym elemencie sprężystym łączącym belkę z masą skupioną w istotny sposób zależy od drgań belki.

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie nowej przybliżonej metody analizy drgań zachowawczego układu przedstawionego na rys. 1.



Rys. 1

**Oznaczenia:**  $\bar{v}$  — prędkość przemieszczania się układu dyskretnego B - C po belce O - A,  $m$  — masa ciała B,  $m_0$  — masa ciała C,  $EI$  — sztywność zginania belki,  $\rho F$  — gęstość belki na jednostkę belki,  $k$  — współczynnik sprężystości,  $w(x, t)$  — przemieszczenie punktów belki,  $z(t)$  — przemieszczenie środka masy ciała B,  $l$  — długość belki O - A,  $a$  — współrzędna położenia ciała C na belce mierzona od punktu 0,  $a \in [0, l]$ ,  $\delta(x - a)$  — impuls Diraca w punkcie  $a$ .

**Przyjęte założenia:**

1. Układ dyskretny B - C porusza się ze stałą prędkością  $\bar{v}$ .
2. Ciało C w czasie ruchu nie odrywa się od belki.
3. Jeżeli układ B - C znajduje się w punkcie o współrzędnej  $x = 0$ , to belka O - A pozostaje w spoczynku.

4.  $z(0) = z_0$ ,  $\dot{z}(0) = \dot{z}_0$  dla  $x = 0$  — warunki początkowe układu B - C.
5. Układem o ciągłym rozłożeniu masy jest pryzmatyczna belka sprężysta swobodnie podparta o stałej sztywności  $EI$ .
6. Amplitudy drgań punktów belki są małe tzn. są tego samego rzędu co ugięcia statyczne, przekroje poprzeczne nie ulegają odkształceniu oraz pozostają płaskie.
7. W układzie pominięto wpływ tłumienia, bezwładności obrotowej przekroi poprzecznych oraz ścinania.

Drgania układu przedstawionego na rys. 1 są opisane układem równań:

$$(1) \quad \begin{aligned} EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \delta(x-vt) \left\{ -m_0 \frac{d^2 w}{dt^2} + k[z(t) - w(vt, t)] \right\}, \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} + k[z(t) - w(vt, t)] &= 0, \quad \left( \frac{d^2 w}{dt^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \end{aligned}$$

z warunkami brzegowymi

$$(2) \quad w(0, t) = 0, \quad w(l, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w(0, t)}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 w(l, t)}{\partial x^2} = 0,$$

oraz początkowymi

$$(3) \quad w(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad z(0) = z_1, \quad \dot{z}(0) = z_2$$

Przytoczymy te wyniki z pracy [3], z których będziemy korzystali w dalszej części niniejszej pracy.

Przyjmując  $v = 0$  i  $m_0 = 0$  w układzie równań (1), otrzymujemy zagadnienie rozważane w [3], tj.:

$$(4) \quad \begin{aligned} EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \delta(x-a) k[z(t) - w(a, t)], \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} + kz &= kw(a, t), \end{aligned}$$

z warunkami brzegowymi (2) oraz początkowymi

$$(5) \quad w(x, 0) = f_1(x), \quad \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = f_2(x), \quad z(0) = z_1, \quad \dot{z}(0) = z_2, \quad (f_1, f_2 \in C^2)$$

Ogólnym rozwiązaniem układu równań (4) jest:

$$(6) \quad w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t), \quad z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n T_n(t),$$

gdzie:

$$(7) \quad T_n(t) = C_{1n} \cos \omega_n t + C_{2n} \sin \omega_n t,$$

$$(8) \quad X_n(x) = R_n \sin \lambda_n x + Q_n \operatorname{sh} \lambda_n x + \frac{m \lambda_n}{2 \rho F} A_n [\operatorname{sh} \lambda_n (x-a) - \sin \lambda_n (x-a)] H(x-a),$$

$$H(x-a) = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq a \\ 0 & \text{dla } x < a, \end{cases} \quad \left( \omega_n^2 = \lambda_n^4 \frac{EJ}{F} \right).$$

Wektory własne  $(X_n(x), A_n) = y_n$  problemu (4), (2) odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne z wagami  $M, m$ , tzn.

$$(9) \quad \langle y_m, y_n \rangle = \int_0^l [MX_m(x)X_n(x) + mA_m A_n] dx = \begin{cases} 0 & \text{dla } m \neq n \\ \gamma > 0 & \text{dla } m = n, \end{cases}$$

gdzie:  $\rho Fl = M, n, m \in \mathbb{N}$ .

W dalszej części pracy przyjmujemy  $\gamma = 1$ , wynika to z odpowiedniego unormowania  $(X_n(x), A_n)$ .

Z (5), (6), (7), (8) i (9) wyznaczamy stałe, które dla warunków początkowych (6) w chwili  $t = t_0$  wynoszą:

$$(10) \quad C_{1n} = Y_{1n} \cos \omega_n t_0 - Y_{2n} \sin \omega_n t_0, \quad C_{2n} = Y_n \sin \omega_n t_0 + Y_{2n} \cos \omega_n t_0,$$

gdzie:

$$Y_{1n} = \int_0^l [MX_m(x)f_1(x) + mA_n z_1] dx, \quad Y_{2n} = \frac{1}{\omega_n} \int_0^l [MX_n(x)f_2(x) + mA_n z_2] dx.$$

Stałe  $R_n, Q_n$  i  $A_n$  wyznaczamy z równania:

$$(11) \quad \begin{bmatrix} \sin \lambda_n l & \operatorname{sh} \lambda_n l & \frac{m \lambda_n}{2\rho F} \beta_1 \\ -\sin \lambda_n l & \operatorname{sh} \lambda_n l & \frac{m \lambda_n}{2\rho F} \beta_2 \\ \sin \lambda_n a & \operatorname{sh} \lambda_n a & \frac{mEJ}{k\rho F} \lambda^4 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_n \\ Q_n \\ A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

gdzie:

$$\beta_1 = \operatorname{sh} \lambda_n(l-a) - \sin \lambda_n(l-a), \quad \beta_2 = \sin \lambda_n(l-a) + \operatorname{sh} \lambda_n(l-a)$$

Wartości własne  $\lambda_n$  wyliczamy z równania otrzymanego z przyrównania do zera wyznacznika macierzy współczynników (11).

1. Przedstawimy obecnie ideę metody otrzymywania przybliżonego rozwiązania równań (1) z warunkami (2) i (3). Przy założeniu  $m \gg m_0$ , przyjmujemy  $m_0 = 0$ .

1.1. Przedział  $[0, a]$  dzielimy na  $n$  równych części punktami  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , przy czym  $0 = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_l < \dots x_{n-1} < x_n = a$ .

1.2. Układ ciał B - C znajdujący się w punkcie  $x = 0$  dla  $t \in \left[0, \frac{a}{nv}\right]$  przenosimy w czasie

zerowym do punktu  $x_1 = \frac{a}{n}$  i pozostawiamy go w tym punkcie dla  $t \in \left[\frac{a}{nv}, \frac{2a}{nv}\right]$ .

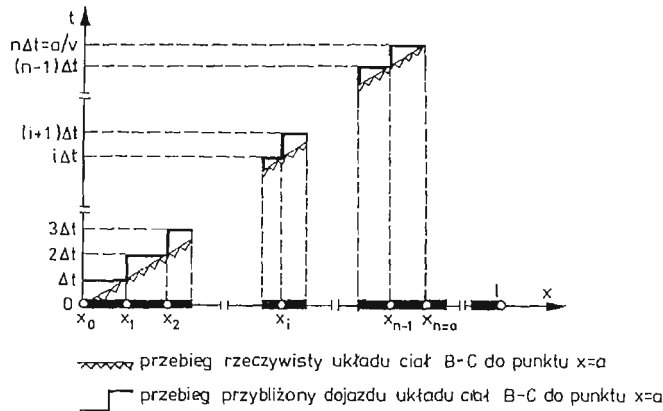
W tym przedziale czasu jest wzajemne oddziaływanie układu B - C i belki w punkcie  $x = x_1$ . Przeniesienia dokonujemy tak, aby wektory prędkości względnych belki w punkcie  $x_1$  i ciała C były sobie równe.

1.3. Wyznaczamy rozwiązanie  $z\left(\frac{a}{n}, t\right)$  oraz  $w\left(x, \frac{a}{n}, t\right)$ .

1.4. Następnie, jeśli  $t = \frac{2a}{nv}$  układ B - C przenosimy sposobem podanym w punkcie 1.2

do punktu belki o odciętej  $x_2 = \frac{2a}{n}$ .

1.5. Postępowanie to powtarzamy tak długo, aż układ ciał B - C znajdzie się w punkcie  $x = a$ , a następnie wyznaczamy rozwiązanie  $z(a, t)$  i  $w(x, a, t)$ . Sposób przemieszczania ciał B - C po belce przedstawiony w punktach 1.2 - 1.5 nazwano porównawczym ruchem skokowym. Powyższe postępowanie ilustruje rys. 2.

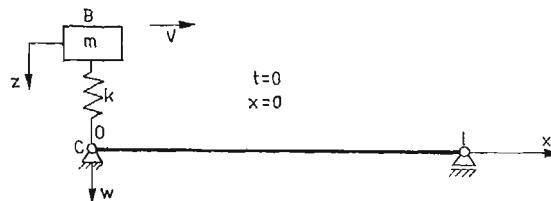


Rys. 2

**Uwaga 1.** Z przedstawionej w punktach 1.1 - 1.5 metody postępowania wynika, że  $w, z, X, \dots$  zależą również od parametru  $\frac{ia}{n}$  i dla krótkości zapisu oznaczymy:

$$w^{(i)}(x, t) = w\left(x, \frac{ia}{n}, t\right), \quad z^{(i)}(t) = z\left(\frac{ia}{n}, t\right), \quad X^{(i)}(x) = X\left(x, \frac{ia}{n}\right),$$

$$T^{(i)}(t) = T\left(t, \frac{ia}{n}\right), \quad \lambda^{(i)} = \lambda\left(\frac{ia}{n}\right), \quad R^{(i)} = R\left(\frac{ia}{n}\right), \dots$$



Rys. 3

Uwzględniając powyższe założenia, rozpatrzmy kolejne etapy ruchu ciał B - C po belce O - A.

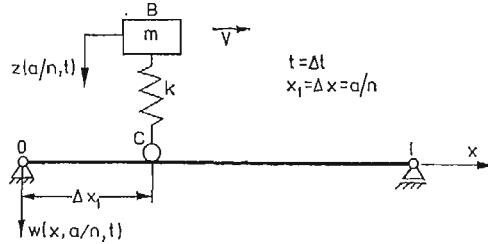
W chwili  $t = 0$  układ B - C znajduje się na lewej podporze (rys. 3). Zgodnie z założeniem 3 belka pozostaje w spoczynku. W tym przypadku mamy warunki początkowe:

$$(12) \quad z^{(0)}(0) = z_0, \quad \dot{z}^{(0)}(0) = \dot{z}_0, \quad w^{(0)}(x, 0) = 0, \quad w_t^{(0)}(x, 0) = 0, \quad \left(w_t = \frac{\partial w}{\partial t}\right).$$

Z (6), (7), (8) i (11) otrzymujemy rozwiązanie dla  $x = 0$ ,  $t \in \left[0, \frac{a}{nv}\right]$ ,

$$(13) \quad w^{(0)}(x, t) = 0, \quad z^{(0)}(t) = z_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{z}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m},$$

Krok pierwszy



Rys. 4

Układ dyskretny B - C znajduje się w punkcie  $x_1 = \frac{a}{n}$  dla  $t \in \left[0, \frac{a}{nv}\right]$  (rys. 4) i pobudza belkę do drgań. Jest to więc układ dyskretno-ciągły, którego drgania wyznaczamy z (6), (7) i (8) dla następujących warunków początkowych:

$$(14) \quad \begin{aligned} z^{(0)}(t_1) &= z_1 \cos \omega_0 t_1 + \frac{z_2}{\omega_0} \sin \omega_0 t_1, \\ \dot{z}^{(0)}(t_1) &= z_2 \cos \omega_0 t_1 - z_1 \omega_0 \sin \omega_0 t_1, \\ w^{(0)}(x, t_1) &= 0, \quad w_t^{(0)}(x, t_1) = 0, \quad t_1 = \frac{2a}{nv}. \end{aligned}$$

Dla pierwszego kroku funkcje własne (8) mają postać:

$$(15) \quad \begin{aligned} X_k^{(1)}(x) &= R_k^{(1)} \sin \lambda_k^{(1)} x + Q_k^{(1)} \operatorname{sh} \lambda_k^{(1)} + \\ &+ \frac{m \lambda_k^{(1)}}{2 \rho F} A_k^{(1)} \left\{ \operatorname{sh} \left[ \lambda_k^{(1)} \left( x - \frac{a}{n} \right) \right] - \sin \left[ \lambda_k^{(1)} \left( x - \frac{a}{n} \right) \right] \right\} H \left( x - \frac{a}{n} \right). \end{aligned}$$

Z (10) dla  $x_1 = \frac{a}{n}$  wyliczamy stałe  $R_k^{(1)}$ ,  $Q_k^{(1)}$  w zależności od  $A_k^{(1)}$

$$(16) \quad \begin{aligned} R_k^{(1)} &= \frac{m \lambda_k^{(1)}}{2 \rho F} \cdot \frac{\sin \left[ \lambda_k^{(1)} \left( l - \frac{a}{n} \right) \right]}{\sin \lambda_k^{(1)} l} A_k^{(1)}, \\ Q_k^{(1)} &= - \frac{m \lambda_k^{(1)}}{2 \rho F} \cdot \frac{\operatorname{sh} \left[ \lambda_k^{(1)} \left( l - \frac{a}{n} \right) \right]}{\operatorname{sh} \lambda_k^{(1)} l} A_k^{(1)}. \end{aligned}$$

Z (7) otrzymujemy

$$(17) \quad T_k^{(1)}(t) = C_{1k}^{(1)} \cos \omega_k^{(1)} t + C_{2k}^{(1)} \sin \omega_k^{(1)} t.$$

Wobec (7) i (14) otrzymujemy:

$$(18) \quad \begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} X_k^{(1)}(x) T_k^{(1)}(t_1) &= 0, \\ \sum_{k=1}^{\infty} X_k^{(1)}(x) \dot{T}_k^{(1)}(t_1) &= 0, \\ \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(1)} T_k^{(1)}(t_1) &= z_1 \cos \omega_0 t_1 - \frac{z_2}{\omega_0} \sin \omega_0 t_1, \\ \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(1)} \dot{T}_k^{(1)}(t_1) &= z_1 \cos \omega_0 t_1 + z_2 \omega_0 \cos \omega_0 t_1. \end{aligned}$$

Mnożąc pierwsze dwa równania (18) przez  $MX_j^{(1)}(x)$  oraz trzecie i czwarte przez  $mA_j^{(1)}$ , a następnie dodając pierwsze do trzeciego i drugie do czwartego otrzymujemy:

$$(19) \quad \begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} T_k^{(1)}(t_1) [MX_k^{(1)} X_j^{(1)} + mA_k^{(1)} A_j^{(1)}] &= mA_j^{(1)} \left[ z_1 \cos \omega_0 t_1 + \frac{z_2}{\omega_0} \sin \omega_0 t_1 \right], \\ \sum_{k=1}^{\infty} \dot{T}_k^{(1)}(t_1) [MX_k^{(1)} X_j^{(1)} + mA_k^{(1)} A_j^{(1)}] &= mA_j^{(1)} [z_2 \cos \omega_0 t_1 - z_1 \omega_0 \sin \omega_0 t_1]. \end{aligned}$$

Całkując stronami (19) w przedziale  $[0, 1]$  oraz wykorzystując (7), (9) i (14) wyliczamy stałe  $C_{1k}^{(1)}$ ,  $C_{2k}^{(1)}$ :

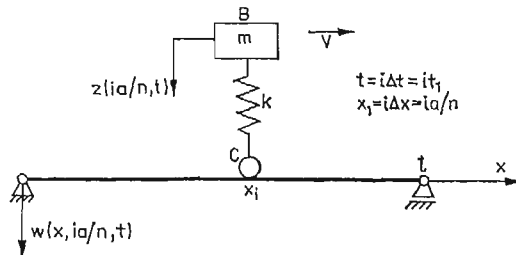
$$(20) \quad \begin{aligned} C_{1k}^{(1)} &= Y_{1k}^{(1)} \cos(\omega_k^{(1)} t_1) - Y_{2k}^{(1)} \sin(\omega_k^{(1)} t_1), \\ C_{2k}^{(1)} &= Y_{1k}^{(1)} \sin(\omega_k^{(1)} t_1) + Y_{2k}^{(1)} \cos(\omega_k^{(1)} t_1), \quad t_1 = \frac{a}{nv}, \end{aligned}$$

gdzie

$$Y_{1k}^{(1)} = ml A_k^{(1)} z^{(0)}(t_1), \quad Y_{2k}^{(1)} = \frac{ml}{\omega_k^{(1)}} A_k^{(1)} \dot{z}^{(0)}(t_1),$$

Wykorzystując (6), (15), (16), (17) i (20) otrzymujemy rozwiązanie układu (1) z warunkami (2) i (3), ( $m_0 = 0$ ) dla  $t \in \left[0, \frac{2a}{nv}\right]$ .

**Krok i-ty.**



Rys. 5

W  $i$ -tym punkcie ( $x = x_i, t_i = it_1$ ) warunki początkowe są następujące:

$$(21) \quad \begin{aligned} z^{(i-1)}(it_1) &= z^{(i)}(it_1), & \dot{z}^{(i-1)}(it_1) &= \dot{z}^{(i)}(it_1), \\ w^{(i-1)}(x, it_1) &= w^{(i)}(x, it_1), & w_t^{(i-1)}(x, it_1) &= w_t^{(i)}(x, it_1). \end{aligned}$$

Rozwiązanie (6) w  $i$ -tym kroku ma postać:

$$(22) \quad \begin{aligned} w^{(i)}(x, t) &= \sum_{s=1}^{\infty} X_s^{(i)}(x) T_s^{(i)}(t), \\ z^{(i)}(t) &= \sum_{s=1}^{\infty} A_s^{(i)} T_s^{(i)}(t). \end{aligned}$$

Funkcja własna (8) dla  $i$ -tego kroku ma postać:

$$(23) \quad X_s^{(i)} = R_s^{(i)} \sin \lambda_s^{(i)} x + Q_s^{(i)} \operatorname{sh} \lambda_s^{(i)} x + \frac{m \lambda_s^{(1)}}{2 \rho F} A_s^{(i)} \left\{ \operatorname{sh} \left[ \lambda_s^{(i)} \left( x - \frac{ia}{n} \right) \right] \right\} H \left( x - \frac{ia}{n} \right),$$

gdzie:

$$\begin{aligned} R_s^{(i)} &= \frac{m \lambda_s^{(i)}}{2 \rho F} \cdot \frac{\sin \left[ \lambda_s^{(i)} \left( l - \frac{ia}{n} \right) \right]}{\sin [\lambda_s^{(i)} l]} A_s^{(i)}, \\ Q_s^{(i)} &= - \frac{m \lambda_s^{(i)}}{2 \rho F} \frac{\operatorname{sh} \left[ \lambda_s^{(i)} \left( l - \frac{ia}{n} \right) \right]}{\sin [\lambda_s^{(i)} l]} A_s^{(i)}, \quad s \in \mathbb{N}, i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Wobec (7) funkcja  $T_s^{(i)}$  dla  $i$ -tego kroku wyraża się wzorem

$$T_s^{(i)}(t) = C_{1s}^{(i)} \cos \omega_s^{(i)} t + C_{2s}^{(i)} \sin \omega_s^{(i)} t, \quad (s \in \mathbb{N}, i = 1, 2, \dots, n)$$

Z (6) i (21) otrzymujemy układ równań

$$(24) \quad \begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(i-1)} T_k^{(i-1)}(it_1) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(i)} T_k^{(i)}(it_1), \\ \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(i-1)} \dot{T}_k^{(i-1)}(it_1) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(i)} \dot{T}_k^{(i)}(it_1), \\ \sum_{k=1}^{\infty} X_k^{(i-1)}(x) T_k^{(i-1)}(it_1) &= \sum_{k=1}^{\infty} X_k^{(i)}(x) T_k^{(i)}(it_1), \\ \sum_{k=1}^{\infty} X_k^{(i-1)}(x) \dot{T}_k^{(i-1)}(it_1) &= \sum_{k=1}^{\infty} X_k^{(i)}(x) \dot{T}_k^{(i)}(it_1). \end{aligned}$$

Mnożąc pierwsze dwa równania układu (24) przez  $m A_j^{(i)}$  i dwa ostatnie przez  $M X_j^{(i)}$ , a następnie dodając stronami pierwsze do trzeciego oraz drugie do czwartego równania otrzymujemy odpowiednio:

$$(55) \quad \begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \{ T_k^{(i-1)}(it_1) [M X_k^{(i-1)} X_j^{(i)} + m A_k^{(i-1)} A_j^{(i)}] - T_k^{(i)}(it_1) [M X_k^{(i)} X_j^{(i)} + m A_k^{(i-1)} A_j^{(i)}] \} &= 0, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \{ \dot{T}_k^{(i-1)}(it_1) [M X_k^{(i-1)} X_j^{(i)} + m A_k^{(i-1)} A_j^{(i)}] - \dot{T}_k^{(i)}(it_1) [M X_k^{(i)} X_j^{(i)} + m A_k^{(i)} A_j^{(i)}] \} &= 0. \end{aligned}$$

Całkując stronami układ równań (25) w przedziale  $[0, l]$  oraz uwzględniając (7), (8) i (9) wyliczamy  $C_{1k}^{(i)}$ ,  $C_{2k}^{(i)}$ , tzn.

$$(26) \quad \begin{aligned} C_{1k}^{(i)} &= Y_{1k}^{(i)} \cos(\omega_k^{(i)} it_1) - Y_{2k}^{(i)} \sin(\omega_k^{(i)} it_1), \\ C_{2k}^{(i)} &= Y_{1k}^{(i)} \sin(\omega_k^{(i)} it_1) + Y_{2k}^{(i)} \cos(\omega_k^{(i)} it_1), \quad (i = 1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

gdzie

$$(27) \quad \begin{aligned} Y_{1k}^{(i)} &= \int_0^l [MX_k^{(i)}(x)w^{(i-1)}(x, it_1) + mA_k^{(i)}z^{(i-1)}(it_1)] dx, \\ Y_{2k}^{(i)} &= \frac{1}{\omega_k^{(i)}} \int_0^l [MX_k^{(i)}w_t^{(i-1)}(x, it_1) + mA_k^{(i)}\dot{z}^{(i-1)}(it_1)] dx; \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

**Uwaga 2.**

We wzorze (26) dla  $i = 1$  należy wstawić odpowiednio:

$$w^{(0)}(x, 0) = 0, \quad w_t^{(0)}(x, 0) = 0, \quad z^{(0)}(0) = z_1, \quad \dot{z}^{(0)}(0) = z_2$$

**Uwaga 3.**

Jeśli przyjmiemy:

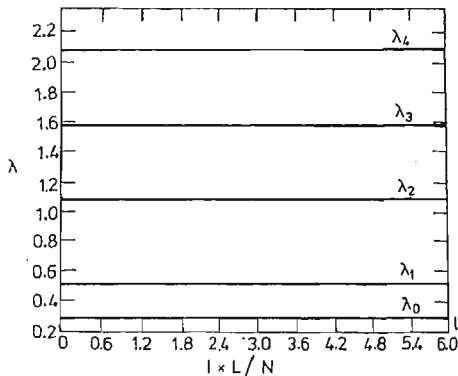
$$\begin{aligned} f_1(x) &= w^{(i-1)}(x, it_1), \quad z_1 = z^{(i-1)}(it_1), \\ f_2(x) &= w_t^{(i-1)}(x, it_1), \quad z_2 = \dot{z}^{(i-1)}(it_1), \end{aligned}$$

to z wzoru (10) otrzymujemy wzór (27). Dla  $n$ -tego kroku  $\left(x = a, t = \frac{a}{v}\right)$  należy podstawić w powyższych wzorach  $i = n$ .

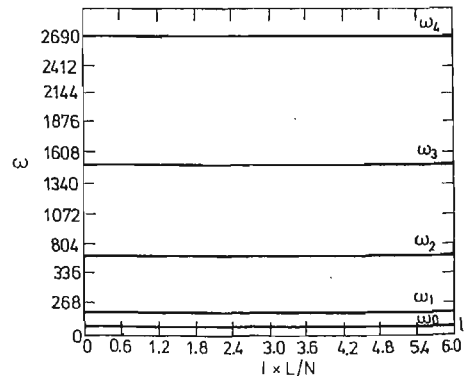
#### Obliczenia numeryczne wartości własnych.

Obecnie przedstawimy wyniki obliczeń numerycznych wartości własnych i częstości własnych rozważanego zagadnienia uzyskane na maszynie cyfrowej CYBER 72. Obliczono kilkanaście kolejnych wartości własnych  $\lambda_j$  w zależności od położenia układu B - C na belce dla następujących danych:  $n = 100$ ,  $m = 16,5749$  [kGs<sup>2</sup>m<sup>-1</sup>],  $EI = 2,1 \cdot 9,785 \cdot 10^5$  [kGm<sup>2</sup>],  $\rho F = 5,51$  [kGs<sup>2</sup>m<sup>-2</sup>],  $k = 5 \cdot 10^4$  [kGm<sup>-1</sup>],  $l = 6$  [m].

Wyniki obliczeń przedstawione są na rys. 6-12.

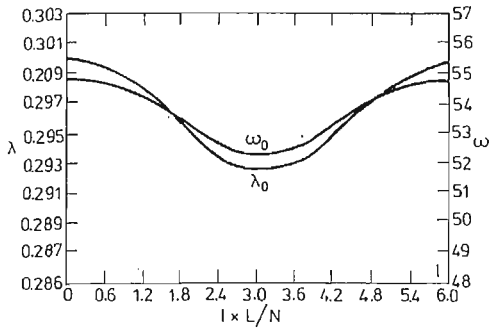


Rys. 6

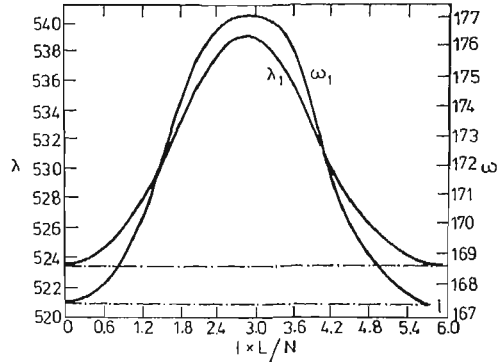


Rys. 7

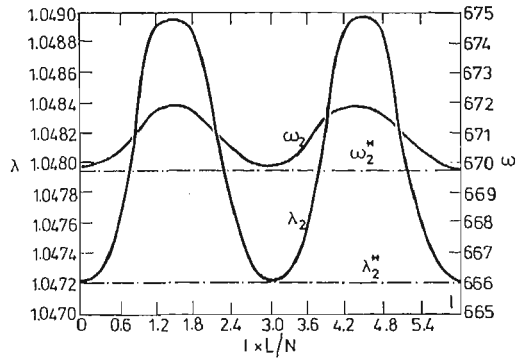




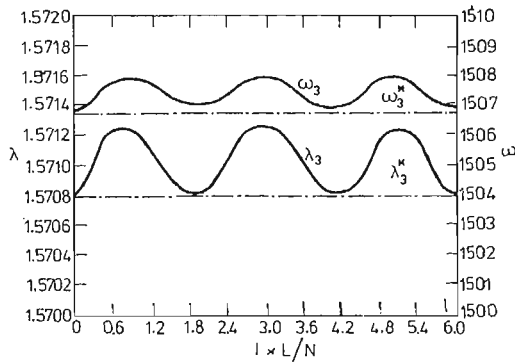
Rys. 8



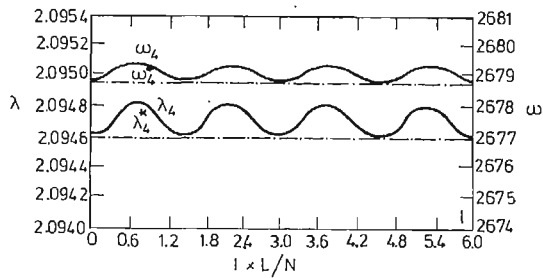
Rys. 9



Rys. 10



Rys. 11



Rys. 12

## Wnioski

1. W przedstawionej metodzie funkcje własne oraz wartości własne (częstości własne) belki zależą nie tylko od jej parametrów lecz również od parametrów poruszającego się po niej układu dyskretnego. Takie podejście pozwala na dokładniejszą analizę drgań rozważanego układu.
2. Jeśli w przedstawionej metodzie zwiększymy liczbę „ $n$ ” punktów podziału to ruch porównawczy poruszającego się po belce układu dyskretnego zbliża się do ruchu rzeczywistego.
3. Przedstawiona w pracy metoda analizy drgań giętnych belki wywołanych poruszającym się układem dyskretnym może być również zastosowana do bardziej złożonych układów dyskretnych poruszających się po belce.
4. Przeprowadzone obliczenia na maszynie cyfrowej (dla dwóch przypadków) pokazały, że położenie układu dyskretnego na belce sprężystej nie ma dużego wpływu na wyższe wartości własne układu.
5. Różnica wartości własnych układu dyskretno-ciągłego typu  $(1, \infty)$  i wartości własnych belki swobodnie podpartej i z tymi samymi warunkami brzegowymi maleje dla wyższych wartości własnych.
6. W zbiorze częstości własnych układu dyskretno-ciągłego pojawia się dodatkowa częstość własna, która jest mniejsza od pierwszej częstości własnej belki. Pojawienie się tej częstości spowodowane jest uwzględnieniem parametrów układu dyskretno-ciągłego przy wyznaczaniu funkcji własnych.

## Literatura cytowana w tekście

1. A. S. DMITRIEV, *Kritičeskoje skorosti dviženija podressorenogo gruzu*. Problemy Masinostroenija, Vyp. 5 s. 29 - 33, Akademija Nauk Ukrainskoj SSR, Naukowaja Dumka 1977.
2. A. G. GALČENKO, S. I. KONAŠČENKO, *O kolebanijach balki pri dviženii po nej grupy gruzow i gruzu s polsirujuscej siloj*, Tr. Dnepropetrovsk. Transzeldovizdat, 1963.
3. S. KASPRZYK, DANG-THINH, *Drgania swobodne zachowawczego układu dyskretno-ciągłego*. Zagadnienia Drgań Nieliniowych, z. 19, 1979.
4. G. F. KRAVČENKO, *O kolebanijach svobodnogo opertoj balki pri dviženii po nej sistemy podressorennych gruzow*. Prikladnaja Mechanika. T. III, No. 8, Moskva 1967.
5. A. B. MORGAVSKIJ, *O vlijanii resorov na velcinu dinamičeskogo efekta ot podriznoj nagruzki*, Sb. Issledovanija po teorii sooruzenij, Vyp. XIV s. 67 - 72. Moskva 1965.
6. J. WAPIENNIK, R. ZIERNICKI, *Porównanie sił sprężystych w układzie dyskretnym i dyskreno-ciągłym typu  $(1, \infty)$* . Zeszyty Naukowe AGH, z. 728 Kraków 1979.

## Резюме

## ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ ВЫНУЖДЕННЫЕ ДВИГАЮЩЕЙСЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ИЗ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ.

В статье рассматривается математическая модель для анализа динамической реакции балки по которой движется механическая система из сосредоточенными параметрами. Анализ сделан новым методом который представлен в работе.

## S u m m a r y

TRANSVERSE VIBRATIONS OF A BEAM FORCED BY DISCRETE MATERIAL SYSTEM  
MOVING ON IT

In the paper we develop a mathematical model for the analysis of the dynamic response of a beam on which a discrete system moves with constant velocity. The analysis has been made according to the new method presented in the paper.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 6 kwietnia 1979 roku*

---