MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
4, 19, (1981)

ZAGADNIENIE SZCZELINY W WARSTWOWEJ PŁYCIE POPRZECZNIE IZOTROPOWEJ

BOGDAN ROGOWSKI (ŁÓDŹ)

1. Wstęp

Teoretyczne badanie zagadnień mechaniki anizotropowych ciał warstwowych osłabionych szczelinami rozpoczęto w ostatnich latach. Płaskie zagadnienie szczeliny w pasmie ortotropowym złączonym z półpłaszczyznami rozwiązano w [1], a w pasmie złączonym z półpłaszczyzną w [2].

Dla anizotropowych ciał warstwowych nie zbadanymi pozostają przestrzenne i w szczególności osiowosymetryczne zagadnienia szczelin. Zagadnienie szczeliny w warstwie poprzecznie izotropowej rozpatrzono w [3] i [4], a w ciele nieograniczonym w pracach [3 - 6].

W niniejszej pracy rozwiązano zagadnienie płaskiej szczeliny kołowej, usytuowanej w płaszczyźnie środkowej warstwy poprzecznie izotropowej, złączonej z dwoma innymi poprzecznie izotropowymi warstwami identycznymi ze sobą.

2. Równania podstawowe i ich rozwiązania

Zagadnienie równowagi sprężystego, jednorodnego ciała poprzecznie izotropowego może być rozwiązane za pomocą funkcji $\varphi_\alpha(r, z)$, które w przypadku osiowej symetrii są rozwiązaniami równań

$$(\partial_r^2+r^{-1}\partial_r+s_\alpha^{-2}\partial_z^2)\varphi_\alpha = 0; \quad \alpha = 1, 2. \tag{2.1}$$

Funkcje $\varphi_\alpha(r, z)$ spełniają układ cząstkowych równań różniczkowych równowagi i określają w walcowym układzie współrzędnych (r, Θ, z) składowe wektora przemieszczenia $(u, 0, w)$ i tensora naprężenia $(\sigma_{rr}, \sigma_{\Theta\Theta}, \sigma_{zz}, 0, 0, \sigma_{rz})$ za pomocą wzorów [7]

$$u = \partial_r(k\varphi_1+\varphi_2), \qquad w = \partial_z(\varphi_1+k\varphi_2), \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz} &= G_1(k+1)\partial_z^2(s_1^{-2}\varphi_1+s_2^{-2}\varphi_2),\\
\sigma_{rz} &= G_1(k+1)\partial_{rz}^2(\varphi_1+\varphi_2),\\
\sigma_{rr} &= -G_1(k+1)\partial_z^2(\varphi_1+\varphi_2)-2Gr^{-1}\partial_r(k\varphi_1+\varphi_2),\\
\sigma_{\Theta\Theta} &= -G_1(k+1)\partial_z^2(\varphi_1+\varphi_2)-2G\partial_r^2(k\varphi_1+\varphi_2).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

W związkach (2.1), (2.2), (2.3) przyjęto dla symboli różniczkowania oznaczenia

$$\partial_r(\ldots.) = \frac{\partial(\ldots.)}{\partial r}, \quad \partial_z(\ldots.) = \frac{\partial(\ldots.)}{\partial z}.$$

Parametry s_α, k zależą od stałych materiałowych. Obliczamy je ze wzorów [7]

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= \varepsilon\left(\sqrt{\frac{\varrho+1}{2}} \pm \sqrt{\frac{\varrho-1}{2}}\right), \\ k &= \mu+\sqrt{\mu^2-1} \end{aligned} \tag{2.4}$$

w których

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \left[\frac{1}{1-\nu^2} H(1-\nu_1^2 H)\right]^{\frac{1}{4}}, \\ \varrho &= (\Gamma-\nu_1 H)\left[\frac{1-\nu}{1+\nu} H(1-\nu_1^2 H)\right]^{-\frac{1}{2}}, \\ \mu &= \Gamma\left[\nu_1 H + \frac{G_1}{E_1}(1-\nu-2\nu_1^2 H)\right]^{-1} - 1, \\ H &= \frac{E}{E_1}, \quad \Gamma = \frac{G}{G_1}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Techniczne stałe materiałowe E, ν charakteryzują właściwości sprężyste materiału w płaszczyznach z = const (izotropowe), natomiast E_1, ν_1, G_1 w kierunku osi z, równoległej do osi sprężystej symetrii materiału.

Biorąc pod uwagę nierówności jakie spełniają techniczne stałe materiałowe

$$1-\nu_1^2 \frac{E}{E_1} > 0, \quad 1-\nu-2\nu_1^2 \frac{E}{E_1} > 0, \tag{2.6}$$

stwierdzamy, że stałe ε, ϱ, μ są rzeczywiste.
Z zależności (2.5) i (2.6) wynikają nierówności

$$\varepsilon > 0, \quad \varrho \gtreqless 0, \quad \mu > -1,$$

zaś z równań (2.4) zależności

$$\begin{aligned} \alpha &= s_1+s_2 = \varepsilon\sqrt{2(\varrho+1)}, \\ \beta &= s_1-s_2 = \varepsilon\sqrt{2(\varrho-1)}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

W przypadku $\varrho \geqslant -1$ parametr α jest rzeczywisty dodatni bądź równy zeru, dla $\varrho < -1$ przyjmuje wartość urojoną. Współczynnik β jest rzeczywisty dodatni dla $\varrho > 1$, równy zeru dla $\varrho = 1$ i urojony dla $\varrho < 1$.

W przypadku $\varrho > -1$, tj. gdy spełnione są nierówności

$$\frac{G}{G_1} > \nu_1 \frac{E}{E_1} = \nu_2 \quad \text{lub} \quad -1 < \varrho < 0, \tag{2.8}$$

co najmniej jeden z parametrów α, β jest liczbą rzeczywistą. Rzeczywiste materiały mają takie właściwości, że ich stałe sprężystości spełniają alternatywę (2.8) (na przykład kompozyty). Teoretycznie mogą występować również takie materiały dla których $\varrho < -1$ i wówczas parametry α, β przyjmują wartości urojone $\alpha = i\hat{\alpha}$, $\beta = i\hat{\beta}$ ($\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ — rzeczywiste).

Jeżeli wykonamy transformację Hankela w równaniu (2.1), to stwierdzamy, że funkcje

$$\Phi_\alpha(\xi, z) = \mathscr{H}_\nu\{\varphi_\alpha(r, z); r \to \xi\} = \int_0^\infty r\varphi_\alpha(r, z)J_\nu(\xi r)dr, \tag{2.9}$$

spełniają równania

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - s_\alpha^2\xi^2\right)\Phi_\alpha = 0; \qquad \alpha = 1, 2. \tag{2.10}$$

W zależności (2.9) $\mathscr{H}_\nu$ oznacza operator transformacji Hankela rzędu ν zdefiniowany za pomocą $J_\nu(\xi r)$, funkcji Bessela pierwszego rodzaju i rzędu ν.

Przechodząc w rozwiązaniach równań (2.10) do oryginałów otrzymujemy funkcje przemieszczeń $\varphi_\alpha(r, z)$, które zapisano w postaci

$$\varphi_\alpha(r, z) = \frac{s_{\alpha\pm1}}{G_1(k+1)(s_1-s_2)} \mathscr{H}_0\{\xi^{-2}[A_\alpha(\xi)\operatorname{sh}s_\alpha\xi z + \\ + B_\alpha(\xi)\operatorname{ch}s_\alpha\xi z]; \xi \to r\}; \quad \alpha = 1, 2 \text{ (nie sumowane)}, \tag{2.11}$$

gdzie $A_\alpha(\xi)$, $B_\alpha(\xi)$ $(\alpha = 1, 2)$ są nieznanymi funkcjami parametru transformacji ξ.

Pola przemieszczeń i naprężeń określimy jeżeli uwzględnimy zależności (2.11) w związkach (2.2) i (2.3).

Otrzymujemy wzory

$$u(r, z) = -\frac{1}{G_1(k+1)(s_1-s_2)} \mathscr{H}_1\{\xi^{-1}[ks_2(A_1\operatorname{sh}s_1\xi z + B_1\operatorname{ch}s_1\xi z) + \\ + s_1(A_2\operatorname{sh}s_2\xi z + B_2\operatorname{ch}s_2\xi z)]; \xi \to r\}, \tag{2.12}$$

$$w(r, z) = \frac{s_1 s_2}{G_1(k+1)(s_1-s_2)} \mathscr{H}_0\{\xi^{-1}[A_1\operatorname{ch}s_1\xi z + B_1\operatorname{sh}s_1\xi z + \\ + k(A_2\operatorname{ch}s_2\xi z + B_2\operatorname{sh}s_2\xi z)]; \xi \to r\}, \tag{2.13}$$

$$\sigma_{zz}(r, z) = \frac{1}{s_1-s_2} \mathscr{H}_0\{[s_2(A_1\operatorname{sh}s_1\xi z + B_1\operatorname{ch}s_1\xi z) + \\ + s_1(A_2\operatorname{sh}s_2\xi z + B_2\operatorname{ch}s_2\xi z)]; \xi \to r\}, \tag{2.14}$$

$$\sigma_{rz}(r, z) = -\frac{s_1 s_2}{s_1-s_2} \mathscr{H}_1\{(A_1\operatorname{ch}s_1\xi z + B_1\operatorname{sh}s_1\xi z + \\ + A_2\operatorname{ch}s_2\xi z + B_2\operatorname{sh}s_2\xi z); \xi \to r\}, \tag{2.15}$$

$$\sigma_{rr}(r, z) = -\frac{s_1 s_2}{s_1-s_2} \mathscr{H}_0\{s_1(A_1\operatorname{sh}s_1\xi z + B_1\operatorname{ch}s_1\xi z) + \\ + s_2(A_2\operatorname{sh}s_2\xi z + B_2\operatorname{ch}s_2\xi z); \xi \to r\} - 2G\frac{u(r, z)}{r}, \tag{2.16}$$

$$\sigma_{\Theta\Theta}(r, z) = -\frac{s_1 s_2}{s_1-s_2} \mathscr{H}_0\{s_1(A_1\operatorname{sh}s_1\xi z + B_1\operatorname{ch}s_1\xi z) + s_2(A_2\operatorname{sh}s_2\xi z + \\ + B_2\operatorname{ch}s_2\xi z); \xi \to r\} + 2G\frac{u(r, z)}{r} + \frac{2}{k+1}\cdot\frac{1}{s_1-s_2}\cdot\frac{G}{G_1} \mathscr{H}_0\{ks_2(A_1\operatorname{sh}s_1\xi z + \\ + B_1\operatorname{ch}s_1\xi z) + s_1(A_2\operatorname{sh}s_2\xi z + B_2\operatorname{ch}s_2\xi z); \xi \to r\}. \tag{2.17}$$

3. Zagadnienie, jego warunki brzegowe i równania całkowe

Rozpatrzymy liniowo sprężystą, poprzecznie izotropową, nieograniczoną płytę złożoną z trzech warstw o grubościach h_2, $2h_1$, h_2 ze szczeliną kołową o promieniu a.

Szczelina usytuowana jest symetrycznie względem swobodnych brzegów płyty i początku przyjętego walcowego układu współrzędnych (r', Θ, z').

Płyta zajmuje obszary:

$$\Omega_{\mathrm{I}} = \{(r', \Theta, z'): 0 \leqslant r' < \infty, 0 \leqslant \Theta \leqslant 2\pi, |z'| \leqslant h_1\}. \quad \text{i}$$

$$\Omega_{\mathrm{II}} = \{(r', \Theta, z'): 0 \leqslant r' < \infty, 0 \leqslant \Theta \leqslant 2\pi, h_1 \leqslant |z'| \leqslant h = h_1+h_2\},$$

wypełnione materiałami poprzecznie izotropowymi o technicznych stałych, odpowiednio, $E_{\mathrm{I}}, \nu_{\mathrm{I}}, E_{1\mathrm{I}}, \nu_{1\mathrm{I}}, G_{1\mathrm{I}}$ i $E_{\mathrm{II}}, \nu_{\mathrm{II}}, E_{1\mathrm{II}}, \nu_{1\mathrm{II}}, G_{1\mathrm{II}}$.

Stałe te określają zgodnie z wzorami (2.4), (2.5) parametry materiałowe warstw, odpowiednio, $s_{1\mathrm{I}}, s_{2\mathrm{I}}, k_{\mathrm{I}}$ i $s_{1\mathrm{II}}$, $s_{2\mathrm{II}}$, k_{II}.

Szczelina jest obciążona wewnętrznym ciśnieniem $p(r')$ o rozkładzie osiowo symetrycznym.

Pola przemieszczeń $(u_i, 0, w_i)$ $(i = \mathrm{I}, \mathrm{II})$ i naprężeń $(\sigma_{rri}, \sigma_{\Theta\Theta i}, \sigma_{zzi}, \sigma_{rzi})$, występujące w materiałach wypełniających warstwy, dane są za pomocą wzorów o postaci (2.12)—(2.17), w których należy wprowadzić współrzędne r', Θ, z' i parametr transformacji ξ'.

Wprowadzimy współrzędne bezwymiarowe r, z, ξ takie, że $r' = ra$ $z' = za$, $\xi' = \xi/a$. W tych współrzędnych promień szczeliny ma jednostkową długość oraz $h_1 = a\delta_1, h_2 = a\delta_2, h = h_1+h_2 = a\delta$. Rozwiązania w obszarze Ω_{I} otrzymamy z równań (2.12)—(2.17) przez formalną zamianę s_1, s_2, k, G G_1 na $s_{1\mathrm{I}}, s_{2\mathrm{I}}, k_{\mathrm{I}}, G_{\mathrm{I}}, G_{1\mathrm{I}}$, a rozwiązania w obszarze Ω_{II} z tych samych równań zamieniając odpowiednio $A_\alpha(\xi)$, $B_\alpha(\xi)$, s_α, k, G, G_1 na $C_\alpha(\xi)$ $D_\alpha(\xi)$ $s_{\alpha\mathrm{II}}, k_{\mathrm{II}}, G_{\mathrm{II}}$, $G_{1\mathrm{II}}$. W warstwie zewnętrznej zastąpimy zmienną z przez $z-\delta_1$. Wprowadzona zamiana zmiennych prowadzi do pomnożenia prawych stron równań opisujących przemieszczenia przez a^{-1} i prawych stron równań dla naprężeń przez a^{-2}.

Dzięki symetrii zagadnienie sprowadza się do znalezienia fizycznych wielkości w obszarze $\Omega = \{(r, z): r \geqslant 0, \ 0 \leqslant z \leqslant \delta\}$.

Poszukiwane funkcje muszą spełniać odpowiednie warunki mieszane dla $z = 0$, warunki brzegowe dla $z = \delta$ i warunki ciągłości dla $z = \delta_1$.

Z warunków tych wyznaczymy funkcje parametru transformacji $A_\alpha(\xi)$, $B_\alpha(\xi)$, $C_\alpha(\xi)$, $D_\alpha(\xi)$.

Warunki brzegowe mają tu postać

$$\sigma_{zz\mathrm{II}}(r, \delta) = 0; \quad r \geqslant 0, \tag{3.1}$$

$$\sigma_{zr\mathrm{II}}(r, \delta) = 0; \quad r \geqslant 0. \tag{3.2}$$

W płaszczyźnie $z = 0$ mamy warunki brzegowe mieszanego typu

$$\sigma_{zr\mathrm{I}}(r, 0) = 0; \quad r \geqslant 0, \tag{3.3}$$

$$\sigma_{zz\mathrm{I}}(r, 0) = -p(r); \quad 0 \leqslant r \leqslant 1, \tag{3.4}$$

$$w_{\mathrm{I}}(r, 0) = 0; \quad r \geqslant 1. \tag{3.5}$$

Warunki ciągłości są postaci

$$\llbracket u_i(r, \delta_1) \rrbracket_{\mathrm{I}}^{\mathrm{II}} = \llbracket w_i(r, \delta_1) \rrbracket_{\mathrm{I}}^{\mathrm{II}} = 0; \quad r \geqslant 0, \tag{3.6}$$

$$\llbracket \sigma_{zzi}(r, \delta_1) \rrbracket_{\mathrm{I}}^{\mathrm{II}} = \llbracket \sigma_{zri}(r, \delta_1) \rrbracket_{\mathrm{I}}^{\mathrm{II}} = 0; \quad r \geqslant 0, \tag{3.7}$$

gdzie $\llbracket f_i \rrbracket_{\mathrm{I}}^{\mathrm{II}}$ oznacza skok funkcji f_i przy przejściu z warstwy I do warstwy II.

Z zależności (2.12) - (2.15) otrzymujemy

$$u_{\mathrm{I}}(r, z) = -\frac{1}{G_{1\mathrm{I}}a(k_{\mathrm{I}}+1)(s_{1\mathrm{I}}-s_{2\mathrm{I}})} \mathscr{H}_1\{\xi^{-1}[k_{\mathrm{I}}s_{2\mathrm{I}}(A_1 \operatorname{sh} s_{1\mathrm{I}}\xi z + B_1 \operatorname{ch} s_{1\mathrm{I}}\xi z) + s_{1\mathrm{I}}(A_2 \operatorname{sh} s_{2\mathrm{I}}\xi z + B_2 \operatorname{ch} s_{2\mathrm{I}}\xi z)]; \xi \to r\}, \tag{3.8}$$

$$w_{\mathrm{I}}(r, z) = \frac{s_{1\mathrm{I}}s_{2\mathrm{I}}}{G_{1\mathrm{I}}a(k_{\mathrm{I}}+1)(s_{1\mathrm{I}}-s_{2\mathrm{I}})} \mathscr{H}_0\{\xi^{-1}[A_1 \operatorname{ch} s_{1\mathrm{I}}\xi z + B_1 \operatorname{sh} s_{1\mathrm{I}}\xi z + k_{\mathrm{I}}(A_2 \operatorname{ch} s_{2\mathrm{I}}\xi z + B_2 \operatorname{sh} s_{2\mathrm{I}}\xi z)]; \xi \to r\}, \tag{3.9}$$

$$\sigma_{zz\mathrm{I}}(r, z) = \frac{1}{(s_{1\mathrm{I}}-s_{2\mathrm{I}})a^2} \mathscr{H}_0\{[s_{2\mathrm{I}}(A_1 \operatorname{sh} s_{1\mathrm{I}}\xi z + B_1 \operatorname{ch} s_{1\mathrm{I}}\xi z) + s_{1\mathrm{I}}(A_2 \operatorname{sh} s_{2\mathrm{I}}\xi z + B_2 \operatorname{ch} s_{2\mathrm{I}}\xi z)]; \xi \to r\}, \tag{3.10}$$

$$\sigma_{zr\mathrm{I}}(r, z) = -\frac{s_{1\mathrm{I}}s_{2\mathrm{I}}}{(s_{1\mathrm{I}}-s_{2\mathrm{I}})a^2} \mathscr{H}_1\{(A_1 \operatorname{ch} s_{1\mathrm{I}}\xi z + B_1 \operatorname{sh} s_{1\mathrm{I}}\xi z + A_2 \operatorname{ch} s_{2\mathrm{I}}\xi z + B_2 \operatorname{sh} s_{2\mathrm{I}}\xi z); \xi \to r\}, \tag{3.11}$$

gdy $(r, z) \in \Omega_{\mathrm{I}}$ oraz

$$u_{\mathrm{II}}(r, z) = -\frac{1}{G_{1\mathrm{II}}a(k_{\mathrm{II}}+1)(s_{1\mathrm{II}}-s_{2\mathrm{II}})} \mathscr{H}_1\{\xi^{-1}[k_{\mathrm{II}}s_{2\mathrm{II}}(C_1 \operatorname{sh} s_{1\mathrm{II}}\xi(z-\delta_1) + D_1 \operatorname{ch} s_{1\mathrm{II}}\xi(z-\delta_1)) + s_{1\mathrm{II}}(C_2 \operatorname{sh} s_{2\mathrm{II}}\xi(z-\delta_1) + D_2 \operatorname{ch} s_{2\mathrm{II}}\xi(z-\delta_1))]; \xi \to r\}, \tag{3.12}$$

$$w_{\mathrm{II}}(r, z) = \frac{s_{1\mathrm{II}}s_{2\mathrm{II}}}{G_{1\mathrm{II}}a(k_{\mathrm{II}}+1)(s_{1\mathrm{II}}-s_{2\mathrm{II}})} \mathscr{H}_0\{\xi^{-1}[C_1 \operatorname{ch} s_{1\mathrm{II}}\xi(z-\delta_1) + D_1 \operatorname{sh} s_{1\mathrm{II}}\xi(z-\delta_1) + k_{\mathrm{II}}(C_2 \operatorname{ch} s_{2\mathrm{II}}\xi(z-\delta_1) + D_2 \operatorname{sh} s_{2\mathrm{II}}\xi(z-\delta_1))]; \xi \to r\}, \tag{3.13}$$

$$\sigma_{zz\mathrm{II}}(r, z) = \frac{1}{(s_{1\mathrm{II}}-s_{2\mathrm{II}})a^2} \mathscr{H}_0\{[s_{2\mathrm{II}}(C_1 \operatorname{sh} s_{1\mathrm{II}}\xi(z-\delta_1) + D_1 \operatorname{ch} s_{1\mathrm{II}}\xi(z-\delta_1)) + s_{1\mathrm{II}}(C_2 \operatorname{sh} s_{2\mathrm{II}}\xi(z-\delta_1) + D_2 \operatorname{ch} s_{2\mathrm{II}}\xi(z-\delta_1))]; \xi \to r\}, \tag{3.14}$$

$$\sigma_{zr\mathrm{II}}(r, z) = -\frac{s_{1\mathrm{II}}s_{2\mathrm{II}}}{(s_{1\mathrm{II}}-s_{2\mathrm{II}})a^2} \mathscr{H}_1\{[C_1 \operatorname{ch} s_{1\mathrm{II}}\xi(z-\delta_1) + D_1 \operatorname{sh} s_{1\mathrm{II}}\xi(z-\delta_1) + C_2 \operatorname{ch} s_{2\mathrm{II}}\xi(z-\delta_1) + D_2 \operatorname{sh} s_{2\mathrm{II}}\xi(z-\delta_1)]; \xi \to r\}, \tag{3.15}$$

dla $(r, z) \in \Omega_{\mathrm{II}}$.

W szczególności dla $z = 0$ otrzymujemy z (3.9), (3.10), (3.11)

$$w_{\mathrm{I}}(r, 0) = \frac{s_{1\mathrm{I}}s_{2\mathrm{I}}}{G_{1\mathrm{I}}a(k_{\mathrm{I}}+1)(s_{1\mathrm{I}}-s_{2\mathrm{I}})} \mathscr{H}_0\{\xi^{-1}[A_1(\xi) + k_{\mathrm{I}}A_2(\xi)]; r\}, \tag{3.16}$$

$$\sigma_{zz\mathrm{I}}(r, 0) = \frac{1}{(s_{1\mathrm{I}}-s_{2\mathrm{I}})a^2} \mathscr{H}_0\{[s_{2\mathrm{I}}B_1(\xi) + s_{1\mathrm{I}}B_2(\xi)]; r\}, \tag{3.17}$$

$$\sigma_{zr\mathrm{I}}(r, 0) = -\frac{s_{1\mathrm{I}}s_{2\mathrm{I}}}{(s_{1\mathrm{I}}-s_{2\mathrm{I}})a^2} \mathscr{H}_1\{[A_1(\xi) + A_2(\xi)]; r\}. \tag{3.18}$$

Z warunku brzegowego (3.3) i zależności (3.18) otrzymujemy

$$A_1(\xi) = -A_2(\xi) = -f(\xi), \tag{3.19}$$

gdzie $f(\xi)$ jest nieznaną funkcją.

Równania ciągłości pola przemieszczeń i naprężeń dane za pomocą wzorów (3.6) i (3.7) przechodzą, po uwzględnieniu zależności (3.8) - (3.15), w układ równań algebraicznych, z którego możemy wyznaczyć $C_\alpha(\xi)$, $D_\alpha(\xi)$ za pomocą $B_\alpha(\xi)$ i $f(\xi)$.

Otrzymujemy

$$\begin{aligned}
C_1(\xi) &= \frac{1}{k_{II}-1}\cdot\frac{\beta_2}{\beta_1}\cdot\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^2\{f(\xi)[(g-k_{II})\operatorname{ch}s_{1I}\xi\delta_1-(gk_I-k_{II})\operatorname{ch}s_{2I}\xi\delta_1]-\\
&\quad -[B_2(gk_I-k_{II})\operatorname{sh}s_{2I}\xi\delta_1+B_1(g-k_{II})\operatorname{sh}s_{1I}\xi\delta_1]\},\\
C_2(\xi) &= \frac{1}{k_{II}-1}\cdot\frac{\beta_2}{\beta_1}\cdot\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^2\{f(\xi)[(gk_I-1)\operatorname{ch}s_{2I}\xi\delta_1-(g-1)\operatorname{ch}s_{1I}\xi\delta_1]+\\
&\quad +B_2(gk_I-1)\operatorname{sh}s_{2I}\xi\delta_1+B_1(g-1)\operatorname{sh}s_{1I}\xi\delta_1\},\\
D_1(\xi) &= \frac{1}{k_{II}-1}\cdot\frac{\beta_2}{\beta_1}\cdot\frac{1}{s_{2II}}\{f(\xi)[s_{1I}(g-1)\operatorname{sh}s_{2I}\xi\delta_1-s_{2I}(gk_I-1)\operatorname{sh}s_{1I}\xi\delta_1]+\\
&\quad +B_2s_{1I}(g-1)\operatorname{ch}s_{2I}\xi\delta_1+B_1s_{2I}(gk_I-1)\operatorname{ch}s_{1I}\xi\delta_1\},\\
D_2(\xi) &= \frac{1}{k_{II}-1}\cdot\frac{\beta_2}{\beta_1}\cdot\frac{1}{s_{1II}}\{f(\xi)[s_{2I}(gk_I-k_{II})\operatorname{sh}s_{1I}\xi\delta_1-s_{1I}(g-k_{II})\operatorname{sh}s_{2I}\xi\delta_1]-\\
&\quad -[B_2s_{1I}(g-k_{II})\operatorname{ch}s_{2I}\xi\delta_1+B_1s_{2I}(gk_I-k_{II})\operatorname{ch}s_{1I}\xi\delta_1]\},
\end{aligned}\tag{3.20}$$

gdzie

$$\begin{gathered}
g = \frac{G_{1II}}{G_{1I}}\cdot\frac{k_{II}+1}{k_I+1},\\
\beta_2 = s_{1II}-s_{2II},\\
\beta_1 = s_{1I}-s_{2I},\\
\varepsilon_1^2 = s_{1I}s_{2I},\quad \varepsilon_2^2 = s_{1II}s_{2II}.
\end{gathered}\tag{3.21}$$

Warunki brzegowe (3.1) i (3.2), po uwzględnieniu (3.14) i (3.15) i wykorzystaniu (3.20), prowadzą do układu równań algebraicznych, z których możemy wyznaczyć $B_\alpha(\xi)$ za pomocą nieznanej funkcji $f(\xi)$.

Rozwiązanie tego układu ma postać

$$B_1(\xi) = f(\xi)\frac{l_1(x)}{m(x)},\quad B_2(\xi) = f(\xi)\frac{l_2(x)}{m(x)};\quad (x = \xi\delta), \tag{3.22}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
l_1(x) &= (a_1+a_5)\operatorname{ch}x(\alpha_1\eta_1+\beta_2\eta_2)-(a_1-a_5)\operatorname{ch}x(\alpha_1\eta_1-\beta_2\eta_2)-\\
&\quad -(a_2+a_6)\operatorname{ch}x(\beta_1\eta_1+\beta_2\eta_2)+(a_2-a_6)\operatorname{ch}x(\beta_1\eta_1-\beta_2\eta_2)+\\
&\quad +(a_3+a_7)\operatorname{ch}x(\alpha_1\eta_1+\alpha_2\eta_2)-(a_3-a_7)\operatorname{ch}x(\alpha_1\eta_1-\alpha_2\eta_2)-\\
&\quad -(a_4+a_8)\operatorname{ch}x(\beta_1\eta_1+\alpha_2\eta_2)+(a_4-a_8)\operatorname{ch}x(\beta_1\eta_1-\alpha_2\eta_2)+\\
&\quad +a_9\operatorname{ch}x\alpha_1\eta_1+a_{10}\operatorname{ch}x\beta_1\eta_1-a_{11}\operatorname{ch}x\alpha_2\eta_2+a_{12}\operatorname{ch}x\beta_2\eta_2+a_0,
\end{aligned}\tag{3.23}$$

$$l_2(x) = -(a_1+a_5)\operatorname{ch}x(\alpha_1\eta_1+\beta_2\eta_2)+(a_1-a_5)\operatorname{ch}x(\alpha_1\eta_1-\beta_2\eta_2)- \\ -(a_2+a_6)\operatorname{ch}x(\beta_1\eta_1+\beta_2\eta_2)+(a_2-a_6)\operatorname{ch}x(\beta_1\eta_1-\beta_2\eta_2)- \\ -(a_3+a_7)\operatorname{ch}x(\alpha_1\eta_1+\alpha_2\eta_2)+(a_3-a_7)\operatorname{ch}x(\alpha_1\eta_1-\alpha_2\eta_2)- \\ -(a_4+a_8)\operatorname{ch}x(\beta_1\eta_1+\alpha_2\eta_2)+(a_4-a_8)\operatorname{ch}x(\beta_1\eta_1-\alpha_2\eta_2)- \\ -a_9\operatorname{ch}x\alpha_1\eta_1+a_{10}\operatorname{ch}x\beta_1\eta_1-a'_{11}\operatorname{ch}x\alpha_2\eta_2+a'_{12}\operatorname{ch}x\beta_2\eta_2+a'_0, \tag{3.24}$$

$$m(x) = (a_1+a_5)\operatorname{sh}x(\alpha_1\eta_1+\beta_2\eta_2)-(a_1-a_5)\operatorname{sh}x(\alpha_1\eta_1-\beta_2\eta_2)- \\ -(a_2+a_6)\operatorname{sh}x(\beta_1\eta_1+\beta_2\eta_2)+(a_2-a_6)\operatorname{sh}x(\beta_1\eta_1-\beta_2\eta_2)+ \\ +(a_3+a_7)\operatorname{sh}x(\alpha_1\eta_1+\alpha_2\eta_2)-(a_3-a_7)\operatorname{sh}x(\alpha_1\eta_1-\alpha_2\eta_2)- \\ -(a_4+a_8)\operatorname{sh}x(\beta_1\eta_1+\alpha_2\eta_2)+(a_4-a_8)\operatorname{sh}x(\beta_1\eta_1-\alpha_2\eta_2)+ \\ +a_9\operatorname{sh}x\alpha_1\eta_1+a_{10}\operatorname{sh}x\beta_1\eta_1, \tag{3.25}$$

$$\left(\eta_1 = \frac{\delta_1}{\delta},\ \eta_2 = \frac{\delta_2}{\delta},\ x = \xi\delta\right).$$

Występujące we wzorach (3.23), (3.24) i (3.25) współczynniki a_i obliczamy za pomocą wzorów

$$\begin{aligned} a_{1,2} &= \alpha_2 g(k_{II}-1)(k_I-1)(s_{1I}s_{2I}\mp s_{1II}s_{2II}), \\ a_{3,4} &= -\beta_2 g(k_{II}-1)(k_I-1)(s_{1I}s_{2I}\pm s_{1II}s_{2II}), \\ a_{5,6} &= \alpha_2\{s_{2I}[s_{2II}(gk_I-k_{II})^2+s_{1II}(gk_I-1)^2]\mp s_{1I}[s_{1II}(g-1)^2+s_{2II}(g-k_{II})^2]\}, \\ a_{7,8} &= \beta_2\{s_{2I}[s_{2II}(gk_I-k_{II})^2-s_{1II}(gk_I-1)^2]\pm s_{1I}[s_{1II}(g-1)^2-s_{2II}(g-k_{II})^2]\}, \\ a_{9,10} &= 8s_{1II}s_{2II}[s_{1I}(g-k_{II})(g-1)\mp s_{2I}(gk_I-1)(gk_I-k_{II})], \\ a_{11,12} &= 4\binom{\beta_2}{\alpha_2}s_{1I}[s_{1II}(gk_I-1)(g-1)\mp s_{2II}(g-k_{II})(gk_I-k_{II})], \\ a_0 &= -8s_{1II}s_{2II}s_{1I}[(gk_I-k_{II})(g-1)+(g-k_{II})(gk_I-1)], \\ a'_{11,12} &= s_{2I}s_{1I}^{-1}a_{11,12}, \\ a'_0 &= s_{2I}s_{1I}^{-1}a_0, \end{aligned} \tag{3.26}$$

w których

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= s_{1I}+s_{2I}, & \alpha_2 &= s_{1II}+s_{2II}, \\ \beta_1 &= s_{1I}-s_{2I}, & \beta_2 &= s_{1II}-s_{2II}. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Z zależności (3.22) obliczymy kombinację stałych $B_1(\xi)$ i $B_2(\xi)$

$$\frac{s_{2I}}{s_{1I}-s_{2I}}B_1(\xi)+\frac{s_{1I}}{s_{1I}-s_{2I}}B_2(\xi) = -f(\xi)\frac{l(x)}{m(x)}, \quad (x = \xi\delta). \tag{3.28}$$

Funkcja $l(x)$ jest odpowiednią kombinacją funkcji $l_1(x)$ i $l_2(x)$. Określona jest ona wzorem

$$l(x) = (a_1+a_5)\operatorname{ch}x(\alpha_1\eta_1+\beta_2\eta_2)-(a_1-a_5)\operatorname{ch}x(\alpha_1\eta_1-\beta_2\eta_2)+ \\ +(a_2^*+a_6^*)\operatorname{ch}x(\beta_1\eta_1+\beta_2\eta_2)-(a_2^*-a_6^*)\operatorname{ch}x(\beta_1\eta_1-\beta_2\eta_2)+ \\ +(a_3+a_7)\operatorname{ch}x(\alpha_1\eta_1+\alpha_2\eta_2)-(a_3-a_7)\operatorname{ch}x(\alpha_1\eta_1-\alpha_2\eta_2)+ \\ +(a_4^*+a_8^*)\operatorname{ch}x(\beta_1\eta_1+\alpha_2\eta_2)-(a_4^*-a_8^*)\operatorname{ch}x(\beta_1\eta_1-\alpha_2\eta_2)+ \\ +a_9\operatorname{ch}x\alpha_1\eta_1-a_{10}^*\operatorname{ch}x\beta_1\eta_1+2a_{11}^*\operatorname{ch}x\alpha_2\eta_2-2a_{12}^*\operatorname{ch}x\beta_2\eta_2-2a_0^*, \tag{3.29}$$

gdzie

$$a_i^* = \alpha_1\beta_1^{-1}a_i; \quad i = 2, 4, 6, 8, 10,$$
(3.30)
$$a_k^* = s_{21}\beta_1^{-1}a_k; \quad k = 0, 11, 12,$$

przy czym a_i, a_k dane są za pomocą wzorów (3.26).

Wprowadzimy funkcję $M(x)(x = \xi\delta)$ taką, że

(3.31) $$M(x) = 1 - \frac{l(x)}{m(x)}; \quad (x = \xi\delta),$$

gdzie funkcja $l(x)$ jest określona wzorem (3.29), a funkcja $\dot{m}(x)$ za pomocą wzoru (3.25).

Podstawienie zależności (3.19) do wzoru (3.16) i wykorzystanie reguły transformacji Hankela prowadzi do określenia przemieszczeń punktów leżących w płaszczyźnie zawierającej szczelinę

(3.32) $$w_1(r, 0) = \frac{\varkappa}{a}\int_0^\infty f(\xi)J_0(\xi r)d\xi,$$

gdzie

(3.33) $$\varkappa = \frac{s_{11}s_{21}(k_1-1)}{G_{11}(k_1+1)(s_{11}-s_{21})}$$

jest parametrem materiałowym.

Naprężenia występujące w tych punktach określimy ze wzoru (3.17) podstawiając (3.28) i uwzględniając (3.31)

(3.34) $$\sigma_{zz1}(r, 0) = -\frac{1}{a^2}\int_0^\infty \xi[1-M(\xi\delta)]J_0(\xi r)f(\xi)d\xi.$$

Funkcje parametru transformacji $A_\alpha(\xi)$, $B_\alpha(\xi)$, $C_\alpha(\xi)$, $D_\alpha(\xi)$ zostały określone za pomocą nieznanej funkcji $f(\xi)$ i wzorów (3.19), (3.20), (3.22).

Za pomocą funkcji $f(\xi)$ możemy określić przemieszczenia i naprężenia w materiałach wypełniających warstwy rozpatrywanej płyty niejednorodnej, wykorzystując w tym celu zależności (3.8) - (3.15) i wzory jakie otrzymamy dla $\sigma_{rri}(r, z)$, $\sigma_{\Theta\Theta i}(r, z)$ ze związków (2.16) i (2.17).

Realizacja mieszanych warunków brzegowych (3.4), (3.5) prowadzi do równań względem nieznanej funkcji $f(\xi)$. Jeżeli w tych warunkach uwzględnimy zależności (3.32) i (3.34), to otrzymujemy równania

(3.35) $$\int_0^\infty f(\xi)\xi[1-M(\xi\delta)]J_0(\xi r)d\xi = p(r)a^2; \quad 0 \leqslant r \leqslant 1,$$

(3.36) $$\int_0^\infty f(\xi)J_0(\xi r)d\xi = 0; \quad r \geqslant 1.$$

Rozpatrywane zagadnienie zostało sprowadzone do dualnych równań całkowych (3.35), (3.36), z których wyznaczymy nieznaną funkcję $f(\xi)$, określającą poszukiwane fizyczne wielkości. Funkcja $M(\xi\delta)$, występująca w równaniu (3.35) i dana za pomocą wzorów (3.31), (3.29), (3.25) jest zależna od stałych materiałowych warstw i stosunku ich grubości. Funkcja ta zależy także od parametru δ, określającego stosunek grubości płyty h do promienia szczeliny a.

Gdy właściwości sprężyste warstw są identyczne, to ze wzorów (3.26), (3.27), (3.30) otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
&a_1 = a_4 = a_5 = a_8 = a_9 = a_{10} = a_{11} = a_{12} = 0\\
&a_4^* = a_8^* = a_{10}^* = a_{11}^* = a_{12}^* = 0\\
&a_2 = a_6 = 2s_1s_2\alpha(k-1)^2.\\
&a_3 = a_7 = -2s_1s_2\beta(k-1)^2,\\
&a_2^* = a_6^* = 2s_1s_2\alpha^2\beta^{-1}(k-1)^2,\\
&a_0^* = 8s_1^2s_2^2\beta^{-1}(k-1)^2.
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

Uwzględniając zależności (3.37) w związkach (3.25) i (3.29), a te w (3.31) otrzymujemy postać funkcji $M(x)$ dla warstwy jednorodnej [3]

$$
M(x) = 1 - \frac{\operatorname{ch}\alpha x - \alpha^2\beta^{-2}\operatorname{ch}\beta x + 4s_1s_2\beta^{-2}}{\operatorname{sh}\alpha x + \alpha\beta^{-1}\operatorname{sh}\beta x}, \tag{3.38}
$$

$$
(\alpha = s_1 + s_2,\ \beta = s_1 - s_2,\ x = \xi\delta).
$$

Przejście graniczne $\delta_2 \to \infty (\eta_2 \to \infty)$ wykonane dla przypadku $\alpha_2 \in R_+$ we wzorach (3.25) i (3.29) prowadzi do określenia funkcji $M(x)$ za pomocą wzoru

$$
M(x) = 1 - \frac{a_7\operatorname{ch}\alpha_1 x + a_3\operatorname{sh}\alpha_1 x + a_8^*\operatorname{ch}\beta_1 x + a_4^*\operatorname{sh}\beta_1 x + a_{11}^*}{a_3\operatorname{ch}\alpha_1 x + a_7\operatorname{sh}\alpha_1 x - a_4\operatorname{ch}\beta_1 x - a_8\operatorname{sh}\beta_1 x}, \quad (x = \xi\delta_1) \tag{3.40}
$$

Zdefiniowana wzorem (3.40) funkcja $M(x)$ odpowiada zagadnieniu warstwy poprzecznie izotropowej złączonej z półprzestrzeniami o innych stałych materiałowych, osłabionej obecnością szczeliny usytuowanej w jej płaszczyźnie środkowej.

Jeżeli w (3.40) podstawimy wartości współczynników określonych wzorami (3.37), a więc przejdziemy do ośrodka jednorodnego, to funkcja $M(x)$ jest tożsamościowo równa zeru. Funkcja $M(x)$ posiada tę własność, że dąży do zera gdy x dąży do nieskończoności.

Gdy $\delta \to \infty$ (długość promienia szczeliny dąży do zera lub ciało nieograniczone), to $M(\xi\delta) \to 0$ i równania (3.35), (3.36) przechodzą w znane równania opisujące zagadnienie szczeliny w ciele nieograniczonym, które dla przypadku izotropii podano w [8] (s. 96 wzory 3.4.1 i 3.4.2).

4. Równanie całkowe Fredholma, współczynnik intensywności naprężenia, przemieszczenia i energia szczeliny

Równanie (3.36) jest spełnione tożsamościowo przez reprezentację całkową

$$
f(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, a^2 \int_0^1 g(\tau)\sin(\xi\tau)\,d\tau, \qquad g(0) = 0. \tag{4.1}
$$

Podstawiając związek (4.1) do równania (3.35) sprowadzamy je do równania całkowego typu Abela względem nieznanej funkcji $g(\tau)$

$$(4.2)\qquad \mathscr{A}_1[g'(\tau); r] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 g(\eta)d\eta \int_0^\infty \xi M(\xi\delta)J_0(\xi r)\sin(\xi\eta)d\xi + p(r); \quad 0 \leqslant r \leqslant 1,$$

gdzie $\mathscr{A}_1$ jest operatorem Abela pierwszego rodzaju zdefiniowanym wzorem [8]

$$(4.3)\qquad \mathscr{A}_1[g(\tau); r] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^r \frac{g(\tau)d\tau}{\sqrt{r^2-\tau^2}}, \quad (r > 0).$$

Stosując w równaniu (4.2) odwrotny operator Abela

$$(4.4)\qquad \mathscr{A}_1^{-1}[h(r); \tau] = \frac{d}{d\tau} \mathscr{A}_1[rh(r); \tau]$$

i wykonując w tym równaniu całkowanie z uwzględnieniem $g(0) = 0$ oraz wzoru [9]

$$(4.5)\qquad \frac{d}{d\tau} \int_0^\tau \frac{rJ_0(\xi r)dr}{\sqrt{\tau^2-r^2}} = \cos\xi\tau,$$

otrzymujemy

$$(4.6)\qquad g(\tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 g(\eta)d\eta \int_0^\infty M(\xi\delta)\sin(\xi\eta)\sin(\xi\tau)d\xi + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\tau \frac{rp(r)dr}{\sqrt{\tau^2-r^2}}; \quad 0 < \tau < 1.$$

Równanie całkowe (4.6) zapiszemy w postaci

$$(4.7)\qquad g(\tau) = \int_0^1 K(\tau, \eta)g(\eta)d\eta + p^*(\tau); \quad 0 < \tau < 1,$$

gdzie symetryczne jądro $K(\tau, \eta)$ jest zdefiniowane wzorem

$$(4.8)\qquad K(\tau, \eta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty M(\xi\delta)\sin(\xi\eta)\sin(\xi\tau)d\xi$$

i $p^*(\tau)$ jest daną funkcją określoną za pomocą całki

$$(4.9)\qquad p^*(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\tau \frac{rp(r)dr}{\sqrt{\tau^2-r^2}}.$$

Równanie całkowe (4.7), określające funkcję $g(\tau)$, która wyznacza poszukiwaną funkcję $f(\xi)$ za pomocą wzoru (4.1), jest równaniem całkowym Fredholma drugiego rodzaju. Istnienie i jednoznaczność rozwiązania tego równania zależą od zachowania się jądra, zdefiniowanego wzorem (4.8), a więc określonego za pomocą funkcji trygonometrycznych i funkcji $M(x)(x = \xi\delta)$, zależnej od stałych materiałowych warstw, stosunku ich grubości oraz od stosunku grubości płyty do promienia szczeliny $\left(\delta = \dfrac{h}{a}\right)$.

Jądro zapiszemy w postaci równoważnej do (4.8)

$$K(\tau\delta^{-1}, \eta\delta^{-1}) = \frac{2}{\pi}\delta^{-1}\int_0^\infty M(x)\sin(x\eta\delta^{-1})\sin(x\tau\delta^{-1})dx, \tag{4.10}$$

$$\left(x = \xi\delta \in <0, \infty), \quad \delta^{-1} = \frac{a}{h}\right).$$

Analizując wzory (3.31), (3.29), (3.25), określające funkcję $M(x)$, oraz zależności (2.7) i (3.27) określające parametry α_i, β_i $(i = \mathrm{I}, \mathrm{II})$ możemy stwierdzić, że funkcja $M(x)$ posiada następujące własności:

a) Dla dowolnych właściwości sprężystych materiałów mamy

$$\lim_{x\to 0} x^n M(x) = \begin{cases} 9, & \text{dla } n = 1 \\ 0, & \text{dla } n = 2, 3, 4, \ldots \end{cases} \tag{4.11}$$

Granica g ma wartość skończoną i wynosi:

$$g = -\frac{2(a_5+a_7+a_8+a_6^*+a_{11}^*-a_{12}^*-a_0^*)+a_9-a_{10}^*}{(a_9+2a_5+2a_7)\alpha_1\eta_1+(a_{10}-2a_6-2a_8)\beta_1\eta_1+2(a_3-a_4)\alpha_2\eta_2+2(a_1-a_2)\beta_2\eta_2} \tag{4.12}$$

dla warstwy niejednorodnej,

$$g = -\frac{1-\alpha^2\beta^{-2}+4s_1s_2\beta^{-2}}{2\alpha}, \quad \text{gdy } \beta \neq 0, \quad \alpha \neq 0 \tag{4.13}$$

w przypadku warstwy jednorodnej, przy czym

$$g = 0, \quad \text{gdy } \beta = 0 \quad \text{albo } \alpha = 0. \tag{4.14}$$

W przypadku $\beta = 0$, odpowiadającym $\varrho = 1$, mamy ze wzorów (2.4) i (2.7) zależność

$$4s_1s_2 = \alpha^2-\beta^2$$

która uwzględniona w (4.13) prowadzi do (4.14). Przypadek $\beta = 0$, $\alpha = 2$ odpowiada izotropii. W przypadku $\alpha = 0$ mamy $\beta = 2\, is_1s_2$ i ze wzoru (4.13) otrzymujemy (4.14).

b) Dla funkcji $M(x)$ mają miejsce następujące asymptotyczne równości

$$M(x) \sim -e^{-2x\alpha_1\eta_1}, \quad \text{gdy } \alpha_1 \in R_+, \quad x \to \infty, \tag{4.15}$$

$$M(x) \sim -e^{-2(\alpha_1\eta_1+\alpha_2\eta_2)}, \quad \text{gdy } \alpha_1 \text{ i } \alpha_2 \in R_+, \quad x \to \infty. \tag{4.16}$$

Tak więc

$$\lim_{x\to\infty} x^n M(x) = 0; \quad n = 1, 2, \ldots, \alpha_1 \in R_+ \tag{4.17}$$

W przypadku rzeczywistych wartości parametru α_2 i urojonych α_1 musimy zbadać zachowanie się funkcji $M(x)$ przy x dążącym do nieskończoności. Możemy posłużyć się w tym przypadku funkcją $M(x)$ daną wzorem (3.40), która zachowuje się dla dużych x tak jak funkcja $M(x)$, dana wzorem ogólnym.

Jeżeli α_1 i α_2 przyjmują wartości urojone, to należy dla takich, teoretycznie możliwych, materiałów zbadać zachowanie się funkcji $M(x)$ przy x dążącym do nieskończoności.

Biorąc pod uwagę wniosek wynikający ze wzoru (2.8) możemy stwierdzić, że gdy zachodzi

$$\frac{G_{\mathrm{I}}}{G_{\mathrm{II}}} > \nu_{\mathrm{II}} \frac{E_{\mathrm{I}}}{E_{\mathrm{II}}} \quad \text{lub} \quad -1 < \varrho_{\mathrm{I}} < 0, \tag{4.18}$$

to ma miejsce własność funkcji $M(x)$ określona wzorem (4.17).

c) Jeżeli $\alpha_1 \in R_+$ lub $\alpha_2 \in R_+$, to funkcja $M(x)$ jest ciągła w przedziale $(0, \infty)$.

Wniosek ten wynika z analizy wzorów (3.31), definiującego funkcję $M(x)$ i (3.25), określającego funkcję $m(x)$. Funkcja $m(x)$ jest różna od zera dla każdego $x \in (0, \infty)$, gdy $\alpha_1 \in R_+$ lub $\alpha_2 \in R_+$.

Jeżeli warstwa wewnętrzna rozpatrywanej płyty niejednorodnej wypełniona jest materiałem o parametrze $\varrho_{\mathrm{I}} < -1$, tzn. nie zachodzi (4.18), to funkcja $M(x)$ może nie mieć własności (4.17). Ponadto jeżeli dla obu materiałów mamy $\varrho_i < -1$, to mogą wystąpić punkty nieciągłości tej funkcji.

W przypadku analizy zagadnienia w tej klasie materiałów, teoretycznie możliwych, należy zbadać dla danych materiałów zachowanie się funkcji $M(x)$ przy $x \to \infty$ i ciągłość tej funkcji. Własności funkcji $M(x)$ określone przez (4.11) i (4.17) oraz ciągłość tej funkcji w przedziale $(0, \infty)$ zapewniają zbieżność całki (4.10), określającej jądro równania całkowego Fredholma. Z właściwości funkcji $M(x)$, mających zawsze miejsce w przypadku gdy spełniona jest alternatywa (4.18) wynika, że jądro równania całkowego zagadnienia jest ciągłą funkcją i mamy oszacowanie

$$\forall\, \tau, \eta \in \langle 0,1\rangle \; |K(\tau, \eta)| < C_1. \tag{4.19}$$

Występująca w równaniu całkowym (4.7) funkcja $p^*(\tau)$, zdefiniowana wzorem (4.9), jest także ograniczona

$$\forall\, \tau \in \langle 0,1\rangle \; |p^*(\tau)| < C_2. \tag{4.20}$$

Równanie całkowe (4.7), określające poszukiwaną funkcję $g(\tau)$, jest regularnym równaniem całkowym Fredholma drugiego rodzaju to znaczy równaniem o jądrze ciągłym i całkowalnym z kwadratem. Wyznacza ono jednoznacznie poszukiwaną funkcję $g(\tau)$, należącą do przestrzeni funkcji ciągłych.

Za pomocą funkcji $g(\tau)$ możemy wyznaczyć fizyczne wielkości interesujące nas w omawianym zagadnieniu.

Przemieszczenia brzegu szczeliny otrzymujemy z zależności (3.32), która po uwzględnieniu (4.1) prowadzi do wzoru

$$w_1(r, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \varkappa a \int_0^1 g(\tau)d\tau \int_0^\infty J_0(\xi r)\sin(\xi\tau)d\xi. \tag{4.21}$$

Uwzględniając w (4.14) związek

$$\int_0^\infty J_0(\xi r)\sin(\xi\tau)d\xi = \begin{cases} 0 & \tau < r \\ (\tau^2 - r^2)^{-\frac{1}{2}}, & \tau > r \end{cases}, \tag{4.22}$$

określimy przemieszczenia brzegu szczeliny za pomocą wzoru

$$w_1(r, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \varkappa a \int_r^1 \frac{g(\tau)d\tau}{\sqrt{\tau^2 - r^2}}; \qquad 0 < r < 1. \tag{4.23}$$

Parametr materiałowy $\varkappa$ dany jest wzorem (3.33).

Energia szczeliny jest zdefiniowana wzorem [8]

$$W = 2\pi a^2 \int_0^1 rp(r)\, w_1(r, 0)dr. \tag{4.24}$$

Po uwzględnieniu zależności (4.23) i zamianie porządku całkowania znajdujemy, że energia szczeliny jest określona przez funkcje $p^*(\tau)$ i $g(\tau)$ w postaci następującej:

$$W = 2\pi a^3 \varkappa \int_0^1 p^*(\tau) g(\tau) d\tau, \tag{4.25}$$

gdzie funkcja $p^*(\tau)$ dana jest za pomocą wzoru (4.9).

Współczynnik intensywności naprężenia [8]

$$N = \lim_{r \to 1^+} \sqrt{2(r-1)}\, \{\sigma_{zz1}(r, 0)\}_{r>1} \tag{4.26}$$

określimy uwzględniając (3.34) i (4.1) w definicji (4.26). Po przekształceniach uwzględniających wzór rekurencyjny dla funkcji Bessela i równoważny wzór dla całki niewłaściwej z iloczynu funkcji Bessela i funkcji trygonometrycznej oraz pominięciu składnika, w którym nie występuje osobliwość dla $r = 1$ otrzymujemy

$$N = \sqrt{\frac{2a}{\pi}}\, g(1). \tag{4.27}$$

5. Stałe ciśnienie, iteracyjne rozwiązanie równania całkowego

W przypadku gdy $p(r) = p_0$ jest stałą otrzymujemy z (4.9)

$$p^*(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, p_0 \tau; \qquad 0 < \tau < 1. \tag{5.1}$$

Dla tego przypadku zapiszemy równanie (4.7) i zależności (4.8) (4.23), (4.25), (4.26) za pomocą funkcji $\psi(\tau)$ takiej, że

$$g(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, p_0 \psi(\tau); \qquad 0 < \tau < 1. \tag{5.2}$$

Mamy:

$$\psi(\tau) = \int_0^1 K(\tau, \eta)\psi(\eta)d\eta + \tau; \qquad 0 < \tau < 1, \tag{5.3}$$

$$K(\tau, \eta) = \frac{-1}{\pi}\, \delta^{-1} \int_0^1 M(x)[\cos x\delta^{-1}(\tau+\eta) - \cos x\delta^{-1}(\tau-\eta)]dx, \tag{5.4}$$

$$w_I(r, 0) = \frac{2}{\pi} \varkappa p_0 a \int_r^1 \frac{\psi(\tau)d\tau}{\sqrt{\tau^2 - r^2}}; \quad 0 \leqslant r \leqslant 1, \tag{5.5}$$

$$W = 4\varkappa p_0^2 a^3 \int_0^1 \tau\psi(\tau)d\tau, \tag{5.6}$$

$$N = \frac{2}{\pi} \sqrt{a} p_0 \psi(1). \tag{5.7}$$

Jeżeli we wzorze (5.4) wykorzystamy rozwinięcie funkcji trygonometrycznych w szereg potęgowy względem parametru δ^{-1}, to jądro $K(\tau, \eta)$ zapiszemy w postaci

$$K(\tau, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n}{\delta^{2n+1}} K^{(n)}(\tau, \eta), \tag{5.8}$$

gdzie

$$K^{(n)}(\tau, \eta) = \frac{(-1)^{n+1}}{2(2n)!} [(\tau+\eta)^{2n} - (\tau-\eta)^{2n}] \tag{5.9}$$

oraz

$$I_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} M(x) x^{2n} dx; \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{5.10}$$

Szereg (5.8) jest zbieżny bezwzględnie i jednostajnie dla każdego $\tau, \eta \in \langle 0, 1 \rangle$, gdy parametr δ^{-1} spełnia nierówność

$$\delta^{-1} < \frac{1}{C_1}, \tag{5.11}$$

gdzie $C_1 > 0$ jest kresem jądra $K(\tau, \eta)$ (wzór (4.19)).

Całki I_n, określone za pomocą (5.10), są zbieżne gdyż dla rzeczywistych materiałów mamy właściwości (4.11) i (4.17) ciągłej funkcji $M(x)$.

Warunek (5.11) stanowi ograniczenie zastosowania rozkładu (5.8) do takich przypadków, w których parametr δ^{-1}, równy stosunkowi promienia szczeliny a do grubości warstwy h, jest na ogół mały. Zależy to od stałej C_1.

Rozwiązanie równania całkowego (5.3) można otrzymać teraz na drodze iteracyjnej

$$\begin{aligned} &\psi_0(\tau) = \tau, \\ &\psi_{r+1}(\tau) = \tau + \int_0^1 K(\tau, \eta)\psi_r(\eta)d\eta; \quad (r = 0, 1, 2, \ldots) \end{aligned} \tag{5.12}$$

Proces iteracyjny wymaga obliczenia kolejnych zbieżnych całek danych wzorem (5.10).

Szybkość zbieżności (5.8), a zatem i procesu iteracyjnego (5.12) zależy w istotny sposób od wartości parametru δ^{-1}. W przypadku gdy grubość warstwy wewnętrznej dąży do nieskończoności (ciało nieograniczone) mamy

$$\psi(\tau) = \psi_0(\tau) = \tau, \tag{5.13}$$

dla dowolnej, skończonej rozwartości szczeliny.

Jeżeli warstwa wewnętrzna o grubości h_1 jest złączona z półprzestrzeniami poprzecznie izotropowymi ($M(x)$ zdefiniowana wzorem (3.40)), to parametr δ^{-1} należy zastąpić parametrem $\delta_1^{-1} = \frac{a}{h_1}$.

W tym przypadku zbieżność procesu iteracyjnego jest szybsza. Stosując proces iteracyjny opisany za pomocą wzoru (5.12) otrzymujemy, przy założeniu $\delta^{-1} = \frac{a}{h} < 1$, przybliżone rozwiązanie

$$\begin{aligned}(5.14)\quad \psi(\tau) = \tau\Big[1+\frac{1}{3}I_1\delta^{-3}-\frac{1}{30}I_2\delta^{-5}-\frac{1}{18}I_2\delta^{-5}\tau^2+\frac{1}{9}I_1^2\delta^{-6}+\frac{1}{720}I_3\delta^{-7}+\\ +\frac{2}{225}I_3\delta^{-7}\tau^2+\frac{1}{360}I_3\delta^{-7}\tau^4-\frac{1}{30}I_1I_2\delta^{-8}-\frac{1}{54}I_1I_2\delta^{-8}\tau^2+O(\delta^{-10})\Big].\end{aligned}$$

Uwzględniając zależność (5.14) we wzorach (5.5), (5.6), (5.7) i wykonując całkowanie otrzymujemy wzory określające deformację i energię szczeliny oraz współczynnik intensywności naprężenia

$$\begin{aligned}(5.15)\quad W_1(r,0) = \frac{2}{\pi}\varkappa p_0 a\sqrt{1-r^2}\Big[1+\frac{1}{3}I_1\delta^{-3}-\frac{7}{135}I_2\delta^{-5}+\frac{1}{9}I_1^2\delta^{-6}+\\ +\frac{1}{200}I_3\delta^{-7}-\frac{16}{405}I_1I_2\delta^{-8}-\frac{1}{27}I_2\delta^{-5}r^2-\frac{1}{150}I_3\delta^{-7}r^2-\\ -\frac{1}{81}I_1I_2\delta^{-8}r^2+\frac{1}{675}I_3\delta^{-7}r^4+O(\delta^{-10})\Big];\quad 0\leqslant r\leqslant 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(5.16)\quad W = \frac{4}{3}\varkappa p_0^2 a^3\Big[1+\frac{1}{3}I_1\delta^{-3}-\frac{1}{15}I_2\delta^{-5}+\frac{1}{9}I_1^2\delta^{-6}+\\ +\frac{7}{1800}I_3\delta^{-7}-\frac{17}{360}I_1I_2\delta^{-8}+O(\delta^{-10})\Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(5.17)\quad N = \frac{2}{\pi}p_0\sqrt{a}\Big[1+\frac{1}{3}I_1\delta^{-3}-\frac{4}{45}I_2\delta^{-5}+\frac{1}{9}I_1^2\delta^{-6}+\frac{7}{1200}I_3\delta^{-7}+\\ +\frac{7}{135}I_1I_2\delta^{-8}+O(\delta^{-10})\Big].\end{aligned}$$

W przypadku gdy warstwa ze szczeliną jest złączona z półprzestrzeniami poprzecznie izotropowymi należy w rozwiązaniach (5.15), (5.16), (5.17) podstawić w miejsce δ^{-1} parametr $\delta_1^{-1} = \frac{a}{h_1}$. W tym przypadku funkcja $M(x)$, określająca wzorem $(5.10)^1$ całki I_n, zdefiniowana jest zależnością (3.40). Jeżeli $\psi_h(\tau)$ jest rozwiązaniem dla płyty warstwowej a $\psi_\infty(\tau) = \tau$ dla ciała nieograniczonego, to $\psi_h(\tau) \to \psi_\infty(\tau)$ przy $h_1 \to \infty$ jednostajnie względem $\tau \in \langle 0,1 \rangle$.

W przypadku $h_1 \to \infty(\delta^{-1} \to 0)$ otrzymujemy rozwiązania w postaci [3]

$$w_\infty(r, 0) = \frac{2}{\pi} \varkappa p_0 a \sqrt{1-r^2}; \quad 0 \leqslant r \leqslant 1, \tag{5.18}$$

$$W_\infty = \frac{4}{3} \varkappa p_0^2 a^3, \tag{5.19}$$

$$N_\infty = \frac{2\sqrt{a}}{\pi} p_0. \tag{5.20}$$

Wzory (5.18), (5.19), (5.20) przechodzą w znane rozwiązania dla nieograniczonego ciała izotropowego [8], gdy podstawimy w nich stałą materiałową

$$\varkappa = \frac{1-\nu}{G}, \tag{5.21}$$

otrzymaną ze wzoru (3.33) za pomocą przejścia granicznego $s_{\mathrm{I}} \to 1$, $s_{\mathrm{II}} \to 1$, $k_{\mathrm{I}} \to 1$, $G_{\mathrm{II}} = G$.

Współczynnik intensywności naprężenia w nieograniczonym ciele poprzecznie izotropowym jest taki sam jak w przypadku ciała izotropowego. W rozpatrzonym w pracy zagadnieniu szczeliny w płycie warstwowej anizotropia materiału wpływa na wszystkie fizyczne wielkości i na współczynnik intensywności naprężenia.

Literatura cytowana w tekście

1. K. ARIN, *An Orthotropic Laminate Composite Containing a Layer with a Crack*, Int. J. Engng Sci., 15 p. 545, 1977.
2. M. R. GECIT, *Fracture of a Surface Layer Bonded to a Half Space*, Int. J. Engng Sci., 3, 17 p. 287, 1979
3. B. ROGOWSKI, *Zagadnienie szczeliny w ciele poprzecznie izotropowym*, Zeszyty Naukowe PŁ, Nr 340, Budownictwo z. 25, s. 7, 1979.
4. B. ROGOWSKI, *Pierścieniowa szczelina w ciele poprzecznie izotropowym*, Zeszyty Naukowe PŁ, Nr 370, Budownictwo z. 27, s. 47, 1981.
5. M. DAHAN, *Facteur d'intensit de contrainte pour un milieu infini transversalement isotrope avec fissure plane circulaire* „C.r. Acad. Sci." AB 290 Nr 2 B19 - B21, 1980.
6. M. DAHAN, M. PREDELEANU, *Penny — shaped crack in a transversely isotropic solid*, Lett. Appl. Engng Sci. Vol. 18 No 8 p. 1067, 1980.
7. B. ROGOWSKI, *Funkcje przemieszczeń dla ośrodka poprzecznie izotropowego*, Mech. Teoret. i Stos. 1, 13 s. 69, 1975.
8. I. N. SNEDDON, *Metoda transformacji całkowych w mieszanych zagadnieniach brzegowych klasycznej teorii sprężystości*, PWN Warszawa 1974.
9. A. ERDELYI Ed, *Tables of Integral Transforms* Vol. 1, Mc Graw-Hill, 1954.

Резюме

ЗАДАЧА ТРЕЩИНЫ В ТРЕХСЛОЙНОЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКЕ.

Рассматривается задача трещины для трехслойной, бесконечной, трансверсально — изотропной пластинки симметричного строения.

Продольная трещина, расположенная симметрично относительно граней пластинки и начала координат, нагрижена внутренным давлением.

Краевая задача сведена к решению интегрального уравнения Фредгольша второго рода с неизвестной функцей, решающей задачу, и ядром зависящим от функции, которая учитывает упругие свойства составных материалов пластинки и отношение их талщин.

Приведены формулы для коэффицента интенсивности напряжения, энергии и перемещения трещины. Для частного случая постоянного давления дано итерационное решение задачи.

Summary

CRACK PROBLEM OF TRANSVERSELY ISOTROPIC THREE LAYERED ELASTIC PLATE

A penny — shaped crack problem for a transversely isotropic, symmetrical, three layered elastic plate is considered. The crack is situated in an elastic symmetry plane and axially loaded.

The mixed boundary-value problem has been reduced to a Fredholm integral equation of the second kind.

Expressions for the stress intensity factor, crack energy and crack opening displacements are derived by means of the solution of an integral equation. In the case of uniform pressure the iterative solution of the equation and expressions for the physical quantities are presented as functions of the ratio of a crack length and a plate thickness.

INSTYTUT INŻYNIERII BUDOWLANEJ
POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 30 września 1980 roku