

WARUNEK UTRATY STABILNOŚCI KONWEKCJI SWOBODNEJ W WARSTWIE POROWATEJ

BARBARA BORKOWSKA-PAWŁAK, WŁODZIMIERZ KORDYLEWSKI (WROCLAW)

Wstęp

W ostatniej dekadzie obserwuje się wzrost liczby publikacji dotyczących konwekcji swobodnej w ośrodkach porowatych. Problematyka ta ma szereg aspektów technicznych takich jak ekstrakcja ropy z łupków, poprawa własności materiałów izolacyjnych i niektóre zagadnienia technologii chemicznej. Pełni również ważną rolę w zagadnieniach geofizycznych.

Z teoretycznego punktu widzenia konwekcja swobodna spowodowana gradientem temperatury dostarcza jednego z najprostszych przykładów niestabilności ruchu w mechanice płynów. Klasycznym obiektem jest tu warstwa płynu ograniczona dwoma nieprzenikliwymi płaszczyznami, z których dolna ma wyższą temperaturę.

LAPWOOD [1] wykazał, że dla liczby Rayleigh'a $Ra = 4\pi^2$ rozwiązanie trywialne równań ruchu płynu i bilansu energii cieplnej w warstwie porowatej staje się niestabilne, co utożsamia się z wystąpieniem konwekcji swobodnej. Liczne badania doświadczalne potwierdziły ten rezultat wykazując, że konwekcja swobodna występuje dla liczb Rayleigh'a większych od pewnej wartości krytycznej, która zawiera się w granicach: $32,3 < Ra < 43$.

Na przełomie lat 60 i 70-tych, seria prac eksperymentalnych [2], [3], [4] wykazała, że ruch konwekcyjny w warstwie porowatej staje się niestabilny po przekroczeniu przez liczbę Rayleigh'a wartości zawierającej się w zakresie $240 < Ra < 280$. Od tego czasu, problemowi teoretycznego określenia tzw. drugiej liczby Rayleigh'a poświęcono wiele uwagi. Z matematycznego punktu widzenia zagadnienie polega na wyznaczeniu wartości krytycznej liczby Rayleigh'a, dla której nietrywialne rozwiązanie równań ruchu i bilansu energii staje się niestabilne.

W dotychczasowych pracach teoretycznych rozwiązań poszukiwano numerycznie metodą różnic skończonych lub metodą Galerkiną; ich stabilność badano metodą Galerkiną, również numerycznie.

STRAUS [5] stwierdził, że nieregularne fluktuacje ruchu płynu w warstwie porowatej pojawiają się, gdy $Ra > 380$. CALTAGIRONE [6] wykazał, że ruch konwekcyjny w warstwie porowatej przestaje być stabilny dla $Ra > 384$. Jednakże późniejsze prace nie potwierdziły poprawności tych rezultatów. Schubert i Straus [7] stwierdzili, że druga liczba Rayleigha zawiera się w przedziale $300 < Ra < 320$. HORN [8] odkrył fluktuacyjny charakter konwekcji swobodnej w warstwie porowatej dla $Ra > 300$. Tak więc, druga liczba Rayleigh'a nie jest jeszcze określona i wydaje się, że wymagane są bardziej staranne studia nad zagadnieniem utraty stabilności ruchu w ośrodku porowatym.

Celem niniejszej pracy jest określenie drugiej liczby Rayleigha metodami analitycznymi. Inspiracją były między innymi prace LORENTZA [9], RUELLE i TAKENSA [10] oraz MARS-DENA [11] dotyczące klasycznego zagadnienia konwekcji swobodnej Benarda. Wyjściowy problem analizy układu równań różniczkowych cząstkowych zredukowano metodą Galerkiną do badania pewnego układu równań różniczkowych zwyczajnych. Wyznaczono pierwszą nietrywialną gałąź rozwiązań stacjonarnych odpowiadającą początkowej fazie występowania konwekcji swobodnej w warstwie porowatej oraz zbadano jej stabilność. Wykazano, że dla liczby Rayleigh'a $Ra = 30\pi^2$ ma miejsce bifurkacja Hopfa, stąd dla $Ra > 30\pi^2$ konwekcja musi mieć charakter fluktuacyjny. Załączone przykłady obliczeń na maszynie analogowej wskazują, że fluktuacje mają niestabilny charakter, lecz w odróżnieniu od rozpatrywanego przez LORENTZA [9] przykładu, trajektorie nie są ograniczone.

Spis oznaczeń

$\bar{u}(u_x, u_z)$	— bezwymiarowa prędkość (składowe w kierunku x i z)
T	— bezwymiarowa temperatura
P	— bezwymiarowe ciśnienie
t	— bezwymiarowy czas
h	— długość komórki
γ	— wektor o składowych $(0, 0, 1)$
g	— przyśpieszenie ziemskie
α	— współczynnik rozszerzalność termicznej
k_m	— termiczna dyfuzyjność
T_0	— temperatura zimnej (górnej) powierzchni
ΔT	— różnica temperatur między gorącą (dolną) i zimną (górną) powierzchnią warstwy
C_p	— ciepło właściwe
ρ	— gęstość
$(\rho c_p)_m$	— jednostkowa pojemność cieplna nasączonej substancji porowatej
ρc_p	— jednostkowa pojemność cieplna materiału porowatego
H	— bezwymiarowy współczynnik $H = \frac{(\rho c_p)_m}{\rho C_p}$
k	— przepuszczalność
μ	— lepkość dynamiczna
ν	— lepkość kinetyczna
ε	— porowatość

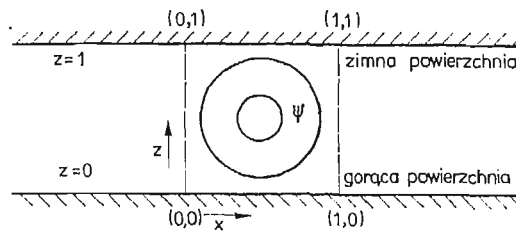
2. Sformułowanie problemu

Rozważana jest substancja porowata nasączona płynem, umieszczona między dwiema poziomymi nieprzenikliwymi płaszczyznami w ziemskim polu grawitacyjnym (Rys. 1). Odległość między płaszczyznami jest równa jednostce długości. Przyjmuje się, że dolna

płaszczyzna ma wyższą temperaturę niż górna, co jest przyczyną występowania konwekcji swobodnej. W celu uproszczenia analizy, rozważa się pionowy przekrój warstwy (Rys. 1).

Bezwymiarowe równania ruchu płynu wraz z równaniem ciągłości oraz transportu energii cieplnej mają postać

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{1}{Pr} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} &= -\bar{u} - \nabla p + T Ra \bar{\gamma}, \\ \operatorname{div} \bar{u} &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \bar{u} \nabla T &= \nabla^2 T. \end{aligned}$$



Rys. 1. Pionowy przekrój warstwy porowatej.

Równania te uzyskano drogą skalowania prawa Darcy'ego oraz równania przewodnictwa cieplnego względem zmiennych

$$\frac{h^2 H}{k_m}, h, \Delta T, \frac{\mu k_m}{k}, \frac{k_m}{h},$$

które odpowiadają: czasowi, długości, temperaturze, ciśnieniu oraz prędkości. Parametry: liczba Prandtla Pr i liczba Rayleigh'a Ra określone są następująco:

$$Pr = \frac{h^2 H}{k_m k}; \quad Ra = \frac{k g h \alpha \Delta T}{k_m}.$$

Przyjmuje się następujące warunki brzegowe:

$$(1a) \quad \begin{aligned} u &= 0 \quad \text{dla} \quad z = 0, 1. \\ T &= 1 \quad \text{dla} \quad z = 0; \quad T = 0 \quad \text{dla} \quad z = 1. \end{aligned}$$

W rozważanym przypadku dwuwymiarowym wygodnie jest wprowadzić funkcję prądu ψ zdefiniowaną następująco

$$(2) \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = u_z, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = -u_x.$$

Układ równań (1) można wówczas zapisać jako

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi) &= -\nabla^2 \psi + Ra \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial x}, \\ \frac{\partial \Theta}{\partial t} &= \nabla^2 \Theta + \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial x}, \end{aligned}$$

gdzie $\Theta = T - T_a$ jest różnicą temperatur odpowiadających stanom występowania i braku konwekcji swobodnej. Temperatura w stanie bez konwekcji jest funkcją tylko zmiennej z ($T_a = 1 - z$).

Warunki brzegowe dla problemu (3) przedstawiają się następująco

$$(3a) \quad \psi = \Theta = 0 \quad \text{dla } z = 0, 1.$$

Zagadnienie brzegowe (3), (3a) posiada nieskończenie wiele rozwiązań. W celu ograniczenia ich ilości rozważać się je będzie w obszarze ograniczonym w tzw. komórce podstawowej. Wysokość jej jest równa 1, natomiast długość wyznacza się na podstawie analizy stacjonarnego liniowego problemu własnego, który ma postać

$$(4) \quad \begin{aligned} -\nabla^2 \tilde{\psi} + \text{Ra} \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial x} &= 0, \\ \nabla^2 \tilde{\Theta} + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} &= 0, \end{aligned}$$

z warunkami brzegowymi;

$$(4a) \quad \begin{aligned} \tilde{\psi} = \tilde{\Theta} &= 0 \quad \text{dla } z = 0, 1, \\ \tilde{\psi} = \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial x} &= 0 \quad \text{dla } x = 0, h. \end{aligned}$$

gdzie h jest szukaną długością komórki.

Wartości własne problemu (4), (4a) tworzą ciąg nieskończony o wyrazach danych wzorem

$$(5) \quad \text{Ra}_{ij} = \frac{\Pi^2}{i^2 h^2} (i^2 h^2 + j^2)^2; \quad i, j = 1, 2, \dots$$

Pierwsza wartość własna $\text{Ra}_{11} = (1 + h^2)^2 \frac{\pi^2}{h^2}$ jest wartością własną prostą tzn. odpowiada jej tylko jedna funkcja własna. Ma to duże znaczenie (jak to się później okaże) przy badaniu stabilności stanów stacjonarnych odpowiadających tej wartości własnej.

Wartość $h = 1$ minimalizuje pierwszą wartość własną Ra_{11} ($\text{Ra}_{11} = 4\pi^2$ dla $h = 1$), której odpowiada minimum energii układu.

Z tego względu uzasadnione są przyjęcie w charakterze komórki podstawowej kwadratu o boku równym 1.

3. Aproksymacja Galerkin

W celu analizy stabilności rozwiązań problemu brzegowego (3), (3a) przedstawia się je w postaci szeregów Fouriera

$$(6) \quad \psi = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{ij} \psi_{ij}, \quad \Theta = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{kl} \Theta_{kl},$$

gdzie układ funkcji $\{\psi_{ij}; \Theta_{kl}\}$ postaci

$$(7) \quad \begin{aligned} \psi_{ij} &= 2 \sin \Pi i x \sin \Pi j z; & i, j, l &= 1, 2, \dots \\ \Theta_{kl} &= 2 \cos \Pi k z \sin \Pi l z & k &= 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

jest układem ortonormalnym zupełnym w przestrzeni funkcji typu L^2 ($[0, 1] \times [0, 1]$) spełniających warunki brzegowe (3a), natomiast β_{ij} i α_{kl} są nieokreślonymi współczynnikami zależnymi tylko od czasu. Badanie zachowania się tych współczynników w czasie pozwala określić własności dynamiczne (stabilność) rozwiązań układu równań (3), (3a). W celu określenia zależności między współczynnikami β_{mn} i α_{rs} należy wyrażenia (6) podstawić do układu równań (3), wymnożyć pierwsze z równań przez ψ_{mn} drugie przez Θ_{rs} oraz scałkować je po kwadracie jednostkowym $[0, 1] \times [0, 1]$. Otrzymuje się wówczas następujący nieskończenie wymiarowy układ równań różniczkowych zwyczajnych

$$(8) \quad \begin{aligned} \frac{1}{Pr} \frac{d\beta_{mn}}{dt} &= -\beta_{mn} + \frac{mRa}{\pi(m^2+n^2)} \cdot \alpha_{mn}, \\ \frac{d\alpha_{rs}}{dt} &= -\Pi^2(r^2+s^2)\alpha_{rs} + \pi r \beta_{rs} - \frac{\pi^2}{4} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} g_k h_{l-k} \{jk[(\delta_{|i-k|}^r - \\ &\quad - \delta_{|i+k|}^r) \delta_{|l-j|}^s \operatorname{sgn}(l-j)(\delta_{|i-k|}^r + \delta_{|i+k|}^r) \delta_{|l+j|}^s] + il[(\delta_{|i-k|}^r - \delta_{|i+k|}^r) \delta_{|l-j|}^s \operatorname{sgn}(j-l) + \\ &\quad + (\delta_{|i-k|}^r + \delta_{|i+k|}^r) \delta_{|l+j|}^s]\} \beta_{ij} \gamma_{kl} \end{aligned}$$

gdzie:

wskaźniki m, n, r, s , zmieniają się tak jak wskaźniki i, j, k, l występujące w wyrażeniach (6); funkcje g_k i h_{i-k} określone są następująco:

$$g_k = \begin{cases} 4 & \text{dla } k \neq 0, \\ 2\sqrt{2} & \text{dla } k = 0, \end{cases} \quad h_{i-k} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dla } i-k \neq 0, \\ \frac{1}{2} & \text{dla } i-k = 0, \end{cases}$$

natomiast δ_a^b jest deltą Kroneckera zdefiniowaną

$$\delta_a^b = \begin{cases} 1 & \text{dla } a = b \\ 0 & \text{dla } a \neq b \end{cases} \quad \text{gdzie } \begin{cases} a = i-k; & i+k; & l-j; & l+j \\ b = r, s \end{cases}$$

Analiza układu równań (8) jest zadaniem trudnym i złożonym. Metoda Galerkinia pozwala sprowadzić ten nieskończenie wymiarowy problem do skończonego wymiaru przez obcięcie bazy ortonormalnej do skończonej ilości elementów.

W pracy rozważa się układ równań oparty na podbazie sześciu elementów

$$(9) \quad \begin{aligned} &\psi_{11}, \psi_{12}, \Theta_{01}, \Theta_{02}, \Theta_{11}, \Theta_{12} \\ \frac{1}{Pr} \frac{d\beta_{11}}{dt} &= -\beta_{11} + \frac{Ra}{2\pi} \alpha_{11}, \\ \frac{1}{Pr} \frac{d\beta_{12}}{dt} &= -\beta_{12} + \frac{Ra}{5\pi} \alpha_{12}, \\ \frac{d\alpha_{01}}{dt} &= -\pi^2 \alpha_{01} + \frac{\pi^2}{\sqrt{2}} \beta_{11} \alpha_{12} + \frac{\pi^2}{\sqrt{2}} \alpha_{11} \beta_{12}, \\ \frac{d\alpha_{02}}{dt} &= -4\pi^2 \alpha_{02} - \pi^2 \sqrt{2} \alpha_{11} \beta_{11}, \\ \frac{d\alpha_{11}}{dt} &= \pi \beta_{11} - 2\pi^2 \alpha_{11} + \pi^2 \sqrt{2} \beta_{11} \alpha_{02} - \frac{\pi^2}{\sqrt{2}} \beta_{12} \alpha_{01}, \\ \frac{d\alpha_{12}}{dt} &= \pi \beta_{12} - 5\pi^2 \alpha_{12} - \frac{\pi^2}{\sqrt{2}} \beta_{11} \alpha_{01} \end{aligned}$$

Zasadniczym problemem jest teraz znalezienie stanów stacjonarnych układu dynamicznego (9) oraz określenie ich stabilności.

4. Stany stacjonarne

Stany stacjonarne (punkty stałe) układu dynamicznego wyznacza się przez przyrównanie jego prawych stron do zera. Tabela 1 podaje zestawienie punktów stałych dla układu równań w zależności od wartości liczby Rayleigh'a Ra , może ich być 1, 3 lub 7. Z tabeli 1 wynika w szczególności, że zero (punkt 0) jest punktem stałym dla dowolnej wartości Ra . Jeżeli wartość parametru Ra przekracza $4\pi^2$ (pierwsza wartość własna problemu liniowego (4)), pojawiają się dwie gałęzie niezerowych rozwiązań stacjonarnych A_1 i A_2 co utożsamiane jest z pojawieniem się konwekcji swobodnej.

Punkt $(0, 4\pi^2)$ jest zatem punktem bifurkacji rozwiązania zerowego z prostej wartości własnej $Ra = 4\pi^2$. W ogólności punktem bifurkacji rozwiązania $x_0(\mu)$ układu dynamicznego $\dot{x} = F(x(\mu), \mu)$ z wartości własnej μ_0 nazywa się punkt $(x(\mu_0), \mu_0)$ taki, że w dowolnie małym jego otoczeniu pojawia się nowe, dodatkowe rozwiązanie tego układu.

Jeżeli wartości parametru Ra przekraczają $25\pi^2$, pojawią się cztery nowe gałęzie rozwiązań stacjonarnych B_1, B_2, B_3, B_4 przy czym interesujące jest, że nie rozwidlają się one z rozwiązania zerowego.

Dalsza część pracy poświęcona jest (zgodnie z jej celem określonym poprzednio) analizie stabilności gałęzi rozwiązań niezerowych A_1, A_2 odpowiadających stanowi początkowemu występowania konwekcji swobodnej.

Pierwszym krokiem w tym kierunku jest zbadanie stabilności rozwiązania zerowego, z którego rozwidlają się te gałęzie.

5. Stabilność stanów stacjonarnych

Stabilność punktu stałego układu dynamicznego bada się, wyznaczając wartości własne jego zlinearyzowanej postaci. Jest on stabilny tylko wtedy, gdy części rzeczywiste wartości własnych są ujemne.

Linearyzując układ równań (9) w otoczeniu rozwiązania zerowego, otrzymuje się

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{Pr} \frac{d\beta'_{11}}{dt} &= -\beta'_{11} + \frac{Ra}{2\pi} \alpha'_{11}, \\
 \frac{1}{Pr} \frac{d\beta'_{12}}{dt} &= -\beta'_{12} + \frac{Ra}{5\pi} \alpha'_{12}, \\
 \frac{d\alpha'_{01}}{dt} &= -\pi^2 \alpha'_{01}, \\
 \frac{d\alpha'_{02}}{dt} &= -4\pi^2 \alpha'_{02}, \\
 \frac{d\alpha'_{11}}{dt} &= \pi\beta'_{11} - 2\pi^2 \alpha'_{11}, \\
 \frac{d\alpha'_{12}}{dt} &= \pi\beta'_{12} - 5\pi^2 \alpha'_{12},
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

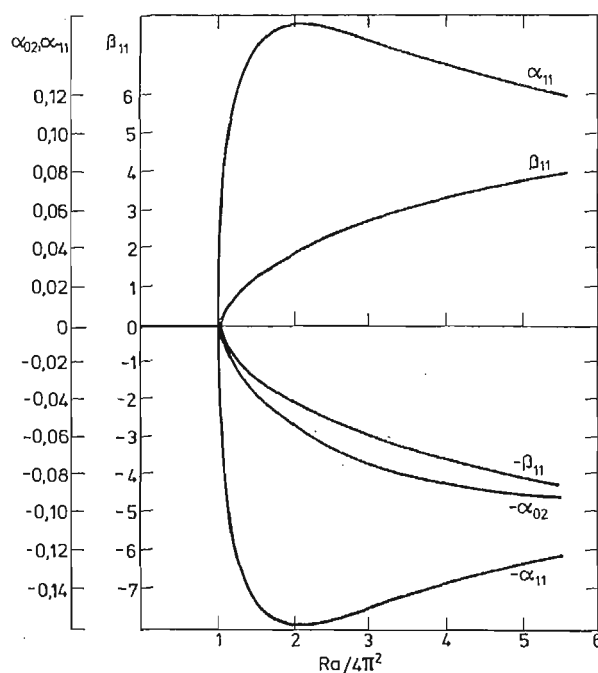
Tabela 1. Punkty state układu równań (9)

Współ- rzędne punktów	$\beta_{1,1}$	$\beta_{1,2}$	$\alpha_{0,1}$	$\alpha_{0,2}$	$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{1,2}$
0	0	0	0	0	0	0
A_1	$\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{Ra-4\pi^2}{Ra}}$	0	0	$-\frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{Ra-4\pi^2}{Ra}$	$\frac{2}{Ra} \sqrt{\frac{Ra-4\pi^2}{Ra}}$	0
A_2	$-\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{Ra-4\pi^2}{Ra}}$	0	0	$-\frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{Ra-4\pi^2}{Ra}$	$-\frac{2}{Ra} \sqrt{\frac{Ra-4\pi^2}{Ra}}$	0
B_1	$\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{7} \frac{(Ra-25\pi^2)}{Ra}}$	$\frac{1}{7\pi} \sqrt{\frac{2(5Ra+22\pi^2)}{Ra}}$	$\frac{1}{\pi Ra} \sqrt{\frac{2}{7} \frac{(Ra-25\pi^2)}{Ra}} \times (5Ra+22\pi^2)$	$-\frac{\sqrt{2}}{7\pi} \frac{Ra-25\pi^2}{Ra}$	$\frac{2}{Ra} \sqrt{\frac{2}{7} \frac{(Ra-25\pi^2)}{Ra}}$	$\frac{10}{7} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{(5Ra+22\pi^2)}{Ra}}$
B_2	$\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{7} \frac{(Ra-25\pi^2)}{Ra}}$	$-\frac{1}{7\pi} \sqrt{\frac{2(5Ra+22\pi^2)}{Ra}}$	$\frac{1}{\pi Ra} \sqrt{\frac{2}{7} \frac{(Ra-25\pi^2)}{Ra}} \times (5Ra+22\pi^2)$	$-\frac{\sqrt{2}}{7\pi} \frac{Ra-25\pi^2}{Ra}$	$-\frac{2}{Ra} \sqrt{\frac{2}{7} \frac{(Ra-25\pi^2)}{Ra}}$	$-\frac{10}{7} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{(5Ra+22\pi^2)}{Ra}}$
B_3	$\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{7} \frac{(Ra-25\pi^2)}{Ra}}$	$-\frac{1}{7\pi} \sqrt{\frac{2(5Ra+22\pi^2)}{Ra}}$	$-\frac{1}{\pi Ra} \sqrt{\frac{2}{7} \frac{(Ra-25\pi^2)}{Ra}} \times (5Ra+22\pi^2)$	$-\frac{\sqrt{2}}{7\pi} \frac{Ra-25\pi^2}{Ra}$	$\frac{2}{Ra} \sqrt{\frac{2}{7} \frac{(Ra-25\pi^2)}{Ra}}$	$-\frac{10}{7} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{(5Ra+22\pi^2)}{Ra}}$
B_4	$-\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{7} \frac{(Ra-25\pi^2)}{Ra}}$	$\frac{1}{7\pi} \sqrt{\frac{2(5Ra+22\pi^2)}{Ra}}$	$-\frac{1}{\pi Ra} \sqrt{\frac{2}{7} \frac{(Ra-25\pi^2)}{Ra}} \times (5Ra+22\pi^2)$	$-\frac{\sqrt{2}}{7\pi} \frac{Ra-25\pi^2}{Ra}$	$-\frac{2}{Ra} \sqrt{\frac{2}{7} \frac{(Ra-25\pi^2)}{Ra}}$	$\frac{10}{7} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{(5Ra+22\pi^2)}{Ra}}$

gdzie zmienne z indeksem „prim” oznaczają odchylenie od punktu stałego. Wartości własne określone są następująco

$$(11) \quad \begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -\frac{2\pi^2 + \text{Pr}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(2\pi^2 + \text{Pr})^2 + 2\text{Pr}(\text{Ra} - 4\pi^2)}, \\ \lambda_{3,4} &= -\frac{5\pi^2 + \text{Pr}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(5\pi^2 + \text{Pr})^2 + \frac{4}{5} \text{Pr}(\text{Ra} - 25\pi^2)}, \\ \lambda_5 &= -4\pi^2, \\ \lambda_6 &= -\pi^2. \end{aligned}$$

W punkcie $\text{Ra} = 4\pi^2$ wartość własna λ_1 przecina oś urojoną, zatem rozwiązanie zerowe staje się niestabilne. Jednocześnie jak było wspomniane w poprzednim punkcie pojawiają się dwa rozwiązania niezerowe (Rys. 2), odpowiadające wystąpieniu konwekcji swobodnej.



Rys. 2. Bifurkacja niezerowych rozwiązań stacjonarnych z rozwiązania trywialnego.

Stabilność gałęzi nietrywialnych w pewnym otoczeniu punktu bifurkacji można określić na podstawie twierdzenia o bifurkacji z prostej wartości własnej [12] (s. 39).

Zgodnie z twierdzeniem tym, jeżeli pochodna wartości własnej, która „powoduje” niestabilność rozwiązania zerowego po parametrze w punkcie bifurkacji jest dodatnia, to rozwidlająca się z niego gałąź nietrywialnych rozwiązań jest stabilna.

W punkcie bifurkacji $(0, 4\pi^2)$ układu równań (9) zachodzi

$$\left. \frac{d\lambda_1}{d\text{Ra}} \right|_{\text{Ra}=4\pi^2} > 0,$$

zatem gałęzie rozwiązań A_1 i A_2 są stabilne w pewnym otoczeniu wartości parametru $Ra = 4\pi^2$, a co za tym idzie, stabilny jest ruch konwekcyjny płynu dla liczb Rayleigh'a mało różniących się od $4\pi^2$.

Z postaci rozwiązań stacjonarnych A_1, A_2 (Tabela 1) wynika, że amplituda konwekcji swobodnej rośnie wraz z liczbą Rayleigh'a. Doświadczenia wykazują, że od pewnej wartości krytycznej liczby Rayleigh'a ruch płynu staje się fluktuacyjny [1], [2]. Sugeruje to, że z gałęzi A_1 (lub A_2) rozwidlają się rozwiązania okresowe.

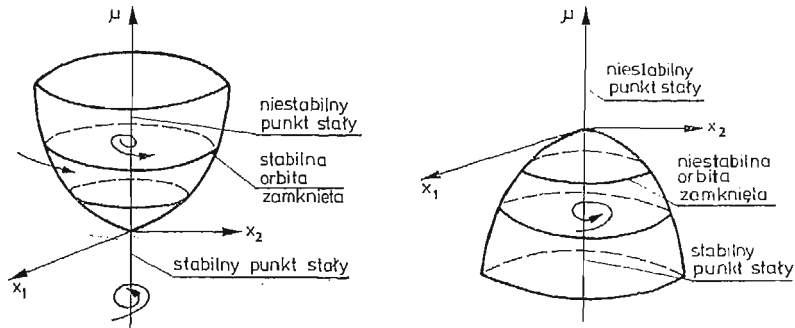
6. Stabilność rozwiązań okresowych

Przypadek rozwidlenia się z danej gałęzi rozwiązań stacjonarnych okresowego rozwiązania nazywa się bifurkacją Hopfa; ściślej punkt $(x(\mu_0), \mu_0)$ nazywa się punktem bifurkacji Hopfa układu równań różniczkowych $\dot{x} = F(x, \mu)$, jeżeli spełnione są dwa warunki

- (i) $F'_x(x(\mu_0), \mu_0)$ posiada dwie czysto urojone wartości własne
- (ii) Jeżeli $S_1(\mu)$ jest częścią rzeczywistą wartości własnej, to dla $\mu = \mu_0$ zachodzi

$$S_1(\mu_0) = 0, \quad \left. \frac{dS_1}{d\mu} \right|_{\mu=\mu_0} > 0.$$

Istnieją dwa typy bifurkacji Hopfa — superkrytyczny i subkrytyczny. W pierwszym przypadku pojawiają się stabilne rozwiązania okresowe dla wartości parametru większego od wartości krytycznej, w drugim natomiast rozwiązania okresowe są niestabilne i istnieją dla wartości parametru mniejszych od wartości krytycznej (Rys. 3). W celu określenia punktu bifurkacji Hopfa na gałęzi A_1 (lub A_2) linearyzuje się układ równań (9) w otoczeniu rozwiązania należącego do gałęzi A_1 (lub A_2).



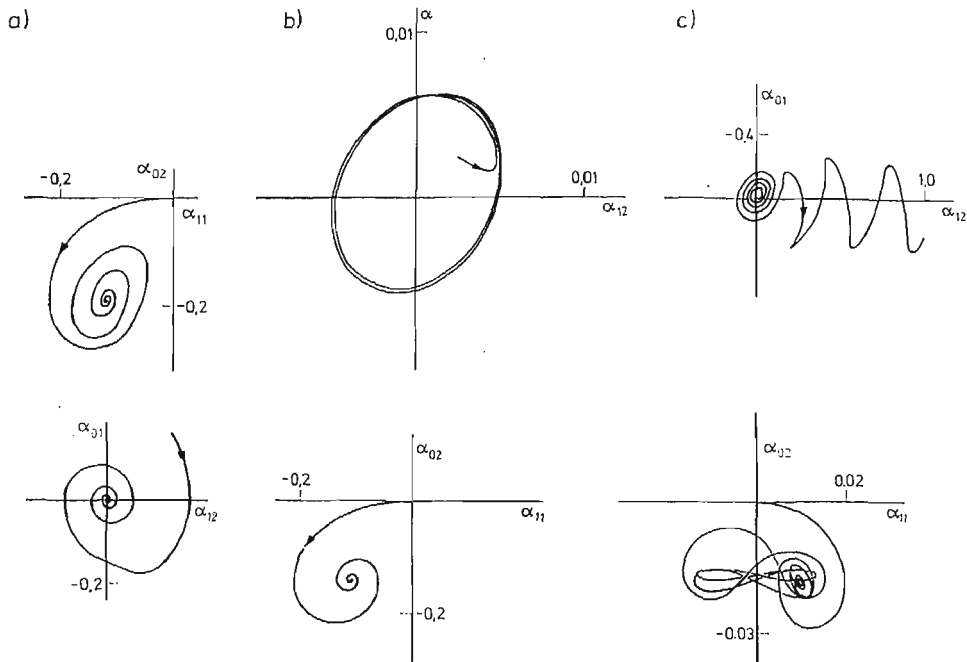
Rys. 3. Typy bifurkacji Hopfa a) superkrytyczny b) subkrytyczny.

Linearyzacja ta prowadzi do dwóch odseparowanych od siebie podukładów równań

$$(12a) \quad \begin{aligned} \frac{1}{Pr} \frac{d\beta'_{11}}{dt} &= -\beta'_{11} + \frac{Ra}{2\pi} \alpha'_{11}, \\ \frac{d\alpha'_{02}}{dt} &= -\pi^2 \sqrt{2} \alpha_{11} \beta'_{11} - 4\pi^2 \alpha'_{02} - \pi^2 \sqrt{2} \beta_{11} \alpha'_{11}, \\ \frac{d\alpha'_{11}}{dt} &= \pi(1 + \pi \cdot \sqrt{2} \alpha_{02}) \beta'_{11} + \pi^2 \cdot \sqrt{2} \beta_{11} \alpha'_{02} - 2\pi^2 \alpha'_{11}. \end{aligned}$$

$$(12b) \quad \begin{aligned} \frac{1}{Pr} \frac{d\beta'_{12}}{dt} &= -\beta'_{12} + \frac{Ra}{5\pi} \alpha'_{11}, \\ \frac{d\alpha'_{01}}{dt} &= \frac{\pi^2}{\sqrt{2}} \alpha_{11} \beta'_{12} - \pi^2 \alpha'_{01} + \frac{\pi^2}{\sqrt{2}} \beta_{11} \alpha'_{12}, \\ \frac{d\alpha'_{12}}{dt} &= \pi \beta'_{12} - \frac{\pi^2}{\sqrt{2}} \beta_{11} \alpha'_{01} - 5\pi^2 \alpha'_{12}, \end{aligned}$$

gdzie β_{11} , α_{02} , α_{11} są odpowiednimi współrzędnymi punktu stałego A_1 lub A_2 .



Rys. 4. Trajektorie rozwiązań układu równań (9) na płaszczyznach fazowych $(\alpha_{01}, \alpha_{12})$ i $(\alpha_{02}, \alpha_{11})$ dla wartości liczb Rayleigh'a a) $Ra = 24\pi^2$, b) $Ra = 30\pi^2$, c) $Ra = 36\pi^2$.

Z postaci układu równań (12a), (12b) widać, że jego równanie charakterystyczne można przedstawić w postaci iloczynu dwóch równań:

$$(13a) \quad \lambda + (6\pi^2 + Pr) \lambda^2 + 2\pi^2(Ra + 2Pr) \lambda + 4\pi^2 Pr(Ra - 4\pi^2) = 0, \quad \text{oraz}$$

$$(13b) \quad \lambda + (6\pi^2 + Pr) \lambda^2 + \left(6\pi^2 Pr + 3\pi^4 + \frac{\pi^2 Ra}{2} - \frac{Pr Ra}{5}\right) \lambda + \frac{11\pi^4}{5} Pr + \frac{\pi^2}{2} Pr Ra = 0,$$

które są równaniami charakterystycznymi podukładów równań (12a) i (12b).

Badając znaki wyróżników równań trzeciego stopnia (13a) i (13b) można łatwo wywnioskować, że oba posiadają jeden pierwiastek rzeczywisty oraz parę pierwiastków zespolonych sprzężonych. Zatem, równanie charakterystyczne zlinearyzowanego układu równań (9) spełnia warunek (i) wtedy i tylko wtedy, gdy własność tę posiada równanie (12a) albo (12b).

Równanie charakterystyczne (13a) można zapisać w postaci iloczynowej następująco

$$(14a) \quad (\lambda - S) \cdot (\lambda - \bar{S}) \cdot (\lambda - \alpha) = 0$$

gdzie:

S, \bar{S} — pierwiastki zespolone, sprzężone
 α — pierwiastek rzeczywisty.

Porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach λ w równaniach (13a) i (14a) otrzymuje się układ zależności:

$$(14b) \quad \begin{aligned} 2S_1 + \alpha &= -(6\pi^2 + \text{Pr}), \\ |S|^2 + 2\alpha S_1 &= 2\pi^2(2\text{Pr} + \text{Ra}), \\ -\alpha|S|^2 &= 4\pi^2\text{Pr}(\text{Ra} - 4\pi^2), \quad \text{gdzie } S_1 = \text{Re } S. \end{aligned}$$

Korzystając z warunku (ii) ($S_1 = 0$) wyznacza się krytyczną wartość liczby Rayleigh'a

$$(15) \quad \text{Ra} = \frac{2\text{Pr}(10\pi^2 + \text{Pr})}{\text{Pr} - 6\pi^2}$$

Zwykle dla substancji porowatych wartości osiągane przez liczbę Prandtla są bardzo duże (rzędu 10^5 - 10^9), przyjmując więc we wzorze (15), że $\text{Pr} \rightarrow \infty$ otrzymuje się $\text{Ra} \rightarrow \infty$. Podobnie przedstawiając równanie charakterystyczne (13b) w postaci iloczynowej

$$(16a) \quad (\lambda - q)(\lambda - \bar{q})(\lambda - \beta) = 0,$$

gdzie:

q, \bar{q} — pierwiastki zespolone
 β — pierwiastek rzeczywisty

oraz porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach w równaniach (13b) i (16a) otrzymuje się następujący układ zależności

$$(16b) \quad \begin{aligned} 2q_1 + \beta &= -(\text{Pr} + 6\pi^2), \\ |q|^2 + 2\beta q_1 &= 6\pi^2\text{Pr} + 3\pi^4 + \frac{\pi^2}{\sqrt{2}} \text{Ra} - \frac{1}{5} \text{Pr Ra}, \\ -\beta|q|^2 &= \frac{11}{5} \text{Pr} + \frac{1}{2} \text{Pr Ra}, \\ q_1 &= 0, \quad \text{gdzie } q_1 = \text{Re } q. \end{aligned}$$

Przyjmując w układzie (16b) $q_1 = 0$; wyznaczona z niego krytyczna wartość liczby Rayleigh'a wyraża się wzorem

$$(17) \quad \text{Ra}_R = \frac{(\text{Pr} + 6\pi^2)(6\pi^2\text{Pr} + 3\pi^4) - \frac{11}{5} \pi^4 \text{Pr}}{\frac{1}{2} \text{Pr} - (\text{Pr} + 6\pi^2) \left(\frac{1}{2} \pi^2 - \frac{1}{5} \text{Pr} \right)}.$$

Jeżeli $\text{Pr} \rightarrow \infty$ to $\text{Ra}_R \rightarrow 30\pi^2$.

Wynika stąd punkt $(A_1, 30\pi^2)$ jest punktem bifurkacji Hopfa oraz, że dla wartości parametru $\text{Ra} > 30\pi^2$ gałąź rozwiązań stacjonarnych A_1 staje się niestabilna.

Określenie typu bifurkacji Hopfa jest prostym problemem, wymaga bowiem zbadania stabilności rozwiązań okresowych. MARSDEN i McCRACKEN [11] podali algorytm, który pozwala rozstrzygnąć typ bifurkacji. W pracy [13] autorzy wykazali, korzystając z tego algorytmu, że $Ra = 30\pi^2$ jest subkrytycznym punktem bifurkacji Hopfa. Nie przytacza się tu długich i złożonych obliczeń, bowiem o typie bifurkacji można także wywnioskować na podstawie prezentowanych na rysunkach 4a, 4b, 4c rozwiązań układu równań (9). Przedstawiają one trajektorie rozwiązań na płaszczyznach fazowych $(\alpha_{01}, \alpha_{12})$ oraz $(\alpha_{02}, \alpha_{11})$ dla trzech wartości liczby Rayleigh'a $Ra = 24\pi^2, 30\pi^2, 36\pi^2$. Wynika z nich, że dla $Ra < 30\pi^2$ konwekcja swobodna jest stabilna, po przekroczeniu drugiej liczby krytycznej Rayleigh'a, ruch płynu nabiera fluktuacyjnego charakteru.

7. Zakończenie

Dokonano analizy stabilności ruchu dla dwuwymiarowej konwekcji swobodnej w warstwie porowatej. Zastosowano metodę Galerkiną obcinając nieskończone szeregi trygonometryczne do sześciu wyrazów.

Przyjmując nieskończoną wartość liczby Prandtla wykazano, że gałąź rozwiązań stacjonarnych, odpowiadających stadium początkowemu konwekcji swobodnej, traci stabilność dla wartości liczby Rayleigh'a $Ra = 30\pi^2$. W punkcie tym ma miejsce bifurkacja Hopfa do rozwiązań periodycznych. Poprzednie badania autorów [13] oraz wyniki obliczeń na maszynie analogowej wskazują, że bifurkacja ma charakter subkrytyczny. Oznacza to że rozwiązania periodyczne, które zjawiają się dla wartości liczby Rayleigh'a bliskich $30\pi^2$ muszą być niestabilne.

Mimo, że uzyskany rezultat zgadza się z wynikami badań doświadczalnych i ostatnimi rezultatami obliczeń numerycznych, problematyce tej należy poświęcić jeszcze dużo uwagi ze względu na jej podstawowe znaczenie dla analizy stabilności ruchu w ośrodkach porowatych.

Literatura cytowana w tekście

1. E. R. LAPWOOD, *Convection of a fluid in a porous medium*, Proc. Cambridge Phil. Society vol. 44 p. 508 (1948).
2. M. COMBARNOUS and B. LE FUR, *Transfert de chaleur par convection naturelle dans une couche poreuse horizontale*, C. R. Acad. Sci Paris 269 B, 1000 (1960).
3. J. P. CALTAGIRONE, M. CLOUPEAU and M. COMBARNOUS, *Convection naturelle fluctuante dans une couche poreuse horizontale*. C. R. Acad. Sci. Paris 273 B, 833 (1971).
4. R. N. HORNE, M. J. O'SULLIVAN, *Oscillatory convection in a porous medium heated from below*, J. Fluid Mechanics (1974) vol. 66 p. 2 str. 339.
5. J. M. STRAUS, *Large amplitude convection in porous media*, J. Fluid Mechanics (1974) vol. 64, p. 1, s. 51.
6. J. P. CALTAGIRONE, *Thermoconvective instabilities in a horizontal porous layer*, J. Fluid Mechanics (1975) vol. 72, p. 2, str. 269.
7. G. SCHUBERT, J. M. STRAUS, *Three — dimensional and multicellular steady and unsteady convection in fluid — saturated porous media at high Rayleigh number*, J. Fluid Mechanics (1979), vol. 94, p. 1, str. 25.

8. R. N. HORN, *Three — dimensional natural convection in a confined porous medium heated from below*, J. Fluid Mechanics vol. 92, p. 4, str. 751 (1979).
9. E. LORENZ, *Deterministic Nonperiodic Flow*, J. Atmospheris Sciences vol. 20 (1963).
10. D. RUELLE, F. TAKENS, *On the Nature of Turbulence*, Commus. math. Phys. 20 167 - 192 (1971) by Springer — Verlag (1971).
11. J. MARSDEN, M. McCRACKEN, *The Hopf Bifurcation and Its Application*, Springer-Verlag, New York (1976).
12. D. H. SATTIGER, *Group Theoretic Methods in Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, New York (1979).
13. B. BORKOWSKA, W. KORDYLEWSKI, *Stability of two dimensional Convection in a porous Layer*. Raport serii PREPRINTY 68/80 Politechnika Wroclawska, Wroclaw (1980).

Р е з ю м е

УСЛОВИЕ ПОТЕРИ СТАБИЛЬНОСТИ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ
В ПОРИСТОМ СЛОЕ

Сделана попытка анализа стабильности двухразмерной естественной конвекции в пористом слое. Применяя метод Галеркина, система двух дифференциальных частных уравнений была заменена шестью дифференциальными уравнениями. Определено область стационарных ршшений, соответствующих начальной стадии естественной конвекции. Находящаяся в этой области точка бифуркации Х. Хопфа для числа Рейли, равного $30 \pi^2$, определяет условие потерн стабильности движения жидкости в пористом слое, индуцированной с помощью градиента температуры.

S u m m a r y

LOSS OF STABILITY CONDITION FOR FREE CONVECTION IN A POROUS LAYER

A stability analysis of the two-dimensional natural convection in a porous layer has been performed. By means of Galerkin's method the system of two partial differential equations has been replaced by a system of six ordinary differential equations. The branch of steady-state solutions referring to primary stage of free convection has been determined.

The condition for stability loss of fluid motion in porous layer induced by temperature gradient is determined by the Hopf bifurcation point for Rayleigh number equal to $30\pi^2$.

POLITECHNIKA WROCLAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 listopada 1980 roku