

PRZEGLĄD KRYTYCZNY METOD ANALIZY OSIOWO-SYMETRYCZNEGO PRZEPEŁYWU
PRZEZ UKŁADY ŁOPATKOWE MASZYN WIRNIKOWYCH

JOACHIM J. OTTE (GLIWICE)

1. Wstęp

1.1. Gwałtowny rozwój teoretycznych metod analizy przepływu płynu przez układy łopatkowe maszyn wirnikowych jaki miał miejsce w ostatnich 25 latach i jaki dokonuje się obecnie spowodował, że badania teoretyczne na równi z badaniami eksperymentalnymi kształtują postęp w dziedzinie analizy zjawisk przepływu. Istotną przyczyną powodującą zasadnicze jakościowe zmiany w zakresie metod obliczeniowych było pojawienie się szybko-działających elektronicznych maszyn cyfrowych. Otworzyły się tu zupełnie nowe perspektywy wynikające bezpośrednio ze wzrostu ilości i ścisłości informacji jakie można uzyskać z badań teoretycznych. Stało się możliwe uzyskanie rozwiązań numerycznych znacznej liczby problemów dla złożonych geometrii układów i przy niezbyt wielu założeniach upraszczających.

Do niewątpliwie podstawowych problemów hydro- i aerodynamiki maszyn wirnikowych (turbin, sprężarek, pomp i wentylatorów) należy zaliczyć badania przestrzennego nieustalonego przepływu płynu przez układy łopatkowe tych maszyn z uwzględnieniem rzeczywistych własności płynów. Złożoność tego zagadnienia, a przede wszystkim trudności stworzenia modelu matematycznego i następnie jego rozwiązania powodują konieczność czynienia pewnych uproszczeń, polegających zwykle na wyodrębnieniu i zachowaniu zasadniczych cech zjawiska a pominięciu mniej istotnych. Powszechnie stosowana koncepcja uproszczenia równań ruchu płynu lepkiego, dająca się ze względu na duże liczby Reynoldsa, zastosować w teoretycznych badaniach przepływu w maszynach wirnikowych, oparta jest na pojęciu warstwy przyściennej i polega na wyróżnieniu w przepływie dwóch obszarów, a mianowicie: obszaru strumienia głównego gdzie płyn traktuje się jako nielepki i obszaru warstw przyściennych, gdzie płyn traktuje się jako lepki. Dalsze uproszczenia to rozpatrywanie przepływu jako quasi-trójwymiarowego, gdzie obraz przepływu otrzymuje się w wyniku iteracyjnego procesu rozwiązywania dwóch zadań: a) przepływu płynu przy założeniu jego osiowej symetrii, czyli rozpatruje się przepływ na powierzchniach typu S'_2 (rys. 1), b) opływu palisady profili na obrotowych powierzchniach prądu (powierzchnie typu S'_1) uzyskanych w rezultacie rozwiązania poprzedniego zadania.

W aerodynamice formułuje się dwa odrębne zadania:

1) Zadanie podstawowe pierwotne, polegające na znalezieniu parametrów przepływu przy zadanych cechach geometrycznych układu przepływowego. Inaczej jest to zagadnienie analizy przepływu.

2) Zadanie odwrotne, polegające na wyznaczeniu cech geometrycznych układu przepływowego przy zadanych z góry parametrach przepływu. Używając innej nazwy jest to zadanie projektowe lub też zagadnienie syntezy przepływu.

Warto podkreślić, że o ile zagadnienie analizy jest dobrze postawione, tzn., że dla danej geometrii układu przepływowego uzyskuje się tylko jedno rozwiązanie, to zagadnienie syntezy nie ma jednoznacznego sformułowania, gdyż żądane parametry przepływu mogą być zrealizowane najczęściej przez wiele układów o różnych geometriach.

Niniejszy przegląd obejmuje jedynie prace dotyczące zagadnienia analizy osiowo-symetrycznego przepływu płynu na powierzchniach typu S'_2 . Rozważania ograniczone są tu do obszaru strumienia głównego, przy czym obszar ten rozciąga się na podobszary zajęte wieńcami łopatkowymi jak i podobszary międzywieńcowe (przestrzenie międzywieńcowe). Rozpatruje się tu zarówno pojedyncze wieńce łopatkowe, stopnie jak i układy łopatkowe (wielostopniowe) maszyn wirnikowych o dowolnej ich geometrii.

1.2. Zdecydowana większość prac z dziedziny maszyn wirnikowych wykonywana jest w pracowniach i laboratoriach wielkich firm przemysłowych względnie w instytutach naukowych na zlecenie tychże firm. Biorąc to pod uwagę, zrozumiałym staje się fakt, że pewna część prac jest nieopublikowana lub też zastrzeżona do użytku wewnętrznego. Stąd też jakkolwiek niniejszy przegląd prac obejmuje praktycznie wszystkie dostępne pozycje literatury z zakresu analizy przepływu osiowo-symetrycznego w maszynach wirnikowych, to jednakże nie może on pretendować do kompletności.

W tym miejscu należy wyjaśnić pewne nieścisłości nomenklaturowe, gdyż bardzo często pojęcia: przepływ przestrzenny, trójwymiarowy, quasi-trójwymiarowy, quasi-przestrzenny, osiowosymetryczny bywają używane zamiennie, co nie zawsze jest poprawne i najczęściej jest źródłem nieporozumień. W miarę rozwoju aerodynamiki maszyn przepływowych obserwuje się jednak dążenie do bardziej ścisłego i precyzyjnego posługiwania się określonymi pojęciami, zgodnie z ich rzeczywistym znaczeniem. Przykładem może tu być pojęcie przepływu przestrzennego, które pojawiło się w momencie przejścia od modelu jednowymiarowego, gdzie obliczenia prowadzone na średniej średnicy kanału przepływowego, do modelu dwuwymiarowego, który w gruncie rzeczy jest osiowo-symetrycznym.

O przepływie przestrzennym trójwymiarowym można mówić wtedy gdy wielkości polowe opisujące ten przepływ są funkcjami trzech współrzędnych

$$\Phi = \Phi(r, \varphi, z).$$

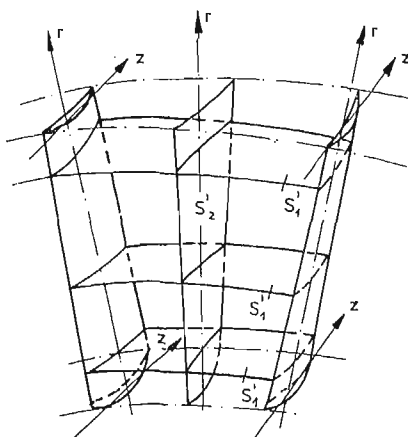
Takie ujęcie zagadnienia analizy przepływu stwarza oczywiście znaczną trudność, tak przy stawianiu warunków brzegowych jak i przede wszystkim przy rozwiązywaniu. Istotne uproszczenie obliczeń przepływu uzyskano przez wprowadzenie do rozważań względnych powierzchni przepływu. GOLLDSTEIN [16] zaproponował rozpatrzenie przepływu tylko na jednej, średniej powierzchni typu S_2 (rys. 1), natomiast WU [65] wprowadził dwie rodziny powierzchni przepływu S_1 i S_2 , co pozwoliło sprowadzić zagadnienie przepływu przestrzennego (trójwymiarowego) do dwóch zagadnień dwuwymiarowych, gdzie wielkości polowe opisane są funkcjami:

$$\Phi_1 = \Phi_1[r(\varphi, z), \varphi, z]: \quad \Phi_2 = \Phi_2[r, \varphi(r, z), z]$$

W rezultacie operacji uśredniania względem współrzędnej obwodowej powierzchnię typu S_2 otrzymuje się jako osiowo-symetryczną, oznaczaną dalej jako S'_2 (rys. 1). W ten sposób dochodzi się do tzw. zagadnienia quasi-trójwymiarowego (quasi-przestrzennego) składającego się z dwóch zagadnień, z których jedno jest zagadnieniem przepływu osiowo-symetrycznego.

Dla przestrzeni międzywieńcowych, gdzie przepływ może być traktowany jako jednorodny i osiowo-symetryczny, zagadnienie quasi-trójwymiarowe sprowadza się do zagadnienia wyłącznie osiowo-symetrycznego.

W odniesieniu do metod analizy przepływu na powierzchniach typu S'_2 stosowana jest przeważnie nazwa: metody analizy przepływu przez układy łopatkowe, jako że powierzchnie typu S'_2 określone są w głównej mierze przez geometrię łopatek.



Rys. 1

1.3. Kluczowym zagadnieniem przy rozpatrywaniu przepływu płynu przez wieńce łopatkowe maszyn wirnikowych jest jego model matematyczny. Wraz ze wzrostem możliwości obliczeniowych maszyn cyfrowych obserwuje się tu stałą dążność do coraz większych uogólnień. Niewielka praktyczna przydatność modelu zaproponowanego przez Wu [65] sprawia, że istota problemów w zakresie sformułowania modelu matematycznego skupia się na odpowiednim uśrednieniu równań przestrzennego przepływu płynu celem uzyskania opisu przepływu na powierzchniach typu S'_2 .

Pionierską pracą przedstawiającą model przepływu płynu przez wieńce łopatkowe jest praca LORENZA [31], gdzie rozpatrzono osiowo-symetryczny przepływ płynu nielepkiego i nieściśliwego. W równaniach ruchu w miejsce pochodnych względem kierunku obwodowego wprowadzana została siła masowa tzw. oddziaływania łopatek, co powoduje przyjęcie modelu przepływu przez wirnik o nieskończonej liczbie nieskończenie cienkich łopatek. Rozwinięcie tej idei znajduje się w pracy STODOLI [53]. Należy podkreślić, że w praktycznych obliczeniach model Loreza znajduje jeszcze obecnie swoje zastosowanie.

STIEPANOW [93] do modelu osiowo-symetrycznego przepływu przez wieńce łopatkowe doszedł przez uśrednienie wszystkich parametrów strumienia wzdłuż współrzędnej obwodowej i względem czasu. W wyniku tego w równaniach ruchu występuje uśredniona masowa

siła oddziaływania łopatek, prostopadła do pewnej średniej powierzchni strumienia. Takie podejście wykorzystano między innymi w późniejszych pracach [37], [40], [75], [84], [88], [89].

Rozwijając dalej koncepcję СТИЕРАНОВА, w pracach [90] i [97] wykazano, że masowa siła oddziaływania łopatek jak i współczynnik zwężenia przekroju przepływu wskutek skończonej grubości łopatek, pojawiają się w równaniach w wyniku przeprowadzenia operacji uśredniania wzdłuż wycinka obwodu pomiędzy dwoma ściankami kanału międzyłopatkowego. Przedstawiono tu także ściśle matematyczne związki między geometrią łopatek, siłami masowymi i uśrednionymi parametrami przepływu. Obliczenia wykonane w pracach [90] i [93] wykazały pełną przydatność modeli przepływu uzyskanych po przeprowadzeniu operacji uśredniania.

1.4. W literaturze przedmiotu podejmowano już próby opracowań przeglądowych, najczęściej w kontekście oceny aktualnego stanu i perspektyw rozwoju metod obliczeniowych przepływu [10], [13], [15], [19], [24], [29], [30], [40], [57], [64], [94], [95]. Problematyka analizy przepływu rozpatrywana była dosyć wycinkowo, przede wszystkim pod kątem umiejscowienia metod analizy w ogólnej tematyce badawczej maszyn wirnikowych. Niższa praca stanowi pewną próbę całościowego przedstawienia zagadnień analizy przepływu przez układy łopatkowe maszyn wirnikowych. Znaczna już ilość prac z tego zakresu powoduje, że trudno jest dokonać jednoznacznego precyzyjnego i jasnego ich podziału. Wprawdzie wszystkie prace jako na punkt wyjścia powołują się na podstawowe równania mechaniki płynów, to jednak trudność ich systematyzacji wynika z różnorodności założeń upraszczających czynionych świadomie i nieświadomie, różnorodności sposobów dochodzenia do równań końcowych jak i mnogości zastosowanych metod rozwiązywania. Niewątpliwie pomocnymi w tym przypadku mogą być między innymi takie kryteria jak: model przepływu, usytuowanie obszaru prowadzonej analizy przepływu w układzie łopatkowym, typ i forma końcowa równań różniczkowych opisujących zagadnienie analizy, zestaw niewiadomych w równaniach końcowych, metody rozwiązywania.

W przedstawionym niżej krytycznym przeglądzie metod analizy pokuszono się o ich pewną systematyzację częściowo wykorzystując wymienione kryteria. Wyróżniono tu cztery charakterystyczne, zasadniczo się od siebie różniące, grupy metod analizy osiowo-symetrycznego przepływu płynu przez układy łopatkowe maszyn wirnikowych. Są to:

- metody oparte na pojęciu linii prądu,
- metody oparte na pojęciu funkcji prądu,
- metody jednego parametru,
- metody tarczy wirowej.

2. Metody analizy wykorzystujące pojęcie linii prądu

Metody bazujące na pojęciu linii prądu stanowią większość prac z zakresu analizy osiowo-symetrycznego przepływu. Wynika to z faktu, że równania przepływu uzyskuje się tu w postaci dogodnej do interpretacji fizycznej oraz z tego że przyjęcie odpowiednich założeń odnośnie własności geometrycznych linii prądu, pozwala na znaczne uproszczenie tych równań.

Należy tu podkreślić, że z matematycznego punktu widzenia przyjęcie kształtu linii prądu jest nieuzasadnione, gdyż podlega ono określeniu w trakcie rozwiązywania zadania. W zależności więc od przyjętych założeń uzyskuje się odpowiedni model przepływu: od najbardziej prostego, gdy zakłada się przepływ wzdłuż linii prostej, do całkiem ogólnego gdy założeń takich się nie czyni.

2.1. Model „stopnia cylindrycznego”. W tzw. teorii „stopnia cylindrycznego” przyjmuje się, że merydionalne linie prądu (tworzące obrotowych powierzchni prądu) są liniami prostymi równoległymi do osi obrotu. Metody tej grupy nazywane są również, głównie przez badaczy angielskich, metodami równowagi promieniowej. Chodzi w tym przypadku o uproszczone równanie równowagi promieniowej cząstek płynu

$$(2.1) \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = \frac{c_u^2}{r}$$

opisujące przepływ w stopniu cylindrycznym.

Z założenia cylindryczności przepływu wynika, że wielkości prędkości promieniowych, kąta nachylenia linii prądu i krzywizny linii prądu przyjmują wartości zerowe czyli

$$(2.2) \quad c_r = 0, \quad \gamma = 0, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial m} = 0$$

co znacznie ułatwia uzyskanie rozwiązania, pozwalając otrzymać je nawet w formie analitycznej. Zagadnienie przepływu w stopniu cylindrycznym jest bardzo wszechstronnie opracowane. W ogólnym sformułowaniu uwzględnia się tu promieniowe gradienty parametrów spoczynkowych na wlocie do wieńca jak i rozkład strat wzdłuż promienia. Obliczenia prowadzi się tylko w odniesieniu do przestrzeni międzywieńcowych.

W praktycznych obliczeniach inżynierskich model przepływu cylindrycznego jest jeszcze obecnie dosyć szeroko stosowany.

Literatura dotycząca tego zagadnienia jest obszerna, przy czym w miarę kompletne ujęcia znaleźć można w książkach [11], [22], [55], [56], [70], [79], [80], [81], [91], [100], z których na szczególną uwagę, ze względu na ogólne potraktowanie problemu zasługuje praca SIROTKINA [91].

2.2. Model stopnia stożkowego. Rozwinięciem i uogólnieniem teorii stopnia cylindrycznego na przypadek rozszerzania lub zwężania się merydionalnego przekroju kanału przepływowego jest model przepływu w stopniu stożkowym. Zakłada się tu, że linie prądu są prostoliniowymi tworzącymi stożkowych obrotowych powierzchni prądu. Znajduje to swoje odbicie w założeniach

$$\gamma \neq 0, \quad c_r \neq 0, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial m} = \frac{1}{r_k} = 0.$$

Przy rozwiązywaniu równania przepływu

$$(2.3) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{c_u^2}{r} - c_r \frac{\partial c_r}{\partial r} - c_z \frac{\partial c_r}{\partial z},$$

które po uwzględnieniu założeń zapisać można jeszcze w postaci

$$(2.4) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{c_u^2}{r} - c_m \sin \gamma \frac{\partial c_m}{\partial m}$$

wykorzystuje się ([34], [74], [85], [96], [100]) fakt, że dla powierzchni stożkowych zachodzi relacja

$$(2.5) \quad \frac{\partial \operatorname{tg} \gamma}{\partial z} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \operatorname{tg}^2 \gamma}{\partial r},$$

pozwalająca na uzyskanie w niektórych wypadkach rozwiązań analitycznych.

W innych pracach [11], [75], [85] bazujących na modelu przepływu stożkowego pochodne określające zmianę prędkości promieniowej i kąt nachylenia linii prądu zamienia się wielkościami

$$\frac{\partial c_r}{\partial z} = \frac{c_{ri} - c_{ri-1}}{z_i - z_{i-1}}; \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{r_i - r_{i-1}}{z_i - z_{i-1}}$$

co z konieczności przyjęcia dość znacznych odległości pomiędzy kolejnymi przekrojami (przechodzą one najczęściej przez kolejne szczeliny międzywieńcowe) powoduje, że jest to jednoznaczne z aproksymacją linii prądu odcinkami powierzchni stożkowej.

W przytoczonych wyrażeniach „i” oznacza kolejny punkt na danej linii prądu.

Należy zaznaczyć, że model przepływu stożkowego ma większe znaczenie dla zadań projektowych, gdyż w przypadku zagadnień analizy przepływu mogą mieć miejsce pewne rozbieżności w przyjętym kształcie linii prądu.

Jeżeli zrezygnuje się z założenia prostoliniowości linii prądu i przyjmie się je w przybliżeniu odpowiednio do kształtu linii ograniczających kanał przepływowy w przekroju merydionalnym, czyli gdy krzywizna linii prądu może być różna od zera, to mamy do czynienia z uogólnionym modelem stopnia stożkowego.

Kąt nachylenia γ oraz krzywiznę $1/r_k$ zadaje się tu w przestrzeniach bezłopatkowych jako ciągle funkcje promienia. Funkcje te najczęściej obiera się jako liniowe lub paraboliczne [99]. Założenie rozkładu $\gamma = \gamma(r)$, $r_k = r_k(r)$ jest pewną hipotezą, której przyjęcie oznacza, że znane są pierwsza i druga pochodna merydionalnej linii prądu, lecz samo równanie tej krzywej tzn. położenie danej linii prądu jest nieznane i trzeba je określić w wyniku rozwiązania równań przepływu. Funkcje $\gamma(r)$, $r_k(r)$ powinny być dobrane w ten sposób [91] aby kształt linii prądu gładko przychodził w zarys merydionalnego przekroju kanału przepływowego. W zagadnieniach analizy założenia często się nie sprawdzają.

Model uogólnionego przepływu stożkowego wykorzystywany jest przede wszystkim w obliczeniach projektowych pojedynczych izolowanych stopni, przy czym oprócz hipotetycznego promieniowego rozkładu kąta nachylenia i krzywizny linii prądu uwzględnia się także promieniowe gradienty parametrów spoczynkowych strumienia płynu i promieniowy rozkład strat. Najbardziej ściśle sformułowanie takich zadań podano w pracy [91].

2.3. Model przepływu falistego. Analizując oddziaływanie łopatek i wpływ gradientów parametrów przepływu na ruch cząsteczek płynu w maszynie wielostopniowej można dojść do wniosku, że poruszają się one po torach, które w rzucie na płaszczyznę merydionalną osiową są liniami falistymi.

Często kolejne stopnie w wielostopniowych maszynach wirnikowych mogą być z pewnym przybliżeniem rozpatrywane jako powtarzające się (w języku niemieckim: Repetierstufen [55]) tzn., że pod względem cech geometrycznych stopnie te różnią się nieznacznie.

W takim przypadku oczekuje się, że również rozkłady parametrów przepływu będą się periodycznie powtarzały. Przy pewnych dodatkowych założeniach spełnione może to być dla płynu nieściśliwego, co zostało rozpatrzone przez SEIPPELA [47].

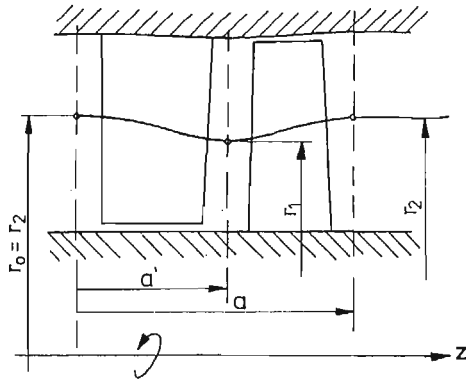
Powyższą koncepcję dla przepływu płynu ściśliwego rozwinął GYARMATHY [17], [55]. Uwzględniając różną szerokość wieńca stojanowego i wirnikowego, przyjęto tu następujące równanie linii prądu

$$(2.6) \quad r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) + \frac{1}{2}(r_2 - r_1) \cos \frac{2\pi Z}{a}$$

gdzie:

$$Z = z - \left(a' - \frac{a}{2} \right) \frac{1 - \cos \frac{2\pi z}{a}}{1 - \cos \frac{2\pi a'}{a}}$$

Pozostałe wielkości podano na rys. 2.



Rys. 2

Rozwiązania uzyskane przy założeniu periodyczności przepływu mają obecnie niewielkie znaczenie praktyczne. Mogą być ewentualnie przydatne w analizie wpływu niektórych cech geometrycznych wieńców na parametry przepływu.

Znacznie większe znaczenie praktyczne ma inny model przepływu falistego w którym rozpatrując parametry przepływu w kolejnych szczelinach (przestrzeniach) międzywieńcowych zakłada się, że przebieg merydionalnej linii prądu między dwoma kolejnymi przekrojami (rys. 3) może opisać formuła [55]

$$(2.7) \quad r = r_1 + \frac{r_2 - r_1}{b} z - \delta \cos \frac{\pi z}{b}$$

gdzie:

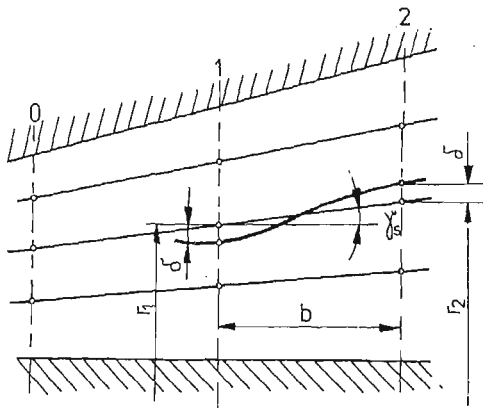
$$\delta = \frac{1}{2}(r_2 - r_1 - b \operatorname{tg} \gamma_s),$$

na podstawie której można obliczyć pierwszą i drugą pochodną

$$r' = \frac{r_2 - r_1}{b} + \frac{\pi\delta}{b} \sin \frac{\pi z}{b},$$

$$r'' = \frac{\pi^2 \delta}{b^2} \cos \frac{\pi z}{b},$$

co w konsekwencji pozwala obliczyć kąt nachylenia linii prądu i jej krzywiznę. Pierwszy i drugi składnik prawej strony równania linii prądu opisują przebieg średniej linii stożkowej.



Rys. 3

Jednym z założeń niniejszego modelu jest przyjęcie, że ekstrema merydionalnej linii prądu występują w rozpatrywanych przekrojach w przestrzeni międzywieńcowej, co odpowiednio uwzględnia trzeci składnik równania (2.7).

Rozkład parametrów określa się z równania równowagi promieniowej

$$(2.8) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{c_u^2}{r} + \frac{c_m^2}{r_k} \cos \gamma - c_m \frac{\partial c_m}{\partial m} \sin \gamma,$$

przy czym bardzo często zakłada się, że $\partial c_m / \partial m \approx 0$.

Przedstawiony sposób postępowania, mniej lub więcej uproszczony, jest najczęściej spotykany w pracach dotyczących tego zagadnienia przy czym pierwszeństwo w tym względzie należy się pracom Traupela. Podobnie zagadnienie to ujął VAVRA [58].

Hipoteza o falistym przebiegu linii prądu okazała się bardzo płodną dla szeregu prac. W pracy [51] sformułowano problem przepływu izentropowego w bardzo niewygodnej do prowadzenia obliczeń siatce współrzędnych naturalnych (ortogonalnych), gdzie równanie równowagi przyjmuje postać

$$(2.9) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{c_u^2}{r} \cos \gamma + \frac{c_m^2}{r_k}.$$

Jako krzywą łączącą poszczególne punkty linii prądu między wieńcami proponuje się tu linię sinusoidalną. Wu w dyskusji do tej pracy krytycznie ocenił możliwość aproksymacji linii prądu tylko na podstawie rozkładu parametrów w szczeliny międzywieńcowej.

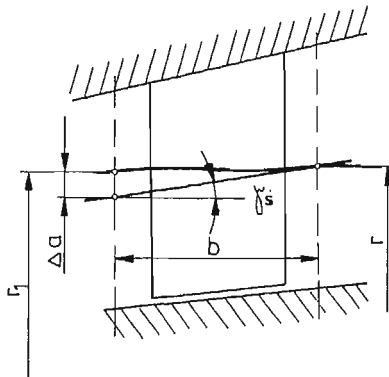
W innej pracy [8] bazującej na podobnym ujęciu zagadnienia, krzywiznę linii prądu określa się przy pomocy pochodnych $\partial c_r/\partial r$ i $\partial c_r/\partial z$ wprowadzając jednocześnie pewne dodatkowe wielkości szacowane na podstawie badań doświadczalnych. Celem uwzględnienia strat przepływu rozkłady prędkości uzyskane dla przepływu izentropowego mnoży się tu przez współczynniki prędkości.

W pracy [45] podano równanie równowagi promieniowej, w formie bezwymiarowej, przy zastosowaniu liczb Macha. Dla sumarycznego ujęcia wpływu tarcia wprowadzono uśrednioną po obwodzie wielkość strat. Krzywiznę określono zgodnie z postępowaniem podanym przez Traupela. Na podstawie analizy uzyskanych wyników stwierdzono m.in., że do aproksymacji przebiegu linii prądu w miejsce funkcji \cos bardziej odpowiednia byłaby funkcja \cos^2 .

Do najbardziej wyczerpujących prac opartych na hipotezie falistego sinusoidalnego przepływu należą prace BMMERTA i FIEDLERA [2], [3], w których, wychodząc z podanych jak i poprzednio założeń, krzywiznę linii prądu określa się za pomocą następującej formuły

$$(2.10) \quad \frac{1}{r_k} = -\frac{\Delta a}{2} \frac{\pi^2}{b^2} \cos^3 \gamma_s,$$

gdzie poszczególne wielkości objaśniono na rys. 4.



Rys. 4

W ramach modelu płynu idealnego straty ujmuje się tu poprzez promieniowy rozkład gradientu entropii. Uwzględnia się tu także gradienty energii całkowitej. W pracy [2] założono dodatkowo, że w rozpatrywanym przekroju $\partial p/\partial z = 0$.

Równanie końcowe służące do określenia rozkładu parametrów przepływu wzdłuż promienia uzyskano w następującej postaci:

$$(2.11) \quad w = C + \int \left[\frac{1}{w} k(r) - f(r) - wg(r) \right] dr,$$

gdzie przez C oznaczono stałą całkowania. Powyższe równanie wraz z równaniem ciągłości rozwiązuje się na drodze kolejnych przybliżeń.

Oprócz hipotezy sinusoidalnego przebiegu linii prądu przyjmuje się niekiedy, że można ją przedstawić wielomianem odpowiednio wysokiego stopnia, jak to uczyniono w pracy [67], gdzie zakłada się w tym celu wielomian algebraiczny

$$r(z) = \sum_{n=0}^5 a_n z^n$$

Istnieją również prace [11], [71], w których dążono do chociażby przybliżonego uwzględnienia oddziaływania łopatek. Udało się to w stosunku do wieńców stojanowych, dla których przy szeregu uproszczeniach, między innymi przy założeniu, że $\sin\gamma c_m \frac{\partial c_m}{\partial m} = 0$ wyrowadzono formuły określające rozkład parametrów za takimi wieńcami. Wydaje się, że metody te mają większą wartość poglądową aniżeli praktyczną.

Podstawową wadą wyżej opisanych metod jest to, że parametry określające geometrię linii prądu otrzymuje się na podstawie rozkładu parametrów przepływu w przestrzeniach międzywieńcowych, podczas gdy w przeważającej mierze układ przepływowy wypełniają wieńce łopatkowe.

2.4. Model przepływu przez wieńce o długich kanałach międzyłopatkowych. W odróżnieniu od wyżej rozpatrywanych modeli przepływu, gdzie zagadnienie stawiane jest w przestrzeniach międzywieńcowych, w niniejszym przypadku analizuje się przepływ w wyłącznie w przestrzeni międzyłopatkowej. Stąd w równaniach równowagi pojawia się człon odpowiadający oddziaływaniu łopatek na strumień. Odpowiednie równanie dla kierunku promieniowego przyjmuje więc postać:

$$(2.12) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{c_u^2}{r} + \frac{c_m^2}{r_k} \cos\gamma - c_m \frac{\partial c_m}{\partial m} \sin\gamma + F_{2r}$$

gdzie: F_{2r} jest składową promieniową siły oddziaływania łopatek. Rozwiązania poszukuje się przy założeniu osiowej symetrii przepływu co inaczej odpowiada analizie przepływu przez pewien „fikcyjny” wieńiec o nieskończonej liczbie łopatek.

Jakkolwiek pojęcie „długiego kanału międzyłopatkowego” nie jest ściśle sprecyzowane to można uznać, że dotyczy to wieńców gdzie względna podziałka i wysokość spełniają relacje $t/l < 0,8$; $h/l < 0,8$.

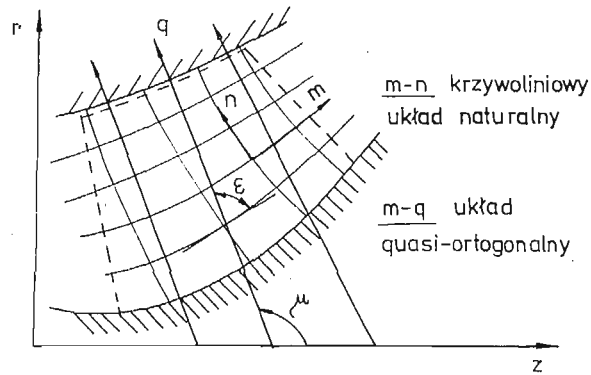
Zagadnienie analizy przepływu przy tak sformułowanym modelu zostało postawione w pracy [18] jak również w [54] i [55], głównie dla wieńców typu osiowo-promieniowego o długich kanałach prowadzących czynnik. Prowadząc rozważania w układzie współrzędnych normalnych (naturalnych) końcowe równania przepływu otrzymano tu w postaci

$$(2.13) \quad \frac{\partial w}{\partial n} + Pw + Q = 0,$$

gdzie przez P i Q oznaczono odpowiednie wyrażenia funkcyjne.

Według powyższej metody w pracy [23] przeprowadzono analizę przepływu w wirniku promieniowo-osiowej turbiny wodnej typu Francisca, natomiast w pracy [62] przeprowadzono analizę parametrów przepływu w wieńcu wirnikowym stopnia sprężającego z merydionalnym przyspieszeniem strumienia, również charakteryzującym się stosunkowo długim kanałem międzyłopatkowym.

Prowadzenie obliczeń w układzie współrzędnych krzywoliniowych (naturalnych) jest niezmiernie utrudnione przez zmiany położenia punktów węzłowych siatki przepływu w trakcie kolejnych iteracji. Problem uproszczenia procedur obliczeniowych przez wprowadzenie quasi-ortogonalnej siatki przepływu (rys. 5) rozpatrzono w pracy [25], [48],



Rys. 5

[63], [87]. Natomiast całkowanie równań wzdłuż dowolnych krzywych, w zastosowaniu do analizy parametrów strumienia w wirnikach turbin wodnych, przedstawiono w pracy [101].

W wyżej wymienionych pracach przepływ traktowany jest przeważnie jako izentropowy, a także jako homoenergetyczny. Ogólniejsze ujęcie zagadnienia analizy z uwzględnieniem strat przepływu jest rozpatrywane przez szereg autorów [21], [35], [48], [87]. Nieodwracalność zjawiska można ująć przez aproksymację przemian rzeczywistych politropami [48], względnie zadając rozkład współczynnika strat przepływu [21], [35] lub entropii [87]. W pracy [48], przy zastosowaniu quasi-ortogonalnego układu współrzędnych, otrzymano w ten sposób zasadnicze równanie przepływu w formie

$$(2.14) \quad w \frac{dw}{dq} = Aw^2 + Bw + C$$

gdzie q oznacza kierunek wyznaczony przez dowolną krzywą, zaś A , B , C są wyrażeniami funkcyjnymi.

Otrzymane natomiast w pracy [35] równanie

$$(2.15) \quad w \frac{\partial w}{\partial n} + Pw^2 + Qw + T = 0,$$

gdzie:

$$P = \frac{\sin^2 \beta}{r_k} + \frac{\operatorname{ctg} \beta_p \sin \beta \cos \beta}{r} + (\operatorname{ctg} \beta_p \sin \gamma - \operatorname{tg} \delta \cos \gamma) \sin \beta \frac{\partial \cos \beta}{\partial m}$$

$$Q = \sin \beta \left[2\omega \operatorname{ctg} \beta_p + (\operatorname{ctg} \beta_p \sin \gamma - \operatorname{tg} \delta \cos \gamma) \cos \beta \frac{\partial w}{\partial m} \right],$$

$$T = -\frac{\partial h_0^*}{\partial n} + \frac{1}{2} \frac{\partial (\zeta w_0^2)}{\partial n} + (\operatorname{ctg} \beta_p \sin \gamma - \operatorname{tg} \delta \cos \gamma) \sin \beta \cos \beta \frac{w_0^2}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial m}$$

podobne w formie do poprzedniego, stanowi rezultat uogólnienia modelu przepływu w stosunku do zagadnienia rozpatrzonego w pracach [18], [54], [55].

W przedstawionych metodach przepływ analizuje się wyłącznie na odcinku wieńca łopatkowego. Jest to jednocześnie jedna z głównych przyczyn znacznych błędów w określeniu parametrów w strefach brzegowych przy krawędzi wlotowej i wylotowej łopatek. Na przepływ w tych strefach bardzo istotnie wpływają warunki panujące w obszarach sąsiednich, co w obliczeniach nie znajduje swojego odbicia. To, że metody te zostały najwcześniej wykorzystane praktycznie wynika z regularnych kształtów o znacznej krzywiznie linii tworzących kanały przepływowe w przekroju merydionalnym (osiowym) ułatwiających wyznaczenie geometrii linii prądu i przyspieszających obliczenia.

2.5. Ogólny model przepływu — metody krzywizny linii prądu. Pod pojęciem ogólnego modelu przepływu należy rozumieć model bazujący na równaniach ruchu Eulera w których oddziaływanie łopatek na strumień modelowane jest odpowiednią siłą masową, przy czym zagadnienie stawia się w całym obszarze przepływu tzn., że przepływ rozpatruje się jednocześnie tak w przestrzeniach międzywieńcowych jak i międzyłopatkowych dla dowolnej geometrii układu przepływowego, nie czyniąc żadnych wcześniejszych założeń o charakterze rozwiązania.

W przybliżony sposób ujmuje się tu także dyspację energii związaną ze stratami przepływu. Obecnie we wszystkich placówkach zajmujących się badaniami zjawisk przepływu usilnie dąży się do praktycznego zrealizowania, w formie odpowiednio uniwersalnych programów obliczeniowych na EMC, metod analizy według przedstawionego wyżej modelu przepływu.

Jednym z trudniejszych problemów w metodach bazujących na pojęciu linii prądu jest wyznaczenie jej geometrii na podstawie położenia punktów węzłowych w poszczególnych przekrojach obliczeniowych. Poszukuje się tu funkcji aproksymujących na których można by wykonać m.in. takie operacje analityczne jak różniczkowanie z rozsądną dokładnością. Metody te zwane są metodami „krzywizny linii prądu” (streamline curvature method) [22], [25], [33], lub też metodami „ciągłości linii prądu” (streamline continuation method) [13].

Należy zwrócić tu uwagę, że nazwa metody krzywizny linii prądu (MKLP) pojawiła się dopiero przy rozwiązywaniu ogólnego modelu przepływu, jakkolwiek pojęcie krzywizny linii prądu występuje także w metodach bazujących na prostszych modelach (uogólniony model stopnia stożkowego, model przepływu falistego, model przepływu przez wieńce łopatkowe o długich kanałach). Nazwa ta nie w pełni oddaje więc specyfikę metody i według autora poprawniejsza byłaby nazwa metoda ciągłości linii prądu, która użyta została w pracy [13]. Uwzględniając jednak fakt, że wcześniej utrwaliła się i jest w użyciu nazwa MKLP, również w dalszych rozważaniach utrzymana zostanie ta nazwa.

W literaturze niewiele jest prac dotyczących analizy przepływu osiowo-symetrycznego i ujmujących w zadawalający sposób ogólny model przepływu. Do jednej z pierwszych należy zaliczyć pracę STIEPANOWA [93], w której między innymi rozpatrzono możliwość uwzględnienia strat w równaniach przepływu, a także przeanalizowano problem dokładności opisu osiowo-symetrycznego ruchu płynu równaniami uśrednionymi względem czasu i współrzędnej obwodowej.

Dalsze rozwinięcie teoretycznych podstaw analizy przepływu osiowo-symetrycznego zostało dokonane przez SIROTKINA [86], [87]. Zastrzeżenie może budzić tu realizacja założenia regularności linii prądu. Dotyczy to także pracy [82], w której podano m.in. wyniki analizy przepływu przez stopnie turbinowe.

Stosunkowo kompletny model przepływu przedstawiono w pracach [36], [38] w odniesieniu do czynnika nieściśliwego, oraz w pracy [37] w odniesieniu do płynu ściśliwego, gdzie zagadnienie analizy ujęto w formie uwzględniającej wymogi programowania na EMC. Rozwiązanie równania końcowego typu

$$(2.16) \quad c_m \frac{\partial c_m}{\partial r} + Ac_m^2 + Bc_m + C = 0,$$

gdzie A , B , C są wyrażeniami funkcyjnymi określonymi osobno dla każdego podobszaru przepływu, uzyskuje się tu na drodze iteracyjnej.

Inny sposób przedstawienia linii prądu wykorzystano w pracy [44], gdzie merydionalne linie prądu będące funkcjami współrzędnej osiowej $r_m = r_m(z)$ przy pomocy relacji

$$(2.17) \quad t_m = \int_{z_0}^z \frac{dz}{c_z}; \quad c_z = f(r_m, z)$$

przetransformowano na funkcję czasu. Podane w tej pracy wyniki eksperymentu wskazują na dostateczną ich zgodność z obliczeniami.

Metody opierające się na pojęciu linii prądu mają tę zaletę, że w równaniach opisujących przepływ łatwo można wyodrębnić poszczególne człony dokonując fizycznej interpretacji każdego z nich. Szeroka analiza wpływu takich członów występujących w równaniu równowagi promieniowej została przeprowadzona przez SMITHA [52].

W przedstawionych pracach większy nacisk położono na odpowiednie ujęcie modelu matematycznego mniej natomiast uwagi poświęcono praktycznej realizacji tych metod i konstrukcji efektywnych algorytmów obliczeniowych, co przy tego rodzaju metodach stanowi nierzadko o ich przydatności.

Zagadnieniem obliczeń numerycznych poświęcono rozdział w książce HORŁOCKA [22], pewne procedury podano także w pracach [37], [38], zaś w pracy [49] rozpatrzono problem numerycznego wyznaczania charakterystyk linii prądu wraz z analizą stosowanych w tym względzie metod.

Metoda rozwiązywania sformułowanych w analizie przepływu zagadnień brzegowych oparta jest w ogólności na koncepcji rozwiązywania równań różniczkowych „metodą prostych”. Z góry założone tu iteracyjne dochodzenie do ostatecznego rozwiązania, polegające na tym, że w jednym kroku obliczeniowym zakłada się charakterystyki geometryczne linii prądu a w następnym się je oblicza i przyjmuje do kolejnego kroku, wyłania jednakże kompleks problemów związanych ze stabilnością i zbieżnością procedur obliczeniowych. W trakcie kolejnych obliczeń iteracyjnych obserwuje się tu zjawisko „przenoszenia błędów”. Tym zagadnieniom, jak i problemom zbieżności i dokładności metod obliczeń numerycznych, wiele uwagi poświęcono w pracy [61]. Dla zabezpieczenia zbieżności procesu iteracyjnego wprowadza się najczęściej tzw. współczynniki (czynniki) relaksacji

[22], [37], [72], [73], [82], przy czym znajdują one zastosowanie przy określeniu nowych współrzędnych linii prądu i prędkości

$$(2.18) \quad \begin{aligned} r &= r^{(\mu)} + \omega_1 (r^{(\mu+1)} - r^{(\mu)}), \\ c_m &= c_m^{(\mu)} + \omega_2 (c_m^{(\mu+1)} - c_m^{(\mu)}), \end{aligned}$$

gdzie:

ω_1, ω_2 są czynnikami relaksacji, natomiast μ jest numerem przybliżenia.

Obecnie metody krzywizny linii prądu bazujące na ogólnym modelu przepływu są w dalszym ciągu rozwijane. Istotnym momentem jest tu ograniczenie ze względu na liczbę Macha. Jakkolwiek bowiem równanie (2.16) wraz z uzupełniającym równaniem ciągłości w formie

$$\dot{m} = 2\pi \int_0^a \rho c_m r \cos \varepsilon dq$$

(gdzie q jest współrzędną quasi-ortogonalną) tworzą układ równań różniczkowo całkowy, to jednakże fakt zadawania odpowiednich warunków brzegowych na wlocie oraz wyznaczanie charakterystyk geometrycznych linii prądu na podstawie wszystkich punktów węzłowych danej linii powoduje, że układ ten ma charakter „eliptyczny”, czyli poprawność metody jest dotrzymywana dla liczb Macha $M_m = c_m/a < 1$. Ze względu na to, że ograniczenie to nie jest określone „jawnie”, w niektórych pracach [33] proponuje się stosowanie metod krzywizny linii prądu do wartości $M_m = 1.1$.

3. Metody analizy wykorzystujące pojęcie funkcji prądu

W odróżnieniu od metod opartych na pojęciu linii prądu, które rozwijały się stopniowo, dążąc do coraz bardziej ogólnego modelu, metody wykorzystujące pojęcie funkcji prądu, ze względu na bezpośredni związek z postęпами elektronicznej techniki obliczeniowej, znalazły zastosowanie od razu w ogólnym modelu przepływu.

Definycyjnie funkcja prądu w przepływie osiowo-symetrycznym opisana jest formułami

$$(3.1) \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = r\tau \rho c_z; \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = -r\tau \rho c_r$$

gdzie τ jest współczynnikiem zwężenia przekroju, zaś ψ jest funkcją prądu.

Klasyczną już pracą wykorzystującą pojęcie funkcji prądu, nie tracącą nic ze swej aktualności, jest praca Wu [65], dająca początek współczesnym metodom analizy przepływu przestrzennego. Przez długi okres czasu była ona jednak przykładem luki między opisanym tu analitycznym modelem przepływu a możliwościami obliczeniowymi. W swej bezpośredniej formie model Wu może być zastosowany tylko do wieńców izolowanych (pojedynczych). W bardziej ścisłym ujęciu, zagadnienie analizowane przez Wu zostało rozpatrzone przez SIROTKINA [89], tak w odniesieniu do modelu przestrzennego jak i quasi-trójwymiarowego. W odróżnieniu od pracy [65] gdzie siły masowe oddziaływania łopatek określa się na podstawie rezultatów poprzedniego przybliżenia, siły te wyrażone są tu bezpośrednio przez niewiadomą funkcję ψ .

Wykorzystując pojęcie funkcji prądu w analizie przepływu osiowo-symetrycznego dochodzi się do zagadnień brzegowych opisanych równaniami różniczkowymi o pochodnych cząstkowych, które dla liczby Macha $M_w = \frac{w}{a} < 1$ są typu eliptycznego, natomiast dla $M_w > 1$ — typu hiperbolicznego.

Rozpatrując zagadnienie algorytmów i procedur obliczeniowych można w zakresie metod analizy opartych na pojęciu funkcji prądu wyróżnić dwie podstawowe metody pozwalające na numeryczne rozwiązanie otrzymanych tu równań różniczkowych. Są to metoda różnic skończonych oraz metoda elementów skończonych. Stosowanie tych metod wiąże się z ogromem pracy obliczeniowej, wymagającym z kolei szybko działających maszyn cyfrowych o dużej pojemności pamięci. Takie możliwości powstały dopiero w ostatnim dziesięcioleciu i stąd też od tego momentu datuje się dynamiczny rozwój metod analizy osiowo-symetrycznego przepływu, oparty na pojęciu funkcji prądu. Publikacji z tego zakresu jest jeszcze niewiele przy czym najczęściej są one napisane dość ogólnikowo.

Warto wspomnieć także o próbie analitycznego rozwiązania zagadnienia przepływu na powierzchni S'_2 . W pracy [69] po transformacji obszaru przepływu na obszar prostokąta rozwiązania równania różniczkowego poszukiwano zgodnie z wariacyjną metodą Galerkiną. Ze względu na brak dalszych prac w tym zakresie metody analityczne nie zostały wyszczególnione.

3.1. Metody różnic skończonych (metody siatek) Metody te sprowadzają się w ogólnym zarysie do tego, że w obszarze płaskim w którym poszukiwane jest rozwiązanie wyróżnia się zbiór punktów będących punktami węzłowymi pewnej siatki, następnie równanie różniczkowe zastępuje się w tych węzłach odpowiednimi równaniami różnicowymi, które z kolei w oparciu o warunki brzegowe służą do wyznaczenia poszukiwanych wartości rozwiązania przybliżonego.

Pierwszą pracą bazującą na uproszczonym modelu Wu i wykorzystującą powyższą metodę obliczeń jest praca MARSHA [32]. Przedstawiono tu w ogólnym zarysie opis programu obliczeniowego metody analizy na średniej powierzchni przepływu. Otrzymane tu podstawowe równanie opisujące przepływ:

$$(3.2) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + E \frac{\partial \psi}{\partial x} = Q(x, y),$$

gdzie x i y są współrzędnymi ukośnej siatki przepływu, po aproksymacji wyrażeniami różnicowymi, sprowadzono do postaci macierzowej

$$(3.3) \quad [M] \cdot [\psi] = [Q],$$

gdzie $[M]$ jest macierzą pasmową, natomiast $[\psi]$ i $[Q]$ są macierzami kolumnowymi. Zapis macierzowy wykorzystano następnie przy konstrukcji programu obliczeniowego na EMC. Przedstawione wyniki wykazują dużą zgodność z rezultatami badań eksperymentalnych.

W pracy GOLDINA [68], w odniesieniu do metody siatek, rozważono możliwości otrzymania rozwiązania na drodze iteracyjnej, konkretne zaś zagadnienie analizy przepływu beztarciowego (izentropowego) przez stopnie osiowe zostało rozpatrzone w pracach BINIARISA [5], [6]. Rozwiązanie uzyskuje się tu na drodze iteracyjnych obliczeń relaksacyjnych. Przytoczone tu przykładowe wyniki obliczeń podobnie jak i w referacie [43] odnoszą się do stopni turbinowych.

W pracy [40] na bazie uogólnionego modelu przepływu z dyspacją energii sformułowano zagadnienie brzegowe sprowadzające się do rozwiązania nieliniowego eliptycznego równania różniczkowego o następującej postaci

$$(3.4) \quad A \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + 2B \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} + C \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + D \frac{\partial \psi}{\partial r} + E \frac{\partial \psi}{\partial z} = F,$$

opisującego przepływ płynu przez układy łopatkowe o dowolnej ich geometrii. W tej pracy, jak i we wcześniejszej [39] gdzie rozpatrzono tylko przepływ płynu nieściśliwego, algorytm obliczeń numerycznych oparto na iteracyjnej metodzie nadrelaksacyjnej. W pracach tych przedstawiono wyniki analizy przepływu w osiowym stopniu sprężającym. W pracy [12] podano natomiast rozwiązania osiowo-symetrycznego przepływu przez bezłopatkowy kanał wirnika promieniowego.

Interesującą procedurę iteracyjną rozwiązania zagadnienia przepływu przez stopnie maszyn wirnikowych przedstawiono w pracy [59]. Zasadniczą trudnością wydaje się tu być zachowanie stabilności procesu obliczeniowego.

Istotnym problemem w metodach funkcji prądu jest zagadnienie odpowiednio dokładnego uwzględnienia geometrii brzegów w równaniach różnicowych. W przypadku siatki prostokątnej [5], [6], [39], [40] uzyskuje się proste wyrażenia w węzłach wewnętrznych: skomplikowane natomiast dla węzłów leżących przy brzegu. W szczególnych przypadkach, pewnym ułatwieniem może być zastosowanie siatki równoległo-skośnej [32] lub transformacja obszaru przepływu w przekroju merydionalnym na obszar prostokąta [60], [69], [76], [77] co z kolei pozwala na stosowanie siatki prostokątnej.

W zależności od prędkości przepływu zmienia się typ równania (3.4). I tak przy założonym rozkładzie kątów łopatkowych równanie to jest eliptyczne dla liczb $M_w = w/a < 1$, natomiast przy założonym rozkładzie rc_n (jak np. w przestrzeniach międzywieńcowych) eliptyczność jest zachowana dla liczb $M_m = c_m/a < 1$ [40]. Ta dwoistość ograniczeń może być wykorzystana do budowy odpowiednich algorytmów obliczeń przepływów przy $M_w > 1$. Rozpatrzone wyżej prace dotyczą wyłącznie rozwiązywania zagadnień typu eliptycznego.

Ważnym kierunkiem rozwoju metod obliczeniowych jest opracowanie efektywnych procedur numerycznych dla analizy przepływów transonicznych i naddźwiękowych w sprężarkach [14], [50] jak i ostatnich stopniach turbin [77]. Równania rządzące przepływem naddźwiękowym mają w tym zakresie charakterystyki rzeczywiste i stąd też do wyznaczenia takich przepływów zastosowano metodę charakterystyk [14], [50] w powiązaniu z metodami różnic skończonych.

Mając na uwadze dynamiczny rozwój techniki obliczeniowej można przewidywać dalszy rozwój metod opartych na pojęciu funkcji prądu i uwzględniających coraz bardziej ogólny model przepływu [92].

3.2. Metody elementów skończonych. Ostatnie lata to okres burzliwego rozwoju metody elementów skończonych, która znajduje sobie zastosowanie w różnych zagadnieniach fizyki i techniki. Jakkolwiek sama metoda elementów skończonych swoje początki związane ma z rozwiązywaniem zagadnień mechaniki budowlnej, to dzięki temu, że można ją sformułować również bezpośrednio na drodze matematycznej, wychodząc z równań

różniczkowych opisujących dane zagadnienie, znalazła m.in. także zastosowanie przy rozwiązywaniu problemów przepływu [66].

Do pierwszych opublikowanych prac przedstawiających zastosowanie metody elementów skończonych w odniesieniu do zagadnienia analizy przepływu przez wieńce łopatkowe należą prace ADLERA i KRIMERMANA [1] oraz HIRSCHA i WARZEE [20].

W pracy [20] końcowe równanie przepływu płynu sprowadzono do postaci quasi-harmonicznej

$$(3.5) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(k \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + Q = 0$$

zaś warunki brzegowe przedstawiono wyrażeniem

$$(3.6) \quad k \frac{\partial \psi}{\partial n} + \alpha(\psi - \psi_0) = 0.$$

Do rozwiązania powyższego zagadnienia zastosowano odmianę metody elementów skończonych polegającej na postępowaniu według ważonej metody residualnej Galerkina, gdzie funkcja wagi jest równa funkcji kształtu. Dyskretyzację oparto na czterobocznych krzywoliniowych izoparametrycznych elementach z 8 punktami węzłowymi umieszczonymi na ich brzegach. Rozpatrując zależności odnoszące się do poszczególnego elementu otrzymuje się standardową postać zbioru równań

$$(3.7) \quad [k]^e \{\psi\}^e = \{F\}^e$$

gdzie „macierz sztywności” (z analogii do problemu analizy naprężeń) określa się po przez

$$k_{i,j}^e = \int_E k \left(\frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) d\Omega$$

Zachodzi także

$$(3.8) \quad F_i^e = \int_E Q N_i d\Omega,$$

gdzie

N_i — funkcje kształtu.

Układ równań dla całego obszaru zapisuje się tu jako

$$(3.9) \quad [K] \{\psi\} = \{F\}$$

gdzie

$\{\psi\}$ jest macierzą kolumnową niewiadomych.

Układ równań (3.9) jest nieliniowy, co wymagało zastosowania procedury kolejnych przybliżeń. W algorytmie obliczeń wykorzystano tu także metodę relaksacji według formuły

$$(3.10) \quad \psi_i^{(\mu+1)} = \psi_i^{(\mu)} + \Omega [\psi_i^{(\mu+1)} - \psi_i^{(\mu)}],$$

gdzie Ω jest czynnikiem relaksacji

4. Metody jednego parametru

Dążąc do ominięcia trudności występujących przy rozwiązywaniu równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych metodami siatek powstało szereg metod, które można określić nazwą „jednego parametru” (w języku angielskim: method of single parameter [22]). W metodach tych zadając charakter zmian wybranej wielkości przepływu wzdłuż promienia, z jednym parametrem wymagającym dodatkowego określenia, równanie różniczkowe o pochodnych cząstkowych sprowadza się do równania różniczkowego zwyczajnego rzędu drugiego, z którego właśnie określa się zmienność wprowadzonego parametru wzdłuż kierunku przepływu. Metody jednego parametru posługują się uogólnionym, w stosunku do modelu cylindrycznego i stożkowego, modelem przepływu: rozpatruje się tu bowiem również przepływ w obszarach wieńców łopatkowych.

Jeżeli założy się rozkład prędkości osiowej c_z wzdłuż promienia w formie następującej [98]

$$(4.1) \quad c_z = c_{z\dot{s}r} \left[\bar{c}_{z\dot{s}r} + \lambda \sin \left(\frac{\nu-1}{\nu_z-1} \frac{\pi}{2} \right) \right]; \quad (\nu = r/r_{\dot{s}r}),$$

gdzie pierwszy człon charakteryzuje zmianę prędkości wynikającą z teorii stopnia cylindrycznego, zaś drugi jest poprawką uwzględniającą przyspieszenie promieniowe, to po wyznaczeniu z równania różniczkowego parametru λ jako zależności $\lambda = \lambda(z)$ uzyskuje się możliwość dość prostego określenia parametrów przepływu w różnych przekrojach wzdłuż kierunku przepływu. Za podstawę przyjmuje się wielkości na średnim promieniu. Należy zwrócić uwagę, że przyjęcie powyższego rozkładu prędkości jest niczym innym jak tylko hipotezą.

Korzystając z formuły

$$(4.2) \quad \varrho c_z = (\varrho c_z)_{\dot{s}r} \left[1 + \frac{\lambda}{2} (\nu^2 - 1) \right]$$

w pracach [4], [22] rozpatrzono przepływ ściśliwy przy niecylindrycznych ściankach ograniczających kanału przepływowego.

Bardziej ogólnym w tym przypadku wydaje się jednak być założenie rozkładu funkcji prądu ψ [81], [83] jako

$$(4.3) \quad \psi = \psi_t(r, z) + \lambda(z)f(r, z)$$

gdzie rozkład $\psi_t(r, z)$ ujmuje wszystkie główne czynniki charakteryzujące przepływ według teorii stopnia cylindrycznego, natomiast $\lambda(z)f(r, z)$ jest poprawką uwzględniającą m.in. takie czynniki jak niecylindryczność przepływu. W pierwszym przybliżeniu funkcję $f(r, z)$ przyjmuje się jako paraboliczną

$$(4.4) \quad f(r, z) = r_z(z)r_w(z) - 2rr_{\dot{s}r}(z) - r^2$$

Zgodnie z powyższymi formułami, po przekształceniu równań przepływu, uzyskuje się równanie różniczkowe typu

$$(4.5) \quad A \frac{d^2 \lambda}{dz^2} + B \frac{d \lambda}{dz} + C \lambda = D$$

które pozwala określić zależność $\lambda = \lambda(z)$.

Powyższymi metodami można w stosunkowo prosty i szybki sposób badać wpływ niektórych cech geometrycznych wieńców łopatkowych na parametry przepływu. Należy jednak pamiętać o tym, że poprawność otrzymanych wyników w bardzo dużym stopniu zależy od zgodności hipotetycznego rozkładu obranej wielkości przepływu z rozkładem rzeczywistym.

5. Metody tarczy wirowej

W metodzie tarczy wirowej (w jęz. ang. Actuator Disc Theory [22], w jęz. niem.: Wirbelscheibenmethode [46]) wieńiec łopatkowy zamienia się ekwiwalentną pierścieniową tarczą wirów o szerokości zerowej, wywołującą miejscowy przyrost składowej prędkości obwodowej. Model przepływu bazuje tu najczęściej na uproszczonym równaniu równowagi promieniowej, zaś zasadnicze rezultaty dotyczą płynu nieściśliwego.

Metody tarczy wirowej opisane są szerzej w pracach [22], [46]. Mają one swoje znaczenie przy rozpatrywaniu odwrotnego zagadnienia hydrodynamiki, pozwalając ocenić rozkłady prędkości w pewnej odległości od wieńca łopatkowego, bądź też określać wzajemne oddziaływanie wieńców. Można jednak stwierdzić, że ze względu na „sztuczność” modelu przepływu, metody tarczy wirowej nie znajdują większego praktycznego zastosowania.

6. Przegląd literatury krajowej

Mimo niemałego już krajowego potencjału w dziedzinie budowy takich maszyn wirnikowych jak turbiny, pompy i wentylatory, można zauważyć, że nie jest on poparty odpowiednim poziomem rozwoju prac podstawowych i opracowań aplikacyjnych z zakresu badania przepływu w tych maszynach.

Przynajmniej częściowym potwierdzeniem tego stanu są zakupy licencji konstrukcyjnych turbin energetycznych, pomp i wentylatorów. Świadczy o tym również przegląd prac z mechaniki płynów z dziesięciolecia 1958—1967 przeprowadzony w pracy [9], a także przegląd dorobku i ocena aktualnego stanu mechaniki cieczy i gazów w Polsce dokonana na I Krajowej Konferencji Mechaniki Cieczy i Gazów w 1974 r. w Jaszowcu. W referatach przeglądowych [28], [29] tej konferencji podkreślono m.in. konieczność opracowania pełnowartościowych metod numerycznego rozwiązywania zagadnień osiowo-symetrycznego i trójwymiarowego przepływu przez wieńce i stopnie maszyn wirnikowych „wobec na ogół prymitywnych metod stosowanych w kraju przy obliczaniu przepływu przez stopnie maszyn przepływowych” [29].

Prac dotyczących badania przepływu osiowo-symetrycznego jest niewiele. Wymienić tu należy książkę TULISZKI [56] gdzie rozpatrzono metodę wyznaczania rozkładu prędkości w szczelinach międzywieńcowych przy założeniu cylindryczności powierzchni ograniczających kanał przepływowy przy czym falistość linii prądu ujęto podobnie jak w pracy [17].

Przedstawiony tu sposób postępowania ma raczej większe znaczenie poglądowe aniżeli praktyczne. Praca [7] mimo tytułu traktującego o przepływie przestrzennym w gruncie

rzeczy dotyczy bardzo uproszczonego modelu przepływu stożkowego, natomiast praca [26] ze względu na szereg założeń upraszczających, a także małą przejrzystość nie posiada walorów użytkowych. Interesującą koncepcję formułowania zagadnienia trójwymiarowego przepływu jako zagadnienia wariacyjnego, głównie jednak w odniesieniu do zadania projektowego przedstawił KRAJEWSKI w pracy [27]. Nie znalazła ona jednak praktycznego zastosowania.

Pewnym przyczynkiem do rozwoju metod obliczeniowych są prace doktorskie [12], [41], [62]. Przedstawione w nich algorytmy jednak nie wykorzystują w pełni możliwości EMC decydujących o efektywności metod obliczeniowych.

Do prac bazujących już na współczesnym ujęciu problematyki teoretycznych badań mechanizmu przepływu przez wieńce łopatkowe można zaliczyć [35], [36], [37], [39], [40], [63].

7. Ocena dotychczasowych prac badawczych

Z przeprowadzonego przeglądu literatury wynika, że zagadnienie analizy przepływu stanowi temat wielu prac, przy czym podkreślić należy, że większość z liczby cytowanych prac powstała po roku 1970. Rozwój metod analizy obserwowany w ostatnim 15-leciu wiąże się bezpośrednio z postępami elektronicznej techniki obliczeniowej.

Stąd też szereg metod bazujących na prostych modelach przepływu, które poprzednio miały swoje uzasadnienie, w chwili obecnej tracą powoli rację bytu. Należy także podkreślić, że o ile pewne uproszczone modele przepływu mogą być jeszcze — uwzględniając nagromadzone doświadczenia — zastosowane z dobrym skutkiem do zagadnień syntezy układów łopatkowych, to w zagadnieniach analizy ich przydatność jest wielce problematyczna i uzasadnienie znajdują tylko metody oparte na ogólnych modelach przepływu.

Do metod pozwalających na obliczeniową realizację ogólnego modelu przepływu należy metoda krzywizny linii prądu (MKLP) oraz metoda funkcji prądu (MFP) w swych dwóch odmiennych wariantach wykorzystujących metodę różnic skończonych (MRS) względnie metodę elementów skończonych (MES). Trudno jest wydać jednoznaczny sąd odnośnie absolutnej wyższości którejsz z tych metod, gdyż zawsze istnieją pewne zagadnienia łatwiej poddające się analizie przy użyciu ściśle określonej metody. Oceniając jednak stan obecny można dokonać pewnych porównań i oceny poszczególnych metod.

Spśród przytoczonych wyżej metod, metoda KLP jest z pewnością najbardziej „subtelna” już chociażby ze względu na zastosowanie przy rozwiązywaniu równań tzw. „metody prostych”. Mając na uwadze nie rozwiązany jeszcze w pełni problem stabilności, zbieżności i dokładności obliczeń numerycznych, wymaga ona znacznego doświadczenia w prowadzeniu obliczeń. Wydaje się, że pewne zalety tej metody, w porównaniu z innymi metodami, uwidaczniają się w przypadku analizy pola przepływu w wieńcach typu osiowo-promieniowego, w których linie prądu posiadają wyraźnie określoną krzywiznę. Metoda ta zawodzi w przypadku nieregularnych brzegów obszaru przepływu. Należy podkreślić, że w literaturze przedmiotu, MKLP jest dotychczas najszerzej opisana, co nie znaczy jednak, że wyczerpująco. Oceniając perspektywy zastosowania tej metody, należy sądzić, że w coraz większym stopniu będzie ona wypierana przez MFP.

Ocena metody funkcji prądu w swej odmianie wykorzystującej metodę z różnic skończonych w dużym stopniu uzależniona jest od typu zastosowanej siatki przepływu. Dysponując algorytmem obliczeniowym bazującym na transformacji obszaru przepływu w celu zastosowania siatki prostokątnej, lub też algorytmem opartym na siatce krzywoliniowej, ocena tej metody w stosunku do pozostałych wypadów bardzo korzystnie. W tych przypadkach siatka obliczeniowa dobrze wypełnia przekrój kanału przepływowego, rozwiązując tym samym problem odpowiedniego uwzględnienia geometrii brzegu obszaru. Na korzyść przemawia także fakt, że przy rozpatrywaniu zagadnień dokładności, stabilności i zbieżności obliczeń numerycznych wykorzystuje się tu nagromadzone doświadczenia z rozwiązywania równań fizyki matematycznej. Jeżeli chodzi o ocenę czasu obliczeń na maszynie cyfrowej, to przeprowadzony przez autora eksperyment obliczeniowy wykazał, że metoda MFP+MRS charakteryzuje się w odniesieniu do metody MKLP krótszymi czasami obliczeń.

Metoda elementów skończonych znajduje się dopiero w początkowym stadium rozwoju i jej stan zaawansowania w zakresie rozwiązywania problemów mechaniki przepływów przez układy łopatkowe zdeterminowany jest raczej doświadczeniem wyniesionym z zastosowania tej metody w innych pokrewnych dziedzinach mechaniki. Pewną tego korzyścią jest możliwość wykorzystania niektórych gotowych podprogramów. Zalety MES to przede wszystkim bardzo dobre uwzględnienie geometrii brzegów obszaru obliczeniowego oraz w pewnej mierze łącząca się z tym wysoka dokładność obliczeń. Szerszego naświetlenia wymagają natomiast zagadnienia stabilności i zbieżności obliczeń. MES jest obecnie ubogo udokumentowana w literaturze i należy się liczyć z tym, że w miarę pojawienia się dalszych prac, zakres jej zastosowań będzie coraz większy.

Należy zauważyć, że wyżej opisane metody posiadają tę zasadniczą wadę, że można stosować je w zasadzie tylko do przepływów poddźwiękowych. W zakresie naddźwiękowym procedury obliczeniowe opierają się na metodzie charakterystyk, przy czym zagadnienie opracowania odpowiednio dokładnych i stosunkowo szybkich w praktycznym zastosowaniu metod analizy jest tu w dalszym ciągu aktualne. Problemom obliczeń przepływów transonicznych poświęcona jest m.in. praca [42].

Spośród opisanych trzech metod: MKLP, MFP+MRS oraz MFP+MES, najbardziej efektywną, biorąc pod uwagę całość działań prowadzących do otrzymania odpowiednio dokładnego wyniku, w ocenie autora, jest metoda MFP+MRS.

Postępy elektronicznej techniki obliczeniowej mogą z czasem dać pierwszeństwo metodzie MFP+MES.

Dalszy rozwój metod analizy wiąże się z opanowaniem pełnego modelu quasi-trójwymiarowego przepływu płynu, w którym oprócz zagadnień przepływu w tzw. strumieniu głównym dochodzą zagadnienia przepływu w warstwach przyściennych.

Zestawienie ważniejszych oznaczeń

- c — prędkość bezwzględna
- h^* — rotacja całkowita
- m, n — współrzędne w układzie naturalnym
- p — ciśnienie

r, φ, z — współrzędne w układzie cylindrycznym

r_k — promień krzywizny linii prądu

S_1, S_2 — oznaczenia powierzchni przepływu

w — prędkość względna

β — kąt położenia wektora prędkości względnej do kierunku obwodowego

β_p — kąt powierzchni S'_2 przy $r = \text{const}$ względem kierunku obwodowego

γ — kąt nachylenia merydionalnej linii prądu do osi z

δ — kąt nachylenia powierzchni S_2 przy $z = \text{const}$ względem kierunku promieniowego

ζ — współczynnik strat przepływu

ρ — gęstość płynu

ψ — funkcja prądu

Indeksy

i — dotyczy kolejnego punktu na linii prądu

m — dotyczy kierunku wzdłuż merydionalnej linii prądu

o — dotyczy wielkości w przekroju o znanych parametrach: na przykład na wlocie do układu

r, u, z — dotyczy składowych w układzie r, φ, z

Literatura cytowana w tekście

1. D. ADLER, Y. KRIMERMAN, *The Numerical Calculation of the Meridional Flow Field in Turbomachines Using the Finite Element Method*. Israel Journal of Technology, Vol. 12 (1974), pp. 268—274.
2. K. BAMMERT, K. FIELDER, *Zur Auslegung von axialen thermischen Turbomaschinen*. VDI-Z Nr 36, 104 (1962).
3. K. BAMMERT, K. FIEDLER, *Die Strömung in axialen Turbomaschinen*. Ingenieur-Archiv, Bd. XXXIII (1964).
4. G. S. BEAVERS, *A Parameter Theory for a Compressible Flow Through Variable Area Turbomachines*. AR Council, Rep. 25, 029 (1963).
5. S. BINIARIS, *Die Berechnung der quasideridimensionalen reibungs-freien kompressiblen Strömung in axialen Turbomaschinen*. VDI — Berichte Nr 193 (1973).
6. S. BINIARIS, *The Calculation of the Quasi — Three-Dimensional Flow in an Axial Gas Turbine*. Trans. ASME, Journal of Engineering for Power, April (1975).
7. E. BŁAŻKO, *Obliczenia przepływu przestrzennego w zmiennych warunkach pracy ostatniego stopnia turbiny kondensacyjnej*. Zbiór prac z III Konferencji „Technologia Przepływowych Maszyn Wirnikowych”, Rzeszów 1973.
8. H. E. BRACHETTI, *Beitrag zur mehrdimensionalen Berechnung der Strömung durch Dampfturbinen*. Energie, Nr 2, Jahrg. 16 (1964).
9. I. BUKOWSKI, W. PROSNAK, *Kierunki rozwoju mechaniki płynów w dziesięcioleciu 1958—1967*. Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 3, 7, (1969).
10. W. R. DAVIS, D. A. J. MILLAR, *A Comparison of the Matrix and Streamline Curvature Methods of Axial Flow Turbomachinery Analysis, From a User's Point of View*. Trans. ASME, Journal of Engineering for Power, October (1975).
11. M. E. DEJC, B. M. TROJANOVSKI, *Untersuchung und Berechnung axialer Turbinenstufen*. VEB Verlag Technik, Berlin (1973).
12. B. DEPTUŁA, *Przepływ czynnika nielepkiego przez promieniowe wieńce wirujące*. Politechnika Poznańska (1971) r., Praca doktorska.

13. L. S. DZUNG, C. SEIPPEL, *Aerodynamic Aspects of Blading Research*. Flow Research on Blading, Elsevier Publ. Company. Amsterdam—London—New York, (1970).
14. H.-H. FRÜHAUF, *Ein Differenzverfahren für die axialsymmetrische Überschallströmung in rotierenden Ringgittern mit lokalen Unterschallgebieten*. Forschung Ing.-Wesen, Nr 5, Bd 40 (1974).
15. H. GALLUS, *Results from Research Projects and the Determination and Reduction of Losses in Turbo-machines*. Łódź, 9.06, (1976), (Referat).
16. A. W. GOLDSTEIN, *Axisymmetric Supersonic Flow in Rotating Impellers*. NACA Rep. 1083 (1951).
17. G. GYARMATHY, *Der Einfluss der Auslegungsparameter auf die radiale Strömungsverteilung in Axial-turbinenstufen*. Forsch. Ing.-Wesen, Nr 5 Bd 33 (1967).
18. G. T. HAMRICK, A. GINSBURG, W. M. OSBORN, *Method of Analysis for Compressible Flow Through Mixed-Flow Centrifugal Impellers of Arbitrary Design*. NACA Report 1082 (1952).
19. W. R. HAWTHORNE, R. A. NOVAK, *The Aerodynamics of Turbo-Machinery*. Annual Review of Fluid Mechanics, v. 1 (1969).
20. CH. HIRSCH, G. WARZEE, *A Finite-Element Method for Through Flow Calculations in Turbomachines*. Journal of Fluids Engineering, September (1976).
21. M. HOFFMEISTER, G. SEIFERT, *Über die Bestimmung der meridionalen Stromlinien in einem Diagonalgitter bei Unterschallströmung*, Maschinenbautechnik H. 7, 16 (1967).
22. J. H. HORLOCK, *Axial Flow Turbines* (1966), (tłum. w języku rosyjskim).
23. W. JANSEN, *Flow Analysis in Francis Water Turbines*. Trans. ASME, Nr 3, ser. A (1967).
24. D. JAPIKSE, *REVIEW-Progress in Numerical Turbomachinery Analysis*. Trans. ASME, Journal of Fluids Engineering, December (1976).
25. T. KATSANIS, *Use of Arbitrary Quasi-Orthogonals for Calculating Flow Distribution in a Turbomachine*, Trans. ASME, Journal of Engineering for Power, Nr 2, (1966).
26. B. KRAJEWSKI, *Nowa metoda obliczania przepływu przez wieńce maszyn wirnikowych*. Archiwum Budowy Maszyn, 3, 5 (1958).
27. B. KRAJEWSKI, *Variational Problems of the Theory of Threedimensional Flow Through Thermal Turbo-machinery*. Archiwum Mechaniki Stosowanej, 6, 15 (1963).
28. J. KRAL i inni, *Kierunki prac w dziedzinie mechaniki cieczy i gazów w świetle potrzeb krajowego przemysłu lotniczego*, I Krajowa Konferencja Mechaniki Cieczy i Gazów, Jaszowiec 1974. Referaty Przeglądowe, s. 109—126.
29. J. KRZYŻANOWSKI, *O niektórych aktualnych problemach maszyn przepływowych w dziedzinie mechaniki płynów*, I Krajowa Konferencja Mechaniki Cieczy i Gazów, Jaszowiec 1974. Referaty Przeglądowe, s. 127—139.
30. K. KUTARBA, A. WITKOWSKI, *Niektóre problemy analizy przepływu w wieńcach łopatkowych maszyn wirnikowych*. Zbiór prac z konferencji n.-t. „Wentylatory przemysłowe”, Gliwice—Katowice 1974
31. H. LORENZ, *Neue Theorie und Berechnung der Kreisellräder*. München u. Berlin: Oldenbourg (1906)
32. H. MARSH, *A Digital Computer Program for the Through-flow Fluid Mechanics in an Arbitrary Turbo, machine using a Matrix Method*. Reports and Memoranda, N 3509, July (1966).
33. R. A. NOVAK, *Streamline Curvature Computing Procedures for Fluid-Flow Problems*. Trans. ASME, Nr 4, ser. A (1967).
34. J. J. OTTE, *Rozkłady prędkości na wlocie i wylocie wirnika o stożkowym przepływie czynnika*. Zeszyty Naukowe Pol. Śl. Energetyka, z. 47, s. 113—127.
35. J. J. OTTE, *Równania przepływu płynu nieściśliwego w kanałach łopatkowych maszyn wirnikowych*. Zeszyty Naukowe Pol. Śl. Energetyka, z. 53, s. 131—143.
36. J. J. OTTE, *Osiowo-symetryczny przepływ płynu nieściśliwego w kanałach łopatkowych osiowych maszyn wirnikowych*, Archiwum Budowy Maszyn, 4, 22 (1975), s. 475—488.
37. J. J. OTTE, *A Method of Analysis of Axial-Symmetric Flow in Blade Channels of Turbines*. III Conference on Steam Turbines of Great Output, Gdańsk 1974. Prace IMP, Z. 70—72, s. 597—614.
38. J. J. OTTE, *Wyznaczenie pola prędkości i ciśnienia w kanałach łopatkowych osiowych maszyn wirnikowych przy przepływie płynu nieściśliwego*, Zeszyty Naukowe Pol. Śl. Energetyka, z. 56.
39. J. J. OTTE, *Zagadnienia analizy przepływu nieściśliwego w układach łopatkowych osiowych maszyn wirnikowych*, Praca Konkursowa PTMTS, Łódź 1975, (niepublik.).

40. J. J. OTTE, *Metoda analizy przepływu przez układy lopatkowe maszyn wirnikowych*. Politechnika Śląska, Gliwice 1976, Praca doktorska.
41. R. PIEPRZYK, *Praca wielostopniowych sprężarek osiowych z niewichrowanymi łopatkami*, Politechnika Poznańska (1970). Praca doktorska.
42. R. PIEPRZYK, M. CIAŁKOWSKI, *Analiza porównawcza istniejących metod obliczania osiowosymetrycznego przepływu przez osiowe wieńce sprężarek transonicznych*. Praca na zlecenie 52-016/77 MR. I. 26, Poznań 1978.
43. M. RAIS, *A Method of Solution of Three-dimensional Flow of a Nonviscous Fluid Through Axial Turbine and Some Practical Applications*. VI Konference Parni Turbiny Velkeho Vykonu, Plezeň, (1975).
44. A. RENAUDIN, E. SOMM, *Quasi Three-Dimensional Flow in a Multistage Turbine Calculation and Experimental Verification*, Flow Research on Blading, Elsevier Publ. Company. Amsterdam—London—New York (1970) pp, 51—87.
45. H. SAUER, *Die Formen der dreidimensionalen Strömungen in axialen Gasturbinen und ihr Einfluss auf das Betriebsverhalten* [Wissenschaftliche Zeitschrift der Universität Rostock] H. 6/7, Jahrg, 19. Mathem. — Naturwissenschaftliche Reihe (1970).
46. H. J. SCHRÖDER, *Die Wirbelscheibenmethode in Anwendung auf die Auslegung axialer Turbomaschinen*, Fortschr.-Berichte VDI-Z., Reihe 7., Nr 28 (1972).
47. C. SEIPPEL, *Räumliche Strömung durch vielstufige Turbinen*. Brown Boveri Mitt. Nr 3, (1958).
48. Y. SENOO, Y. NAKASE, *An Analysis of Flow Through a Mixed Flow Impeller*. Trans. ASME, ser. A, Nr 1 (1972).
49. M. R. A. SHAALAN, H. DANESHYAR, *A Critical Assesment of Methods of Calculating Slope and Curvature of Streamlines in Fluid Problems*, Institution of Mechanical Engineers. Proceedings 1972, Vol. 186.
50. H. SIMON, *Entwicklungsarbeiten an Überschallaxialverdichterstufen*. Technische Rundschau. Nr 16, 21 (1974).
51. L. H. SMITH jr, S. C. TRAUOGOTT, G. F. WISLICENUS, *A Practical Solution of a Three-Dimensional Flow Problem of Axial-Flow Turbomachinery*, Trans. ASME, July (1953).
52. L. H. SMITH jr, *The Radial Equilibrium Equation of Turbomachinery*. Trans. ASME, Journal of Engineering for Power, Nr 1. (1966).
53. A. STODOLA, *Dampf-und Gasturbinen*. V wyd. Berlin 1922, Springer Verlag.
54. W. TRAUPEL, *Die Theorie der Strömung durch Radialmaschinen*, Karlsruhe (1962). Verlag G. Braun.
55. W. TRAUPEL, *Thermische Turbomaschinen*. Bd 1, (1966). Springer Verlag.
56. E. TULISZKA, *Turbiny cieplne*. Warszawa (1973) WNT.
57. E. TULISZKA, *Wybrane zagadnienia przepływowe maszyn wirnikowych i działalność naukowo-badawcza Instytutu Techniki Ciepłej Politechniki Poznańskiej*, I Krajowa Konferencja Mechaniki Cieczy i Gazów, Jaszowiec (1974). Referaty Przeglądowe, s. 140—160.
58. M. H. VAVRA, *Aero-Thermodynamics and Flow in Turbomachines*. J. Wiley and Sons, New York (1960).
59. J. P. VEUILLOT, *Calculation of the Quasi Three-Dimensional Flow in a Turbomachine Blade Row* Trans. ASME, Journal of Engineering for Power, January (1977).
60. J. WACHTER, B. SCHULZ, *Numerische Berechnung stationärer quasi-dreidimensionaler Strömungen in Kanälen beliebiger Formgebung, dargestellt am Beispiel eines Radialverdichter-Umlenkraumes*, Forsch. Ing-Wesen, 5, 43 (1977).
61. D. H. WILKINSON, *Stability, Convergence, and Accuracy of Two-Dimensional Streamline Curvature Methods using Quasi-Orthogonals*, Institution of Mechanical Engineers. Proceedings 1969—60, Vol. 184, Pt3G(1).
62. A. WITKOWSKI, *Analiza przepływu w kanałach lopatkowych osiowego wieńca sprężającego z merydionalnym przyspieszeniem strunienia*. Gliwice, (1971). Praca doktorska.
63. A. WITKOWSKI, *Zastosowanie kwasiortogonalnych współrzędnych do obliczeń przepływu w wieńcach sprężających o przestrzenie ukształtowanych kanałach międzylopatkowych*. Zeszyty Naukowe Pol, Śl. nr 372, Energetyka z. 47, (1973).
64. H. WOLF, *Gegenwärtiger Stand und Ausblick bei der aerodynamischen Berechnung axialer thermischer Turbomaschinen*. Mitteilungen aus dem Kraftwerksanlagenbau der DDR, H. 1, (1974).

65. WU CHAUNG-HUA, *A General Theory of Three-Dimensional Flow in Subsonic and Supersonic Turbo-machines of Axial, Radial, and Mixed-Flow Types*. Trans. ASME, № 8 (1952).
66. O. C. ZIENKIEWICZ, *The Finite Element Method in Engineering Science*. McGraw-Hill, London (1971) (tłum. w języku polskim: Arkady Warszawa (1972)).
67. В. А. АБЛАМСКИЙ, *Расчет линий тока в меридиональном сечении осевой турбинной ступени*. Энергетическое машиностроение, выпуск 17 (1974).
68. А. В. ГОЛЬДИН, *Применение численных методов решения прямой осесимметричной задачи течения жидкости в проточной части гидромашин применительно к ЭЦВМ*. Энергомашиностроение, 4 (1969).
69. Ю. В. ГРЕЧАНИЧЕНКО, М. Е. ЛЕВИНА, *Расчет пространственного двупараметрического потока в ступени с произвольными меридиональными границами*. Энергетическое машиностроение, выпуск 1 (1966).
70. М. Е. ДЕЙЧ, Г. С. САМОЙЛОВИЧ, *Основы аэродинамики осевых турбомашин*. Москва 1959. Машгиз.
71. М. Е. ДЕЙЧ, Г. А. ФИЛИППОВ, *К расчету турбинных ступеней с длинными лопатками переменного профиля*. Теплоэнергетика 9 (1961).
72. Л. А. ДОФМАН, А. З. СЕРАЗЕТДИНОВ, М. Л. ЯСЕНОВСКАЯ, *Программирование расчета на ЭЦВМ вихревых течений идеальной жидкости в криволинейных кольцевых каналах*. Труды ЦКТИ, выпуск 74 (1966).
73. Л. А. ДОФМАН, *Численные методы в газодинамике турбомашин*. Ленинград (1974). Энергия.
74. Г. В. ЖУКОВСКИЙ, Ю. Н. МАЛЫШЕВ, *Приближенный расчет закрутки конусного потока в турбинных ступенях с длинными лопатками*. Труды ЦКТИ, выпуск 74 (1966).
75. М. И. ЖУКОВСКИЙ, *Аэродинамический расчет потока в осевых турбомашин*. Ленинград (1967). Машиностроение.
76. М. И. ЖУКОВСКИЙ, Ю. Е. КАРЯКИН, *Расчет вихревого течения газа в осесимметричных каналах*. Энергомашиностроение 7 (1971).
77. М. И. ЖУКОВСКИЙ, О. И. НОВИКОВА, Ф. Д. ПОПОВ, *Расчет пространственного потока в турбинных ступенях большой верности*. Теплоэнергетика 12 (1974).
78. Г. А. ЗАЛЬФ, *Тепловой расчет стационарных газовых турбин*. Москва—Ленинград (1964). Машиностроение.
79. Г. А. ЗАЛЬФ, В. В. ЗВЯГИНЦЕВ, *Тепловой расчет паровых турбин*. Москва—Ленинград (1961). Машиностроение.
80. И. И. КИРИЛЛОВ, *Теория турбомашин*. Изд. 2. Ленинград (1972). Машиностроение.
81. А. А. МОИСЕЕВ, А. М. ТОПУНОВ, Г. Я. ШНИЦЕР, *Длинные лопатки судовых турбин*. Ленинград (1969). Судостроение.
82. О. И. НОВИКОВА, *Расчет осесимметричного потока в проточной части осевых турбин*, Теплоэнергетика 4 (1965).
83. *Переменные режимы судовых турбинных установок*, НТО Судпрома, выпуск 82 (1966).
84. Г. Л. ПОДВИДЗ, *Расчет квазитрехмерного течения газа в межлопаточном канале осевой турбомашин*. Механика жидкости и газа 4 (1971).
85. В. Н. ПОКОМАРЕВ, Г. А. БОНДАРЕНКО, *К вопросу о реализации постоянства циркуляции в нецилиндрической турбинной ступени*. Известия вузов, Энергетика 6 (1972).
86. Я. А. СИРОТКИН, *Расчет осесимметричного вихревого потока невязкой сжимаемой жидкости в осевых турбомашин*. Изв. АН СССР. ОТН, Механика и машиностроение 2 (1961).
87. Я. А. СИРОТКИН, *Расчет осесимметричного вихревого течения невязкой сжимаемой жидкости в радиальных турбомашин*. Изв. АН СССР. ОТН, Механика и машиностроение 3 (1963).
88. Я. А. СИРОТКИН, *К постановке прямой задачи вихревого течения сжимаемой жидкости в турбомашин*, Инженерный журнал, т. III, выпуск 2 (1963).
89. Я. А. СИРОТКИН, *К постановке двумерных задач вихревого течения сжимаемой жидкости в турбомашин*, Инженерный журнал, т. 4, выпуск 2, (1964).
90. Я. А. СИРОТКИН, *Уравнения осредненного осесимметричного вихревого течения идеальной несжимаемой жидкости*. Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа 2 (1967).

91. Я. А. Сироткин, *Аэродинамический расчет лопаток осевых турбомашин*. Москва (1972). Машиностроение.
92. Я. А. Сироткин, *Прикладные задачи газодинамического расчета осевых турбомашин*. Труды Всесоюзной Конф. по Газотурбинным Установкам, Москва (1972).
93. Г. Ю. Степанов, *Гидродинамика решеток турбомашин*. Москва (1962).
94. Г. Ю. Степанов, *Гидродинамическая теория решеток*. Механика в СССР за 50 лет. т. 2, с. 103—152. Москва (1970).
95. Г. Ю. Степанов, *Некоторые современные задачи гидродинамики решеток турбомашин*. Труды Всесоюзной Конф. по Газотурбинным Установкам. Москва (1972).
96. Б. С. Стечкин и др., *Теория реактивных двигателей*. Москва (1956).
97. Г. И. Топаж, И. Э. Этинберг, *Уравнения осредненного движения жидкости в рабочем колесе гидромашин*, Труды ЦКТИ, выпуск 61 (1965).
98. А. М. Топунов, А. Г. Даниловский, *К вопросу решения прямой задачи расчета пространственного осесимметричного потока*, Известия вузов, Энергетика 11 (1964).
99. Ю. И. Швец, *Профилирование турбинных ступеней с учетом искривления линий тока в меридиональной плоскости*. Теплоэнергетика 7 (1964).
100. Я. И. Шнез, *Газовые турбины*. Москва (1960). Машгиз.
101. И. Э. Этинберг, *Методика расчета осесимметричного потока в гидротурбинах*. Энергомашинностроение 11 (1973).

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 lipca 1978 roku
