MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
2, 18 (1980)

NIEKTÓRE PROBLEMY NIELINIOWEJ TEORII POWŁOK

WOJCIECH PIETRASZKIEWICZ (GDAŃSK)

1. Wstęp

W pracy autora [1], w oparciu o publikacje do końca 1973 r., dokonano przeglądu różnych wariantów równań nieliniowej teorii pierwszego przybliżenia dla cienkich powłok sprężystych. Podano też krótki przegląd prac polskich z tej dziedziny oraz wskazano na niektóre nierozwiązane jeszcze problemy.

W ciągu ubiegłych ponad czterech lat nastąpił dalszy rozwój nieliniowej teorii powłok. Oprócz prac autora [2 - 11] w tej dziedzinie ukazały się monografie GALIMOWA [12], BRUSHA i ALMROTHA [13], AKSELRADA [14] oraz SZILKRUTA i WYRŁANA [15] a także artykuły przeglądowe LANGHAARA [16], SIMMONDSA [17] i WEINITSCHKE [18] gdzie podana jest obszerna dodatkowa bibliografia. Opublikowano też szereg oryginalnych prac [19 - 37] dotyczących podstawowych zagadnień nieliniowej teorii powłok. Niniejsza praca ma na celu przedstawienie niektórych dodatkowych w stosunku do podanych w [1] wyników uzyskanych ostatnio przez autora oraz krótkie omówienie związanych z tym wybranych rezultatów uzyskanych w innych opublikowanych ostatnio pracach.

Deformację otoczenia każdej cząstki ośrodka ciągłego można rozłożyć na trzy stany elementarne: sztywne przemieszczenie, czyste rozciągnięcie wzdłuż głównych kierunków odkształcenia oraz sztywny obrót skończony kierunków głównych. Część obrotowa deformacji opisywana jest zwykle albo przy pomocy tensora ortogonalnego $\boldsymbol{R}$, lub przez trzy kąty obrotu (zwykle kąty Eulera) lub też poprzez wektor obrotu skończonego $\boldsymbol{\Omega}$, [38, 39].

Już NOWOŻYŁOW [40] wskazał, że przy małych odkształceniach oraz wyeliminowaniu ruchu jako ciała sztywnego, w trójwymiarowym ciele sprężystym mogą wystąpić tylko małe obroty elementów materialnych, [41]. Jednakże dla ciał cienkich — belek, prętów cienkościennych, płyt i powłok — nawet przy małych odkształceniach mogą wystąpić duże obroty elementów materialnych ciała. Jest to istotna jakościowa różnica w zachowaniu się ciał cienkich w stosunku do ciał o trzech wymiarach tego samego rzędu. Wskazuje ona, że w nieliniowej mechanice powłok obrotowa część deformacji powinna odgrywać rolę znacznie większą, niż to ma miejsce dla zagadnień trójwymiarowych.

Jest rzeczą godną zastanowienia, że część obrotowa deformacji powłoki została opisana dopiero niedawno, w ramach nieliniowej teorii typu Kirchhoffa-Love'a w pracach SIMMONDSA i DANIELSONA [42, 43], którzy użyli wektora obrotu skończonego $\boldsymbol{\Omega}$ głównych kierunków odkształcenia jako jedną z dwóch podstawowych zmiennych niezależnych nieliniowej teorii powłok. Obrót elementu brzegowego powłoki opisany został przez

NOWOŻYŁOWA i SZAMINĘ [44], którzy użyli tu wektora całkowitego obrotu skończonego $\boldsymbol{\Omega}_t$. W tych pracach wektory obrotu skończonego zostały wprowadzone w sposób opisowy, bez ich powiązania z innymi zmiennymi kinematycznymi, jak przemieszczenie powierzchni środkowej lub tensor gradientu deformacji powłoki. W ramach teorii powłok typu Kirchhoffa-Love'a teoria obrotów skończonych została opracowana w [7, 8].

Ogólna teoria obrotów skończonych w powłokach podana została w [5, 10], gdzie jako przypadki szczególne uzyskano wiele zależności uproszczonych, słusznych dla nieliniowej teorii typu Kirchhoffa-Love'a, dla teorii geometrycznie nieliniowej oraz dla teorii pierwszego przybliżenia cienkich powłok sprężystych. Wprowadzenie pojęcia obrotu skończonego okazało się niezwykle pożytecznym i umożliwiło m.in. uzyskanie nowych wariantów geometrycznych i statycznych warunków brzegowych [5, 7, 9], różne modyfikacje układu równań podstawowych [9, 42, 43] oraz zbudowanie nowej klasyfikacji równań uproszczonych dla geometrycznie nieliniowej teorii cienkich powłok sprężystych przy ograniczonych obrotach [7, 8] (por. również [67, 68]).

Istnieje szereg praktycznie ważnych zadań zachowania się elementów powłokowych, których rozwiązanie wymaga uściślonych dwuwymiarowych zależności podstawowych. Wymieńmy tu np. obliczanie względnie grubych powłok przy nierównomiernych obciążeniach, określanie charakterystyk dynamicznych powłoki od szybkozmiennych obciążeń, zadania kontaktowe, obliczanie powłok o dużej anizotropii itp. Uściślenie zależności nieliniowej teorii powłok, przy założeniu liniowości rozkładu przemieszczeń na grubości powłoki, przedyskutowano w [5, 45].

Przy konstruowaniu różnych zależności geometrycznie nieliniowej teorii powłok szczególną uwagę należy zwrócić na sposób wprowadzenia uproszczeń słusznych przy małych odkształceniach. Okazuje się, że szereg wzorów i definicji pojawia się tutaj w postaci różnicy wielkości tego samego rzędu. Należy więc najpierw wykonać działania ściśle (t.zn. z uwzględnieniem skończonych odkształceń), dopiero w zależnościach wynikowych można pomijać człony małe w stosunku do jedności. Wprowadzanie uproszczeń w zależnościach pośrednich może doprowadzić do błędnych wzorów końcowych. Z tego też powodu w niniejszej pracy wszelkie zależności geometrycznie nieliniowej teorii powłok wyprowadzane są najpierw ściśle, bez nałożenia ograniczeń na odkształcenia. Uproszczenia wynikające z założenia małych odkształceń wprowadzane są dopiero do zależności wynikowych.

W p. 2 i 3 przedstawiono niektóre dodatkowe w stosunku do [1] zależności nieliniowej teorii powłok cienkich. Uzyskano je, nakładając więzy Kirchhoffa-Love'a na deformację powłoki. Zmianę grubości powłoki podczas deformacji uwzględniono dopiero w równaniach konstytutywnych powłok sprężystych. Taki uproszczony opis deformacji jest uzasadniony w ramach geometrycznie nieliniowej teorii pierwszego przybliżenia dla cienkich powłok sprężystych dyskutowanej w p. 4, która jest zasadniczym celem poprzednich zależności. Dalsze uproszczenia równań podstawowych, wynikające z konsekwentnie ograniczanych parametrów obrotu skończonego, przedyskutowano w p. 5. W p. 6 podano zasadnicze zależności ogólnej teorii obrotów skończonych w powłokach, a w p. 7 przedyskutowano możliwości uściślenia modelu geometrycznie nieliniowego obliczania powłok sprężystych. Na zakończenie w p. 8 podano niektóre problemy teoretyczne wymagające dalszych badań.

2. Obroty skończone w teorii powłok typu Kirchhoffa-Love'a

W niniejszej pracy stosujemy układ oznaczeń używany w [1, 5, 7]. Niech $\boldsymbol{r}(\vartheta^\alpha) = x^k(\vartheta^\alpha)\boldsymbol{i}_k$ oraz $\bar{\boldsymbol{r}}(\vartheta^\alpha) = \bar{x}^k(\vartheta^\alpha)\boldsymbol{i}_k$, $k = 1, 2, 3$, będą wektorami wodzącymi punktów powierzchni środkowej powłoki w konfiguracji odniesienia i aktualnej, $\bar{\boldsymbol{r}} = \chi(\boldsymbol{r})$, gdzie ϑ^α, $\alpha = 1, 2$, są współrzędnymi konwekcyjnymi na powierzchni, natomiast χ oznacza funkcję deformacji. W konfiguracji odniesienia geometrię powierzchni $\mathcal{M}$ opisują kowariantne wektory bazy $\boldsymbol{a}_\alpha = \boldsymbol{r}_{,\alpha}$, kowariantne składowe $a_{\alpha\beta} = \boldsymbol{a}_\alpha \cdot \boldsymbol{a}_\beta$ tensora metrycznego powierzchni z wyznacznikiem $a = |a_{\alpha\beta}|$, wektor jednostkowy $\boldsymbol{n} = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta}\boldsymbol{a}_\alpha \times \boldsymbol{a}_\beta$ prostopadły do powierzchni oraz kowariantne składowe $b_{\alpha\beta} = \boldsymbol{a}_{\alpha,\beta}\cdot\boldsymbol{n}$ tensora krzywizny $\boldsymbol{b}$ powierzchni. Tutaj $(\ )_{,\alpha}$ oznacza pochodną cząstkową względem ϑ^α, $\epsilon^{\alpha\beta}$ są składowymi tensora permutacji, a przez $(\ )_{|\alpha}$ będziemy oznaczać powierzchniową pochodną kowariantną na $\mathcal{M}$. Analogiczne wielkości geometryczne związane z powierzchnią odkształconą $\bar{\mathcal{M}} = \chi(\mathcal{M})$ wyróżniać będziemy kreską, np.: $\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$, $\bar{\boldsymbol{n}}$, $\bar{a}_{\alpha\beta}$, $\bar{a}$, $\bar{b}_{\alpha\beta}$, $\bar{\epsilon}_{\alpha\beta}$, $(\ )_{||\alpha}$.

Podczas deformacji powierzchni środkowej powłoki wektory bazy $\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha, \bar{\boldsymbol{n}}$ wyrażane są przez wektor przemieszczenia $\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{r} = u_\alpha \boldsymbol{a}^\alpha + w\boldsymbol{n}$ zależnościami

$$
\begin{aligned}
&\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha = l_{\lambda\alpha}\boldsymbol{a}^\lambda + \varphi_\alpha \boldsymbol{n}, && \bar{\boldsymbol{n}} = n_\mu \boldsymbol{a}^\mu + n\boldsymbol{n},\\
&l_{\lambda\alpha} = a_{\lambda\alpha} + u_{\lambda|\alpha} - b_{\lambda\alpha} w, && \varphi_\alpha = w_{,\alpha} + b^\lambda_\alpha u_\lambda,\\
&n_\mu = \sqrt{\frac{a}{\bar{a}}}\,\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon_{\lambda\mu}\varphi_\alpha l^\lambda_{.\beta}, && n = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{\bar{a}}}\,\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon_{\lambda\mu} l^\lambda_{.\alpha} l^\mu_{.\beta}
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

W ramach teorii powłok typu Kirchhoffa-Love'a zakładamy, że włókna materialne powłoki, które są proste i prostopadłe do $\mathcal{M}$, po deformacji powłoki pozostają prostymi i prostopadłymi do $\bar{\mathcal{M}}$ oraz nie wydłużają się. W ten sposób cała informacja o deformacji otoczenia punktów powierzchni środkowej powłoki zawarta jest w tensorze gradientu deformacji powłoki $\boldsymbol{G}$, który ma postać [1, 7]

$$
\boldsymbol{G} = \bar{\boldsymbol{a}}_\alpha \otimes \boldsymbol{a}^\alpha + \bar{\boldsymbol{n}} \otimes \boldsymbol{n}, \qquad \boldsymbol{G}^{-1} = \boldsymbol{a}_\alpha \otimes \bar{\boldsymbol{a}}^\alpha + \boldsymbol{n} \otimes \bar{\boldsymbol{n}},
\tag{2.2}
$$

gdzie przez $\otimes$ oznaczono operację iloczynu tensorowego.

Stosując twierdzenie o rozkładzie polarnym [38] do tensora nieosobliwego $\boldsymbol{G}$ przedstawimy go w postaci

$$
\boldsymbol{G} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{R}, \qquad \boldsymbol{G}^{-1} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{V}^{-1},
\tag{2.3}
$$

gdzie $\boldsymbol{U}$ i $\boldsymbol{V}$ są lewym i prawym tensorami rozciągnięcia, natomiast $\boldsymbol{R}$ jest tensorem obrotu skończonego. Tensory $\boldsymbol{U}$ i $\boldsymbol{V}$ są dodatnio określone i symetryczne, natomiast $\boldsymbol{R}$ jest tensorem ortogonalnym takim, że $\det\boldsymbol{R} = +1$.

Przy pomocy zależności $\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{r}$ oraz (2.3) deformacja otoczenia powierzchni środkowej powłoki została rozłożona analitycznie na trzy stany elementarne: czystą translację, czyste rozciągnięcie wzdłuż głównych kierunków odkształcenia oraz obrót skończony kierunków głównych. Rozkład (2.3) poprzez $\boldsymbol{U}$, spójny z opisem Lagrange'a, oraz rozkład (2.3) poprzez $\boldsymbol{V}$, spójny z opisem Eulera, różnią się tylko kolejnością nałożenia tych trzech stanów elementarnych.

Z (2.2) i (2.3) wynika, że

$$(2.4)\qquad \begin{aligned} \bar{a}_\alpha &= R\check{a}_\alpha = V\overset{*}{a}_\alpha, \quad \bar{n} = Rn, \quad \bar{a}^\alpha = R\check{a}^\alpha = V^{-1}\overset{*}{a}{}^\alpha \\ \check{a}_\alpha &= Ua_\alpha, \quad \overset{*}{a} = Ra_\alpha. \end{aligned}$$

Tutaj wprowadzone zostały dwie powierzchniowe bazy pośrednie: Lagrange'owska $\check{a}_\alpha$, powstająca z bazy a_α przy czystym jej rozciągnięciu wzdłuż głównych kierunków odkształcenia, oraz Eulerowska $\overset{*}{a}_\alpha$, powstająca z bazy a_α przez jej obrót skończony.

W dalszych rozważaniach wygodnym jest wprowadzenie symetrycznych tensorów odkształcenia współosiowych z U:

$$(2.5)\qquad \begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{2}(U^2-1) = \gamma_{\alpha\beta}a^\alpha\otimes a^\beta, \\ \gamma_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\bar{a}_{\alpha\beta}-a_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2}(l^\lambda_{.\alpha}l_{\lambda\beta}+\varphi_\alpha\varphi_\beta-a_{\alpha\beta}), \\ \frac{\bar{a}}{a} &= 1+2\gamma^\alpha_\alpha+2(\gamma^\alpha_\alpha\gamma^\beta_\beta-\gamma^\alpha_\beta\gamma^\beta_\alpha). \end{aligned}$$

$$(2.6)\qquad \begin{aligned} \check{\gamma} &= U-1 = \sqrt{1+2\gamma}-1 = \check{\gamma}_{\alpha\beta}a^\alpha\otimes a^\beta, \\ 2\gamma_{\alpha\beta} &= 2\check{\gamma}_{\alpha\beta}+\check{\gamma}^\lambda_\beta\check{\gamma}_{\lambda\beta}, \quad \check{a}_\alpha = (\delta^\lambda_\alpha+\check{\gamma}^\lambda_\alpha)a_\lambda, \\ \sqrt{\frac{\bar{a}}{a}} &= \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon_{\lambda\mu}(\delta^\lambda_\alpha+\check{\gamma}^\lambda_\alpha)(\delta^\mu_\beta+\check{\gamma}^\mu_\beta) \end{aligned}$$

gdzie $1 = a_\alpha\otimes a^\alpha+n\otimes n$ jest tensorem metrycznym trójwymiarowej przestrzeni Euklidesowej, obliczonym na $\mathscr{M}$. Podkreślmy, że $\gamma_{\alpha\beta}$ są wielomianami drugiego stopnia względem przemieszczeń, lecz zależności geometryczne zawierające $\sqrt{\frac{\bar{a}}{a}}$ są funkcjami niewymiernymi względem $\gamma_{\alpha\beta}$. Z drugiej strony $\check{\gamma}_{\alpha\beta}$ są funkcjami niewymiernymi przemieszczeń, lecz $\sqrt{\frac{\bar{a}}{a}}$ staje się wielomianem kwadratowym $\check{\gamma}_{\alpha\beta}$. Przy małych odkształceniach $\gamma_{\alpha\beta}$ i $\check{\gamma}_{\alpha\beta}$ różnią się tylko małymi członami i mogą być utożsamiane.

Z $(2.4)_2$ i (2.6) wynika zależność dla tensora obrotu skończonego [7]

$$(2.7)\qquad R = \bar{a}^{\alpha\beta}(a_\alpha+u_{,\alpha})\otimes(a_\beta+\check{\gamma}_{\beta\lambda}a^\lambda)+(n_\alpha a^\alpha+nn)\otimes n,$$

która jest niewymierną funkcją przemieszczeń u.

Tensor ortogonalny R określa w przestrzeni pewną oś obrotu określoną wersorem e oraz pewien kąt obrotu ω dookoła tej osi obrotu. Odpowiednie wzory podane zostały w [7]. Część obrotowa gradientu deformacji może być więc opisana również wektorem obrotu skończonego $\Omega \equiv e\sin\omega$, który jest całkowicie określony przez tensor R. Zauważmy, że Ω nie jest wektorem w zwykłym sensie. W szczególności, prawa dodawania wektorów obrotów skończonych [39] różnią się od praw dodawania elementów przestrzeni liniowej. Dla Ω otrzymano następujące wyrażenie

$$(2.8)\qquad \Omega = \frac{1}{2}\epsilon_{\lambda\mu}\{[n^\lambda-\bar{a}^{\alpha\beta}(\delta^\lambda_\alpha+\check{\gamma}^\lambda_\alpha)\varphi_\beta]a^\mu+\bar{a}^{\alpha\beta}(\delta^\lambda_\alpha+\check{\gamma}^\lambda_\alpha)l^\mu_{.\beta}n\}$$

które jest niewymierną funkcją u.

Działanie wektora obrotu skończonego $\boldsymbol{\Omega}$ na dowolny wektor pokażemy na przykładzie zależności $(2.4)_1$ która przyjmuje postać

$$\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha = \check{\boldsymbol{a}}_\alpha + \boldsymbol{\Omega}\times\check{\boldsymbol{a}}_\alpha + \frac{1}{2\cos^2\omega/2}\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\check{\boldsymbol{a}}_\alpha). \tag{2.9}$$

Korzystając z $\boldsymbol{R}$ lub $\boldsymbol{\Omega}$ można wyprowadzić wiele pożytecznych tożsamości i zależności geometrycznych [5, 7], bardzo przydatnych przy dyskusjach różnych zastosowań teorii obrotów skończonych. W szczególności, dla pochodnej pola przemieszczeń otrzymamy

$$\boldsymbol{u}_{,\beta} = \check{\gamma}^\alpha_\beta \boldsymbol{a}_\alpha + \boldsymbol{\Omega}\times\check{\boldsymbol{a}}_\beta + \frac{1}{2\cos^2\omega/2}\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\check{\boldsymbol{a}}_\beta). \tag{2.10}$$

Różniczkowanie $\boldsymbol{R}$ i $\boldsymbol{\Omega}$ wzdłuż krzywych układu współrzędnych konwekcyjnych ciała trójwymiarowego podano w [46, 47]. Opisując obroty przez $\boldsymbol{\Omega}$ i przyjmując więzy K-L, na powierzchni $\mathcal{M}$ otrzymamy

$$\boldsymbol{\Omega}_{,\beta} = \cos\omega \boldsymbol{k}_\beta + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{k}_\beta - \frac{1}{4\cos^2\omega/2}\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{k}_\beta), \tag{2.11}$$

gdzie dla wektora $\boldsymbol{k}_\beta$ otrzymano [5, 48]

$$\begin{aligned}\boldsymbol{k}_\beta &= \bar{\epsilon}^{\lambda\mu}\left[(\varkappa_{\beta\lambda} + b^\varkappa_\beta \check{\gamma}_{\varkappa\lambda})\check{\boldsymbol{a}}_\mu + \left(\gamma_{\beta\mu|\lambda} - \frac{1}{2}\check{\gamma}^\varkappa_\mu \check{\gamma}_{\varkappa\lambda|\beta}\right)\boldsymbol{n}\right] = \\ &= \boldsymbol{\Omega}_{,\beta} + \frac{1}{2\cos^2\omega/2}\boldsymbol{\Omega}_{,\beta}\times\boldsymbol{\Omega} + \omega_{,\beta}\operatorname{tg}\omega/2\boldsymbol{\Omega}\end{aligned} \tag{2.12}$$

W zależności $(2.12)_1$ $\chi_{\alpha\beta} = -(\bar{b}_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta})$ są składowymi tensora zmiany krzywizny powierzchni środkowej powłoki określonymi niewymiernie przez przemieszczenia

$$\varkappa_{\alpha\beta} = -[\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\varphi}_{\alpha|\beta} + b^\lambda_\beta \boldsymbol{l}_{\lambda\alpha}) + \boldsymbol{n}_\lambda(\boldsymbol{l}^\lambda_{\alpha|\beta} - b^\lambda_\beta \boldsymbol{\varphi}_\alpha) - b_{\alpha\beta}]. \tag{2.13}$$

Warunkami całkowalności układu (2.11) są następujące zależności

$$\epsilon^{\alpha\beta}\left(\boldsymbol{k}_{\beta|\alpha} + \frac{1}{2}\boldsymbol{k}_\alpha\times\boldsymbol{k}_\beta\right) = \boldsymbol{0}. \tag{2.14}$$

Po wprowadzeniu do (2.14) zależności $(2.12)_1$ otrzymamy trzy równania ciągłości odkształceń powierzchni środkowej powłoki, które zapewniają istnienie pola przemieszczenia $\boldsymbol{u}$ odpowiadającego zadanym miarom odkształcenia $\check{\gamma}_{\alpha\beta}$ i $\varkappa_{\alpha\beta}$.

Zależność $(2.12)_1$ można odwrócić względem $\varkappa_{\alpha\beta}$ otrzymując

$$\varkappa_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon_{\varkappa\lambda}[(\delta^\varkappa_\alpha + \check{\gamma}^\varkappa_\alpha)\boldsymbol{k}_\beta + (\delta^\varkappa_\beta + \check{\gamma}^\varkappa_\beta)\boldsymbol{k}_\alpha]\cdot\boldsymbol{a}^\lambda - \frac{1}{2}(b^\lambda_\alpha \check{\gamma}_{\lambda\beta} + b^\lambda_\beta \check{\gamma}_{\lambda\alpha}) \tag{2.15}$$

co, razem z $(2.12)_2$ prowadzi do wyrażenia $\chi_{\alpha\beta}$ poprzez $\boldsymbol{\Omega}$ i $\check{\gamma}_{\alpha\beta}$.

Tensor $\boldsymbol{R}$ lub wektor $\boldsymbol{\Omega}$ całkowicie określa na $\mathcal{M}$ obroty tych włókien materialnych powłoki, które pokrywają się z kierunkami głównymi odkształcenia. Inne włókna materialne mogą doznawać obrotu również w wyniku czystego rozciągnięcia otoczenia $\mathcal{M}$ wzdłuż kierunków głównych odkształcenia. Dotyczy to w szczególności obrotu skończonego elementu materialnego brzegu.

Element brzegowy powłoki określa krzywa $\mathscr{C}$ powierzchni $\mathcal{M}$, dana równaniem $\vartheta^\alpha = \vartheta^\alpha(s)$, gdzie s jest miarą długości na $\mathscr{C}$. Z tą krzywą związany jest wersor styczny $\boldsymbol{t} =$

$= \dfrac{dr}{ds}$ oraz wersor zewnętrznej normali $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}$. Ortonormalna trójka wektorów $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{\nu}$ nie pokrywa się na ogół z głównymi kierunkami odkształcenia. Deformację tej trójki wektorów w trójkę ortogonalną $\bar{\boldsymbol{a}}_t = \dfrac{d\bar{\boldsymbol{r}}}{ds}$, $\bar{\boldsymbol{n}}$, $\bar{\boldsymbol{a}}_\nu = \bar{\boldsymbol{a}}_t\times\bar{\boldsymbol{n}}$ można przedstawić jako rozciągnięcie $\boldsymbol{t}$ i $\boldsymbol{\nu}$ w stosunku $\sqrt{1+2\gamma_{tt}}$, gdzie $\gamma_{tt} = \gamma_{\alpha\beta}t^\alpha t^\beta$ oraz dwa kolejne obroty: obrót skończony od czystego rozciągnięcia wzdłuż głównych kierunków odkształcenia oraz obrót skończony tych kierunków głównych. Te dwa kolejne obroty skończone wygodnie jest zamienić jednym równoważnym obrotem skończonym, wykonywanym przy pomocy tensora całkowitego obrotu $\boldsymbol{R}_t$ lub wektora całkowitego obrotu $\boldsymbol{\Omega}_t = \boldsymbol{e}_t\sin\omega_t$ brzegu. Odpowiednie wzory dla $\boldsymbol{R}_t$ i $\boldsymbol{\Omega}_t$ poprzez $\boldsymbol{u}$ wynikają albo z zasady dodawania obrotów skończonych [7], lub wprost z zależności

$$\text{(2.16)}\qquad \begin{aligned} \boldsymbol{R}_t &= \frac{1}{\sqrt{1+2\gamma_{tt}}}(\bar{\boldsymbol{a}}_\nu\otimes\boldsymbol{\nu}+\bar{\boldsymbol{a}}_t\otimes\boldsymbol{t})+\bar{\boldsymbol{n}}\otimes\boldsymbol{n},\\ 2\boldsymbol{\Omega}_t &= \frac{1}{\sqrt{1+2\gamma_{tt}}}(\boldsymbol{\nu}\times\bar{\boldsymbol{a}}_\nu+\boldsymbol{t}\times\bar{\boldsymbol{a}}_t)+\boldsymbol{n}\times\bar{\boldsymbol{n}}, \end{aligned}$$

Różniczkowanie $\boldsymbol{\Omega}_t$ wzdłuż krzywej $\mathscr{C}$ prowadzi do zależności podobnej do (2.11)

$$\text{(2.17)}\qquad \frac{d\boldsymbol{\Omega}_t}{ds} = \cos\omega_t\boldsymbol{k}_t+\frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}_t\times\boldsymbol{k}_t-\frac{1}{4\cos^2\omega_t/2}\boldsymbol{\Omega}_t\times(\boldsymbol{\Omega}_t\times\boldsymbol{k}_t).$$

Tutaj wektor zmiany krzywizny $\boldsymbol{k}_t$ krzywej brzegowej $\mathscr{C}$ ma postać

$$\text{(2.18)}\qquad \boldsymbol{k}_t = -k_{tt}\boldsymbol{\nu}+k_{\nu t}\boldsymbol{t}-k_{nt}\boldsymbol{n},$$

$$\text{(2.19)}\qquad \begin{aligned} -k_{tt} &= \frac{1}{\sqrt{1+2\gamma_{tt}}}(\sigma_t-\varkappa_{tt})-\sigma_t,\\ k_{\nu t} &= \frac{1}{\sqrt{1+2\gamma_{tt}}}\sqrt{\frac{\bar{a}}{a}}\nu_\lambda\bar{a}^{\lambda\alpha}(b_{\alpha\beta}-\varkappa_{\alpha\beta})t^\beta-\tau_t,\\ -k_{nt} &= \frac{1}{1+2\gamma_{tt}}\sqrt{\frac{\bar{a}}{a}}[\varkappa_t-\nu_\lambda\bar{a}^{\lambda\mu}(\gamma_{\mu\alpha|\beta}+\gamma_{\mu\beta|\alpha}-\gamma_{\alpha\beta|\mu})t^\alpha t^\beta]-\varkappa_t \end{aligned}$$

gdzie σ_t, τ_t, $\varkappa_t$ określają, odpowiednio, krzywiznę normalną, skręcenie geodezyjne oraz krzywiznę geodezyjną krzywej brzegowej $\mathscr{C}$. Wektor $\boldsymbol{k}_t$ wyrażony jest całkowicie poprzez miary odkształcenia powłoki $\gamma_{\alpha\beta}$ i $\varkappa_{\alpha\beta}$.

W ramach więzów typu K-L prostokreślna powierzchnia brzegowa $\partial\mathscr{P}$, prostopadła do $\mathscr{M}$ i określona wektorem $\boldsymbol{p}(s,\zeta) = \boldsymbol{r}(s)+\zeta\boldsymbol{n}(s)$, deformuje się w również prostokreślną powierzchnię $\partial\bar{\mathscr{P}}$, prostopadłą do $\bar{\mathscr{M}}$ i określoną wektorem $\bar{\boldsymbol{p}}(s,\zeta) = \bar{\boldsymbol{r}}(s)+\zeta\bar{\boldsymbol{n}}(s)$. Powierzchnię $\partial\bar{\mathscr{P}}$ można zadać jednoznacznie przez zadanie na $\mathscr{C}$ przemieszczeń $\boldsymbol{u}$ oraz funkcji $\beta_\nu \equiv \dfrac{(\bar{\boldsymbol{n}}-\boldsymbol{n})\cdot\bar{\boldsymbol{a}}_\nu}{1+2\gamma_{tt}}$. W [7, 8] wykazano, że powierzchnię $\partial\bar{\mathscr{P}}$ można również określić w sposób uwikłany poprzez odpowiednie układy równań różniczkowych [44], zadając na $\mathscr{C}$ albo $\boldsymbol{\Omega}_t$, γ_{tt} lub $\boldsymbol{k}_t$, γ_{tt}. Zadając wartości $\boldsymbol{\Omega}_t$ oraz γ_{tt} powierzchnię brzegową

$\partial\overline{\mathscr{P}}$ określamy z dokładnością do sztywnego przesunięcia w przestrzeni, a zadając wartości k_t oraz γ_{tt} określamy ją z dokładnością do sztywnego ruchu w przestrzeni. W ramach teorii K-L mamy więc następujące trzy warianty geometrycznych warunków brzegowych:

$$
\begin{aligned}
&\text{a) przemieszczeniowe,} && \boldsymbol{u}(s) = \boldsymbol{A}(s),\ \beta(s) = b(s),\\
&\text{b) kinematyczne,} && \boldsymbol{\Omega}_t(s) = \boldsymbol{m}(s),\ \gamma_{tt}(s) = l(s),\\
&\text{c) deformacyjne,} && \boldsymbol{k}_t(s) = \boldsymbol{q}(s),\ \gamma_{tt}(s) = l(s).
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

Większość zadań z nieliniowej teorii powłok rozwiązuje się w przemieszczeniach, co wymaga stosowania przemieszczeniowych warunków brzegowych. Warunki kinematyczne $(2.20)_2$ odpowiednie są przy rozwiązywaniu zadań poprzez wektor obrotu skończonego [42, 43]. Szczególnie interesującymi są jednak deformacyjne warunki brzegowe $(2.20)_3$, gdyż wyrażone są one całkowicie poprzez miary odkształceń na brzegu powłoki. Umożliwia to formułowanie i rozwiązywanie zadań nieliniowej teorii powłok całkowicie poprzez miary odkształcenia jako zmienne niezależne [9].

Gdy wartości $\boldsymbol{u}$ oraz β_ν są znane na $\mathscr{C}$, wartości $\boldsymbol{\Omega}_t$, $\boldsymbol{k}_t$ oraz γ_{tt} łatwo jest określić stosując odpowiednie wzory różniczkowe. Jeśli jednak tylko wartości $\boldsymbol{k}_t$ oraz γ_{tt} są znane na $\mathscr{C}$, do określenia $\boldsymbol{\Omega}_t$ trzeba rozwiązać równanie różniczkowe (2.17). Równaniem o podobnej strukturze opisywany jest ruch ciała sztywnego dookoła punktu stałego [39] i metody rozwiązania rozwinięte w mechanice analitycznej mogą być pomocne przy określaniu $\boldsymbol{\Omega}_t$ poprzez znany $\boldsymbol{k}_t$.

3. Dodatkowe zależności teorii typu K-L

Równania podstawowe teorii powłok typu K-L, zarówno w opisie Eulera jak i opisie Lagrange'a, zostały szczegółowo omówione w przeglądzie autora [1]. Podajmy tutaj niektóre dodatkowe przedstawienia, dotyczące równań równowagi oraz statycznych warunków brzegowych, uzyskane w [7 - 9].

Rozważmy powłokę o jednospójnej powierzchni środkowej w stanie równowagi. Niech na powłokę działa obciążenie powierzchniowe $\boldsymbol{p}$, dane na jednostkę powierzchni $\mathscr{M}$, oraz siły $\boldsymbol{F}$ i momenty $\boldsymbol{K}$ brzegowe, dane na jednostkę długości krzywej brzegowej $\mathscr{C}$. Dla każdego pola przemieszczeń wirtualnych $\delta\boldsymbol{u}$ istnieją symetryczne Lagrange'owskie tensory sił wewnętrznych i momentów $\boldsymbol{N} = N^{\alpha\beta}\boldsymbol{a}_\alpha\otimes\boldsymbol{a}_\beta$ i $\boldsymbol{M} = M^{\alpha\beta}\boldsymbol{a}_\alpha\otimes\boldsymbol{a}_\beta$ takie, że zasada pracy wirtualnej w opisie Lagrange'a ma postać

$$
\iint\limits_{\mathscr{M}} (N^{\alpha\beta}\delta\gamma_{\alpha\beta}+M^{\alpha\beta}\delta\varkappa_{\alpha\beta})\,dA = \iint\limits_{\mathscr{M}} \boldsymbol{p}\cdot\delta\boldsymbol{u}\,dA + \int\limits_{\mathscr{C}} (\boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{u}+\boldsymbol{K}\delta\boldsymbol{\Omega}_t)\,ds
\tag{3.1}
$$

Po dokonaniu odpowiednich przekształceń lewą stronę (3.1) przedstawimy w postaci

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_{\mathscr{M}} (N^{\alpha\beta}\delta\gamma_{\alpha\beta}+M^{\alpha\beta}\delta\varkappa_{\alpha\beta})\,dA = -\iint\limits_{\mathscr{M}} (G\boldsymbol{N}^{\beta})_{|\beta}\,dA + J_c,\\
&J_c = \int\limits_{\mathscr{C}} (\boldsymbol{P}_\nu\cdot\delta\boldsymbol{u}+\overline{M}_{\nu\nu}\bar{\boldsymbol{a}}_t\cdot\delta\boldsymbol{\Omega}_t)\,ds + \overline{M}_{t\nu}\bar{\boldsymbol{n}}\cdot\delta\boldsymbol{u}|_{\mathscr{C}},
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

gdzie

$$
\begin{aligned}
&N^\beta = Q^{\alpha\beta}\boldsymbol{a}_\alpha + Q^\beta \boldsymbol{n}, \qquad \boldsymbol{P}_\nu = \boldsymbol{G}N^\beta \nu_\beta + \frac{d}{ds}(\overline{M}_{t\nu}\bar{\boldsymbol{n}}),\\
&Q^{\alpha\beta} = N^{\alpha\beta} - \bar{b}^\alpha_\lambda M^{\lambda\beta}, \qquad Q^\beta = M^{\alpha\beta}|_\alpha + \bar{a}^{\beta\varkappa}(2\gamma_{\varkappa\lambda|\mu} - \gamma_{\lambda\mu|\varkappa})M^{\lambda\mu},\\
&\overline{M}_{t\nu} = \frac{1}{1+2\gamma_{tt}} M^{\alpha\beta}(\delta^\lambda_\alpha + 2\gamma^\lambda_\alpha)\, t_\lambda \nu_\beta, \qquad \overline{M}_{\nu\nu} = \frac{1}{1+2\gamma_{tt}}\sqrt{\frac{\bar{a}}{a}}\, \overline{M}^{\alpha\beta}\nu_\alpha\nu_\beta,\\
&\overline{M}_{t\nu}\bar{\boldsymbol{n}}\cdot \delta \boldsymbol{u}|_{\mathscr{C}} = \sum_n [\overline{M}_{t\nu}(s_n+0) - \overline{M}_{t\nu}(s_n-0)]\bar{\boldsymbol{n}}(s_n)\cdot \delta\boldsymbol{u}(s_n),
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

oraz M_n, $n = 1, 2, \ldots N$ są wierzchołkami załomów krzywej $\mathscr{C}$, określonymi przez $s = s_n$.

Z (3.1) oraz (3.2) wynikają znane wektorowe równania równowagi

$$
(\boldsymbol{G}N^\beta)|_\beta + \mathbf{p} = 0 \tag{3.4}
$$

oraz odpowiednie naturalne warunki brzegowe.

Przedstawiając (3.4) poprzez składowe w różnych bazach uzyskuje się pięć różnych postaci równań równowagi. W [1] podano postacie równań wynikające z rozłożenia analogicznego do (3.4) równania w bazach $\boldsymbol{a}_\alpha$, $\boldsymbol{n}$ lub $\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$, $\bar{\boldsymbol{n}}$. W [7] uzyskano jeszcze inną postać rozkładu (3.4) w bazie $\boldsymbol{a}_\alpha$, $\boldsymbol{n}$:

$$
\begin{aligned}
&l^\alpha_{\cdot\lambda}(Q^{\lambda\beta}|_\beta + \bar{a}^{\lambda\varkappa}\gamma_{\varkappa\mu\beta}Q^{\mu\beta} - \bar{b}^\lambda_\beta Q^\beta) + n^\alpha(Q^\beta|_\beta + \bar{b}_{\lambda\beta}Q^{\lambda\beta}) + p^\alpha = 0,\\
&\varphi_\lambda(Q^{\lambda\beta}|_\beta + \bar{a}^{\lambda\varkappa}\gamma_{\varkappa\mu\beta}Q^{\mu\beta} - \bar{b}^\lambda_\beta Q^\beta) + n(Q^\beta|_\beta + \bar{b}_{\lambda\beta}Q^{\lambda\beta}) + p = 0,
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

gdzie

$$
\gamma_{\varkappa\mu\beta} = \gamma_{\varkappa\mu|\beta} + \gamma_{\varkappa\beta|\mu} - \gamma_{\mu\beta|\varkappa}. \tag{3.6}
$$

Cechą układu (3.5) jest to, że parametry $l^\alpha_{\cdot\lambda}$, n^α, φ_λ, n, będące składowymi tensora $\boldsymbol{G}$, nie są tutaj różniczkowane, co może mieć pewne znaczenie przy rozwiązywaniu niektórych zadań.

Wprowadzając wektor $\check{N}^\beta = \boldsymbol{U}N^\beta = Q^{\alpha\beta}\check{\boldsymbol{a}}_\alpha + Q^\beta \boldsymbol{n}$ równanie (3.4) można przedstawić w postaci

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{R}\check{N}^\beta)|_\beta + \boldsymbol{p} = \boldsymbol{0},\\
&\boldsymbol{R}\check{N}^\beta = \check{N}^\beta + \boldsymbol{\Omega}\times\check{N}^\beta + \frac{1}{2\cos^2\omega/2}\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\check{N}^\beta).
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Przedstawiając (3.7) różnymi drogami w składowych względem bazy pośredniej $\check{\boldsymbol{a}}_\alpha$, $\boldsymbol{n}$ w [7] uzyskano dwie równoważne postacie równań równowagi, które mogą stanowić wygodną podstawę do dalszych uproszczeń. W podobny sposób można wyprowadzić równanie równowagi w składowych bazy pośredniej $\overset{*}{\boldsymbol{a}}_\alpha$, $\bar{\boldsymbol{n}}$, definiując $\overset{*}{N}{}^\beta = \sqrt{\frac{a}{\bar{a}}}\boldsymbol{R}N^\beta$ i odpowiednio modyfikując równanie (3.4). Taką postać równań podano w [42].

Ponieważ $\delta\beta_\nu = (\delta\boldsymbol{\Omega}_t\times\bar{\boldsymbol{n}})\cdot\bar{\boldsymbol{\nu}} = \delta\boldsymbol{\Omega}_t\cdot\bar{\boldsymbol{t}}$, gdzie $\bar{\boldsymbol{t}}$ jest wersorem stycznym a $\bar{\boldsymbol{\nu}}$ jest wersorem zewnętrznej normali do $\mathscr{C}$, ze struktury J_c w $(3.2)_2$ wynika, że zmodyfikowana siła brzegowa $\boldsymbol{P}_\nu$ oraz moment $\sqrt{1+2\gamma_{tt}}\,\overline{M}_{\nu\nu}$ są wielkościami statycznymi wykonującymi pracę na wariacjach parametrów przemieszczeniowych $\boldsymbol{u}$ oraz β_ν.

Niech F_ν jest wypadkową siłą a B_ν wypadkowym momentem względem bieżącego punktu M krzywej $\mathscr{C}$ wszystkich sił i momentów wewnętrznych, działających wzdłuż krzywej brzegowej od M_0 do M. W opisie Lagrange'a wektory te określone są zależnościami

$$F_\nu = F_\nu^0 + \int_{M_0}^{M} P_\nu ds, \quad B_\nu = B_\nu^0 + \int_{M_0}^{M} (\overline{M}_{\nu\nu}\bar{a}_t + \bar{r} \times P_\nu) ds \bar{r} \times F_\nu. \tag{3.8}$$

gdzie F_ν^0 jest wartością początkową F_ν a $B_\nu^0(O)$ jest początkowym momentem wypadkowym, określonym względem początku O układu współrzędnych kartezjańskich.

Dokonując odpowiednich przekształceń całkę krzywoliniową w (3.2) można przedstawić w postaci

$$J_c = \int_{M_0}^{M} \left[(\overline{M}_{\nu\nu}\bar{a}_t - \bar{a}_t \times F_\nu) \cdot \delta\Omega_t - \frac{\bar{a}_t \cdot F_\nu}{1+2\gamma_{tt}} \delta\gamma_{tt} \right] ds + (\overline{M}_{t\nu}\bar{n} - F_\nu) \cdot \delta u \Big|_{M_0}^{M} \tag{3.9}$$

$$= - \int_{M_0}^{M} \left(\sqrt{1+2\gamma_{tt}}\, B_\nu \cdot \delta k_t + \frac{\bar{a}_t \cdot F_\nu}{1+2\gamma_{tt}} \right) ds + [(\overline{M}_{t\nu}\bar{n} - F_\nu) \cdot \delta u - B_\nu \cdot \delta\Omega_t)] \Big|_{M_0}^{M}.$$

Zależności (3.9) pokazują, że podczas wirtualnej deformacji powłoki pewne wielkości statyczne wykonują na brzegu pracę na wariacjach wielkości geometrycznych, określających kinematyczne i deformacyjne warunki brzegowe (2.20). Każdej wielkości geometrycznej odpowiada więc wielkość statyczna według następującego schematu [10]

$$\begin{aligned} &u \leftrightarrow P_\nu, \quad && \beta_\nu \leftrightarrow \sqrt{1+2\gamma_{tt}}\, \overline{M}_{\nu\nu}, \\ &\Omega_t \leftrightarrow \overline{M}_{\nu\nu}\bar{a}_t - \bar{a}_t \times F_\nu, \quad && \gamma_{tt} \leftrightarrow -\frac{\bar{a}_t \cdot F_\nu}{1+2\gamma_{tt}}, \\ &k_t \leftrightarrow -\sqrt{1+2\gamma_{tt}}\, B_\nu, \quad && \gamma_{tt} \leftrightarrow -\frac{\bar{a}_t \cdot F_\nu}{1+2\gamma_{tt}}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Zakładając na brzegu $\mathscr{C}$ wartości odpowiednich parametrów statycznych z (3.10) otrzymamy trzy warianty statycznych warunków brzegowych nieliniowej teorii powłok typu K-L. Te statyczne warunki brzegowe są energetycznie spójnymi z odpowiednimi wariantami geometrycznych warunków brzegowych. Człony pozacałkowe, pojawiające się w $(3.2)_2$ oraz (3.9), określają dodatkowe warunki które muszą być spełnione w załomach krzywej brzegowej lub w miejscach nieciągłości obciążenia brzegowego.

4. Geometrycznie nieliniowa teoria cienkich powłok sprężystych

Załóżmy, że ekstremalne odkształcenia w powłoce są małe. Ścisłe oszacowanie stanu naprężenia i odkształcenia w izotropowej powłoce sprężystej, obciążonej tylko na brzegu, podał John [49]. Prowadzi to w sposób ścisły do następującej funkcji energii sprężystej teorii pierwszego przybliżenia [50, 11]

$$\sum = \frac{h}{2} H^{\alpha\beta\lambda\mu} \left(\gamma_{\alpha\beta}\gamma_{\lambda\mu} + \frac{h^2}{12} \varkappa_{\alpha\beta}\varkappa_{\lambda\mu} \right) + O(Eh\eta^2\vartheta^2), \tag{4.1}$$

gdzie ϑ jest małym parametrem zdefiniowanym w [69, 1] a zmodyfikowany tensor sprężystości, w przypadku izotropii materiału, przyjmuje postać

$$H^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(a^{\alpha\lambda}a^{\beta\mu}+a^{\alpha\mu}a^{\beta\lambda}+\frac{2\nu}{1-\nu}a^{\alpha\beta}a^{\lambda\mu}\right). \tag{4.2}$$

Wyrażenie (4.1) ujmuje energię sprężystą od rozciągania (ściskania) i od zginania powierzchni środkowej powłoki, a także energię sprężystą od zmiany grubości powłoki podczas deformacji, która jest ujęta w zmodyfikowanym tensorze sprężystości $\boldsymbol{H}$.

Z (4.1) wynika, że w ramach błędu teorii pierwszego przybliżenia $\gamma_{\alpha\beta}$ mogą być określone z dokładnością do członów $O(\eta\vartheta^2)$ natomiast $\varkappa_{\alpha\beta}$ — z dokładnością do członów $O\left(\frac{\eta\vartheta^2}{h}\right)$. Przy małych odkształceniach wyrażenie niewymierne (2.13) dla tensora zmiany krzywizny można więc uprościć do wielomianu piątego stopnia, upraszczając n oraz n_μ do postaci [7]

$$\begin{aligned} n &= \left[1+\vartheta^\varkappa_\varkappa+\frac{1}{2}(\vartheta^\varkappa_\varkappa)^2-\frac{1}{2}\vartheta^\varkappa_\mu\vartheta^\mu_\varkappa+\varphi^2\right][1-\gamma^\lambda_\lambda+O(\eta^2)],\\ n_\mu &= [-(1+\vartheta^\varkappa_\varkappa)\varphi_\mu+\varphi^\lambda(\vartheta_{\lambda\mu}-\omega_{\lambda\mu})][1+O(\eta)], \end{aligned} \tag{4.3}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \gamma^\lambda_\lambda &= \vartheta^\lambda_\lambda+\frac{1}{2}\vartheta^\lambda_\mu\vartheta^\mu_\lambda+\frac{1}{2}\varphi^\lambda\varphi_\lambda+\varphi^2,\\ \vartheta_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(u_{\alpha|\beta}+u_{\beta|\alpha})-b_{\alpha\beta}w, \quad \omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\beta|\alpha}-u_{\alpha|\beta}), \quad \varphi = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta}u_{\beta|\alpha}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Podstawiając (4.3), (4.4), (2.13) oraz (2.5) do zasady pracy wirtualnej (3.1), po dokonaniu odpowiednich przekształceń, otrzymamy Lagrange'owską postać równań równowagi geometrycznie nieliniowej teorii cienkich powłok sprężystych, słuszną przy nieograniczonych obrotach elementów materialnych powłoki.

W [1] podano postać kanoniczną układu równań, wyrażoną poprzez zmodyfikowane siły wewnętrzne oraz zmiany krzywizn jako zmienne niezależne. W podobnych równaniach wyprowadzonych w [7] ujęto dodatkowo również siły powierzchniowe $p^\alpha = O(E\eta\vartheta)$, $P = O(E\eta\vartheta^2)$ które nie były ujęte w [1]. Równania te są wyrażone poprzez $N^{\alpha\beta}$ oraz $\varkappa_{\alpha\beta}$ jako zmienne niezależne. Odpowiednie geometryczne i statyczne warunki brzegowe wynikają z uproszczeń wzorów (2.19) oraz (3.8) i $(3.10)_3$. Rozważając stosunek $\frac{\varkappa h}{\gamma}$ z postaci kanonicznej uzyskano w [7] pięć klas równań uproszczonych dla teorii membranowej, małego zginania, zgięciowej, dużego zginania oraz bez wydłużeń powierzchni środkowej powłoki. W szczególności, równania zgięciowej teorii powłok, wyrażone poprzez miary odkształcenia $\gamma_{\alpha\beta}$ i $\varkappa_{\alpha\beta}$, przyjmują postać [9]

$$\begin{aligned} & C[(1-\nu)\gamma^\beta_\alpha|_\beta+\nu\gamma^\beta_\beta|_\alpha]+\bar{p}_\alpha = O\left(Eh\frac{\eta\vartheta^2}{\lambda}\right),\\ & D\varkappa^\alpha_\alpha|^\beta_\beta+C(b^\alpha_\beta-\varkappa^\alpha_\beta)[(1-\nu)\gamma^\beta_\alpha+\nu\delta^\beta_\alpha\gamma^\lambda_\lambda]+\bar{p} = O\left(Eh^2\frac{\eta\vartheta^2}{\lambda^2}\right),\\ & \varkappa^\beta_\alpha|_\beta-\varkappa^\beta_\beta|_\alpha = O\left(\frac{\eta\vartheta^2}{h\lambda}\right), \end{aligned} \tag{4.5}$$

(4.5) [cd.] $$\gamma^{\beta}_{\alpha}|^{\alpha}_{\beta}-\gamma^{\alpha}_{\alpha}|^{\beta}_{\beta}-(b^{\beta}_{\alpha}\varkappa^{\alpha}_{\beta}-b^{\alpha}_{\alpha}\varkappa^{\beta}_{\beta})+\frac{1}{2}(\varkappa^{\beta}_{\alpha}\varkappa^{\alpha}_{\beta}-\varkappa^{\alpha}_{\alpha}\chi^{\beta}_{\beta}) = O\left(\frac{\eta\vartheta^2}{\lambda^2}\right),$$

gdzie $\lambda \equiv \frac{h}{\vartheta}$ jest dużym parametrem, $C = \frac{Eh}{1-\nu^2}$, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$.

Deformacyjne warunki brzegowe, spójne z (4.5), wyrażone są przez zadanie na $\mathscr{C}$ funkcji $\boldsymbol{k}_t$ oraz γ_{tt}, gdzie

(4.6)
$$k_{tt} = \varkappa_{tt}+O\left(\frac{\eta\vartheta^2}{h}\right), \quad k_{\nu t} = \varkappa_{\nu t}+O\left(\frac{\eta\vartheta^2}{h}\right),$$
$$k_{nt} = 2\frac{d\gamma_{\nu t}}{ds}-\frac{d\gamma_{tt}}{ds_\nu}+2\varkappa_\nu\gamma_{\nu t}+\varkappa_t(\gamma_{\nu\nu}-\gamma_{tt})+O\left(\frac{\eta\vartheta^3}{h}\right).$$

Statyczne naturalne warunki brzegowe, energetycznie spójne z (4.6), otrzymamy z uproszczenia wzorów (3.8) i $(3.10)_3$, co daje

(4.7) $$\boldsymbol{P}_\nu = (P_{\nu\nu}\bar{\boldsymbol{v}}+P_{t\nu}\bar{\boldsymbol{t}}+P_{n\nu}\bar{\boldsymbol{n}})[1+0(\eta)]$$

(4.8)
$$P_{\nu\nu} = C(\gamma_{\nu\nu}+\nu\gamma_{tt})+O(Eh\eta\vartheta^2), \quad P_{t\nu} = C(1-\nu)\gamma_{\nu t}+O(Eh\eta\vartheta^2),$$
$$P_{n\nu} = D\left[\frac{d\varkappa_{\nu\nu}}{ds_\nu}+\nu\frac{d\varkappa_{tt}}{ds_\nu}+2(1-\nu)\frac{d\varkappa_{t\nu}}{ds}\right]+$$
$$+D(1-\nu)[\varkappa_t(\varkappa_{\nu\nu}-\varkappa_{tt})+2\varkappa_\nu\varkappa_{t\nu}]+O(Eh\eta\vartheta^3),$$
$$\bar{\boldsymbol{a}}_t = \bar{\boldsymbol{t}}+O(\eta), \quad \overline{M}_{\nu\nu} = M_{\nu\nu}+O(Eh^2\eta\vartheta^2), \quad \overline{M}_{t\nu} = M_{t\nu}+O(Eh^2\eta\vartheta^2).$$

a dla odpowiednich wielkości statycznych otrzymamy

(4.9)
$$\boldsymbol{B}_\nu = \boldsymbol{B}^0_\nu+\int_{M_0}^{M}[D(\varkappa_{\nu\nu}+\nu\varkappa_{tt})\boldsymbol{t}+\bar{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{P}_\nu]ds-\bar{\boldsymbol{r}}\times\int_{M_0}^{M}\boldsymbol{P}_\nu ds,$$
$$\bar{\boldsymbol{t}}\cdot\boldsymbol{F}_\nu = \bar{\boldsymbol{t}}\cdot\left(\boldsymbol{F}^0_\nu+\int_{M_0}^{M}\boldsymbol{P}_\nu ds\right).$$

Zauważmy, że cztery równania w (4.5) są liniowe, a tylko dwa kwadratowe względem miar odkształcenia, natomiast wszystkie geometryczne i statyczne warunki brzegowe są liniowe względem $\gamma_{\alpha\beta}$ i $\varkappa_{\alpha\beta}$. Stwarza to dobrą prognozę dla przyszłych zastosowań tych zależności do zagadnień zgięciowych geometrycznie nieliniowej teorii powłok.

Rozwiązując (4.5) otrzymamy odkształcenia oraz naprężenia w przestrzeni powłoki zgodne z więzami K-L. Położenie powłoki w przestrzeni określone jest z dokładnością do jej ruchu jako ciała sztywnego. Wyznaczenie obrotów skończonych $\boldsymbol{\Omega}$ wymaga więc całkowania układu równań (2.11), natomiast określenie pola przemieszczeń jest możliwe poprzez rozwiązanie układów równań (2.5) oraz (2.13) przy (4.3) i (4.4).

5. Klasyfikacja uproszczeń przy ograniczonych obrotach

W ramach geometrycznie nieliniowej teorii powłok założyliśmy, że odkształcenia w powłoce są małe. Nie zakładaliśmy dotychczas żadnych ograniczeń na parametry obrotu skończonego włókien materialnych powłoki.

W większości zastosowań technicznych konstrukcje powłokowe projektowane są w taki sposób, by możliwość wystąpienia dużych obrotów była ograniczona. Warto więc rozważyć możliwe uproszczenia zależności nieliniowej teorii powłok wynikające z konsekwentnych ograniczeń nakładanych na parametry obrotu skończonego włókien materialnych powłoki.

W literaturze powłokowej znane są oryginalne klasyfikacje uproszczeń, zaproponowane przez MUSZTARI'EGO i GALIMOWA [51], KOITERA [52] oraz CHIENA [53]. W [51] wprowadzono ograniczenia składowych φ_α i φ zlinearyzowanego wektora obrotu $\boldsymbol{\Phi}$, co umożliwiło wyróżnienie trzech wariantów równań uproszczonych dla „małego, średniego i dużego zginania (izgiba)". W [52] wyróżniono cztery warianty równań przy „infinitezymalnym, umiarkowanie małym, średnim oraz dużym wygięciu (deflection)" poprzez odpowiednie ograniczenia składowych $\boldsymbol{\Phi}$ oraz powierzchniowych gradientów przemieszczenia. Uproszczenia uzyskane w [53] (por. również [54]) oparte są na ograniczeniach przemieszczeń oraz ich pochodnych w stosunku do geometrii powłoki oraz zmienności stanu odkształcenia. W tych oryginalnych klasyfikacjach nie pojawia się słowo „obrót", gdyż ani $\boldsymbol{\Phi}$, ani przemieszczenia lub ich gradienty jako takie nie opisują obrotu skończonego włókien materialnych powłoki.

W literaturze pojawiają się też prace, w których warianty uproszczone wg powyższych zasad nazywane są równaniami przy „małych, średnich, dużych etc. obrotach". Jednakże takie nazwy nadawane są intuicyjnie, bez zdefiniowania pojęcia „obrotu" który ma być w jakimś sensie ograniczony. Może to prowadzić do nieporozumień.

Poprzez rozkład polarny gradientu deformacji (2.3) odkształcenia i obroty elementów materialnych powłoki zostały całkowicie rozdzielone. W p. 4 założyliśmy, że odkształcenia są małe. Jest więc rzeczą naturalną ograniczyć teraz parametry wektora obrotu skończonego $\boldsymbol{\Omega}$, tzn. kąt obrotu ω oraz kierunek osi obrotu określony przez $\boldsymbol{e}$.

W ramach geometrycznie nieliniowej teorii cienkich powłok sprężystych można użyć małego parametru ϑ do następującej klasyfikacji obrotów [5, 7]:

1) $\omega \leqslant O(\vartheta^2)$ — małe obroty
2) $\omega = O(\vartheta)$ — umiarkowane obroty
3) $\omega = O(\sqrt{\vartheta})$ — duże obroty
4) $\omega \geqslant O(1)$ — skończone obroty

Przypadek małych obrotów prowadzi do klasycznej liniowej teorii powłok.

Przy założeniu umiarkowanych obrotów otrzymamy

$$
\begin{gathered}
|\boldsymbol{\Omega}| = O(\vartheta), \quad \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{a}_\alpha = O(\vartheta), \quad \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{n} = O(\vartheta), \\
\varphi_\alpha = O(\vartheta), \quad \varphi = O(\vartheta), \quad \vartheta_{\alpha\beta} = O(\vartheta^2), \\
\boldsymbol{\Omega} = \left(\epsilon^{\beta\alpha}\varphi_\alpha + \frac{1}{2}\varphi^\beta\varphi\right)\boldsymbol{a}_\beta + \varphi\boldsymbol{n} + O(\eta\vartheta).
\end{gathered}
\tag{5.1}
$$

Powierzchniowe miary odkształcenia, w ramach błędu energii odkształcenia (4.1), przyjmują postać

$$
\gamma_{\alpha\beta} = \vartheta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(\vartheta^\lambda_\alpha\omega_{\lambda\beta} + \vartheta^\lambda_\beta\omega_{\lambda\alpha}) + \frac{1}{2}a_{\alpha\beta}\varphi^2 + \frac{1}{2}\varphi_\alpha\varphi_\beta + O(\eta\vartheta^2),
\tag{5.2}
$$

(5.2) [cd.]
$$\varkappa_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}[\varphi_{\alpha|\beta}+\varphi_{\beta|\alpha}+b^{\lambda}_{\alpha}(\vartheta_{\lambda\beta}-\omega_{\lambda\alpha})+b^{\lambda}_{\beta}(\vartheta_{\lambda\alpha}-\omega_{\lambda\alpha})]+O\left(\frac{\eta\vartheta}{\lambda}\right).$$

Wprowadzając (5.2) do zasady pracy wirtualnej (3.1) otrzymamy wektorowe równania równowagi (3.4), gdzie

$$(5.3)\qquad GN^{\beta} = \Big[N^{\alpha\beta}-b^{\alpha}_{\lambda}M^{\lambda\beta}-\underline{\frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}N^{\lambda}_{\lambda}-\frac{1}{2}(\omega^{\alpha\lambda}N^{\beta}_{\lambda}+\omega^{\beta\lambda}N^{\alpha}_{\lambda})+}$$
$$\underline{+\frac{1}{2}(\vartheta^{\alpha\lambda}N^{\beta}_{\lambda}-\vartheta^{\beta\lambda}N^{\alpha}_{\lambda})}\Big]\boldsymbol{a}_{\alpha}+(\varphi_{\alpha}N^{\alpha\beta}+M^{\alpha\beta}|_{\alpha})\boldsymbol{n}.$$

Odpowiednie zależności w składowych w bazie $\boldsymbol{a}_{\alpha}$, $\boldsymbol{n}$ podano w [8].

W wielu technicznie ważnych przypadkach tylko obroty dookoła stycznych do $\mathcal{M}$ mogą być umiarkowane, podczas gdy obroty dookoła normali do $\mathcal{M}$ są małe, gdyż powłoki są na ogół znacznie sztywniejsze na odkształcenia w swej powierzchni, niż na odkształcenia z powierzchni. W takim przypadku również $\varphi = O(\vartheta^2)$ w (5.1) i w ramach tych samych oszacowań zależności (5.1) - (5.3) można uprościć odrzucając człony podkreślone. Zauważmy, że dopiero w tym przypadku $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Phi}+O(\eta\vartheta)$, czyli obrót skończony pokrywa się z obrotem zlinearyzowanym, stosowanym w liniowej teorii powłok.

Przy założeniu dużych obrotów otrzymamy

$$(5.4)\qquad \begin{aligned} &|\boldsymbol{\Omega}| = O(\sqrt{\vartheta}), \quad \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{a}_{\alpha} = O(\sqrt{\vartheta}), \quad \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{n} = O(\sqrt{\vartheta})\\ &\varphi_{\alpha} = O(\sqrt{\vartheta}), \quad \varphi = O(\sqrt{\vartheta}), \quad \vartheta_{\alpha\beta} = O(\vartheta)\\ &\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}\{\epsilon^{\beta\alpha}[(2+\vartheta^{\lambda}_{\lambda})\varphi_{\alpha}-\varphi^{\lambda}(\vartheta_{\lambda\alpha}-\omega_{\lambda\alpha})]\boldsymbol{a}_{\beta}+2\varphi\boldsymbol{n}\}+O(\eta\sqrt{\vartheta})\end{aligned}$$

Składowe tensora odkształcenia $\gamma_{\alpha\beta}$ mają pełną postać (2.5), natomiast dla składowych $\varkappa_{\alpha\beta}$ otrzymamy [7]

$$(5.5)\qquad \varkappa_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}[\varphi_{\alpha|\beta}+\varphi_{\beta|\alpha}+b^{\lambda}_{\alpha}(\vartheta_{\lambda\beta}-\omega_{\lambda\beta})+b^{\lambda}_{\beta}(\vartheta_{\lambda\alpha}-\omega_{\lambda\alpha})]-$$
$$-\frac{1}{2}b_{\alpha\beta}\varphi^{\lambda}\varphi_{\lambda}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\varphi^{\lambda}\varphi_{\lambda}+\vartheta^{\lambda}_{\varkappa}\vartheta^{\varkappa}_{\lambda}-\frac{1}{2}\vartheta^{\alpha}_{\varkappa}\vartheta^{\lambda}_{\lambda}\right)(\varphi_{\alpha|\beta}+\varphi_{\beta|\alpha})-\frac{1}{4}\varphi^{\lambda}\varphi_{\lambda}(b^{\lambda}_{\alpha}\omega_{\lambda\beta}-b^{\lambda}_{\beta}\omega_{1\alpha})+$$
$$+\left(\varphi^{\lambda}+\varphi_{\mu}\omega^{\mu\lambda}-\underline{\frac{1}{2}\varphi^{\lambda}\varphi^{2}}\right)(\vartheta_{\lambda\alpha|\beta}+\vartheta_{\lambda\beta|\alpha}-\vartheta_{\alpha\beta|\lambda})+O\left(\frac{\eta\vartheta}{\lambda}\right).$$

Wprowadzając (2.5) oraz (5.5) do (3.1) otrzymamy wektorowe równania równowagi (3.4), gdzie

$$(5.6)\qquad GN^{\beta} = \Big\{l^{\alpha}_{.\lambda}N^{\lambda\beta}-b^{\alpha}_{\lambda}M^{\lambda\beta}+\underline{\frac{1}{4}\varphi^{\varkappa}\varphi_{\varkappa}(b^{\alpha}_{\lambda}M^{\lambda\beta}-b^{\beta}_{\lambda}M^{\alpha\lambda})}+(2\vartheta^{\alpha\beta}-a^{\alpha\beta}\vartheta^{\varkappa}_{\varkappa})\varphi_{\lambda|\mu}M^{\lambda\mu}+$$
$$+\underline{\frac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}\varphi^{\varkappa}\vartheta_{\varkappa\lambda\mu}M^{\lambda\mu}}-\frac{1}{2}(\varphi^{\alpha}\vartheta^{\beta}_{.\lambda\mu}-\varphi^{\beta}\vartheta^{\beta}_{.\lambda\mu})M^{\lambda\mu}-$$
$$-\left[\left(1-\underline{\frac{1}{2}\varphi^{2}}\right)(\varphi^{\alpha}M^{\lambda\beta}+\varphi^{\beta}M^{\alpha\lambda}-\varphi^{\lambda}M^{\alpha\beta})+\varphi_{\varkappa}(\omega^{\varkappa\alpha}M^{\lambda\beta}+\omega^{\varkappa\beta}M^{\alpha\lambda}-\omega^{\varkappa\lambda}M^{\alpha\beta})\right]\Big|_{\lambda}\Big\}\boldsymbol{a}_{\alpha}+$$

$$+\left\{\varphi_\lambda N^{\lambda\beta}+\left[\left(1-\frac{1}{2}\varphi^\varkappa\varphi_\varkappa+\frac{1}{2}\vartheta^\varkappa_\varkappa\vartheta^\mu_\eta-\vartheta^\varkappa_\mu\vartheta^\mu_\varkappa\right)M^{\lambda\beta}\right]_{|\lambda}+\left[\varphi^\beta(-b_{\lambda\mu}+\varphi_{\lambda|\mu}-\underline{b^\varkappa_\lambda\omega_{\varkappa\mu}})+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(1-\underline{\frac{1}{2}\varphi^2}\right)\vartheta^\beta_{.\lambda\mu}+\omega^{\beta\varkappa}\vartheta_{\varkappa\lambda\mu}\right]M^{\lambda\mu}\right\}\boldsymbol{n}.$$

Jeżeli dookoła normali dopuszczone są umiarkowane obroty, to w $(5.4)_2$ $\varphi = O(\vartheta)$ i w zależnościach (5.5) oraz (5.6) można opuścić człony podkreślone linią ciągłą. Gdy dookoła normali dopuszcza się tylko małe obroty to $\varphi = O(\vartheta^2)$ i (2.5) upraszcza się do postaci

$$\gamma_{\alpha\beta} = \vartheta_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}\vartheta^\lambda_\alpha\vartheta_{\lambda\beta}-\frac{1}{2}(\vartheta^\lambda_\alpha\omega_{\lambda\beta}+\vartheta^\lambda_\beta\omega_{\lambda\alpha})+\frac{1}{2}\varphi_\alpha\varphi_\beta+O(\eta\vartheta^2), \tag{5.7}$$

natomiast w $(5.4)_3$ i (5.5) można jeszcze dodatkowo opuścić człony podkreślone linią falistą. Wprowadzając tak uproszczone miary odkształcenia powłoki do (3.1) otrzymamy (3.4), gdzie

$$\boldsymbol{G}\boldsymbol{N}^\beta = \left[(\delta^\alpha_\lambda+\vartheta^\alpha_\lambda)N^{\lambda\beta}-b^\alpha_\lambda M^{\lambda\beta}-\frac{1}{2}(\omega^{\alpha\lambda}N^\beta_\lambda+\omega^{\beta\lambda}N^\alpha_\lambda)-(2\vartheta^{\alpha\beta}-a^{\alpha\beta}\vartheta^\varkappa_\varkappa)\varphi_{\lambda|\mu}M^{\lambda\mu}-\right.$$
$$\left.-(\varphi^\alpha M^{\lambda\beta}+\varphi^\beta M^{\alpha\lambda}-\varphi^\lambda M^{\alpha\beta})_{|\lambda}\right]\boldsymbol{a}_\alpha+\left\{\varphi_\lambda N^{\lambda\beta}+\right.$$
$$\left.+\left[\left(1-\frac{1}{2}\varphi^\varkappa\varphi_\varkappa\right)M^{\lambda\beta}\right]_{|\lambda}+[\varphi^\beta(-b_{\lambda\mu}+\varphi_{\lambda|\mu})+\vartheta^\beta_{.\lambda\mu}]M^{\lambda\mu}\right\}\boldsymbol{n}. \tag{5.8}$$

Postać równań równowagi w składowych w bazie $\boldsymbol{a}_\alpha$, $\boldsymbol{n}$ jest oczywista.

6. Ogólna teoria obrotów skończonych w powłokach

Przy formułowaniu udokładnionych zależności nieliniowej teorii powłok nie wolno już stosować więzów K-L, ponieważ nawet w opisie deformacji mogłoby to doprowadzić do zauważalnych błędów.

Podczas deformacji powłoki jako ciała trójwymiarowego wektory bazy przestrzennej na powierzchni środkowej $\mathcal{M}$ powłoki w konfiguracji odniesienia $\boldsymbol{a}_a \equiv (\boldsymbol{a}_\alpha, \boldsymbol{n})$, $a = 1, 2, 3$, deformują się w wektory bazy przestrzennej $\bar{\boldsymbol{a}}_a$ na powierzchni odkształconej $\bar{\mathcal{M}} = \chi(\mathcal{M})$. W szczególności, wektor $\boldsymbol{a}_3 \equiv \boldsymbol{n}$ po deformacji przechodzi w wektor $\bar{\boldsymbol{a}}_3$, który nie jest na ogół ani jednostkowym ani prostopadłym do $\bar{\mathcal{M}}$, $\bar{\boldsymbol{a}}_3 \neq \bar{\boldsymbol{n}}$. Wektory $\boldsymbol{a}_a$ oraz $\bar{\boldsymbol{a}}_a$ określają składowe przestrzennych tensorów metrycznych $a_{ab} = \boldsymbol{a}_a \cdot \boldsymbol{a}_b$ oraz $\bar{a}_{ab} = \bar{\boldsymbol{a}}_a \cdot \bar{\boldsymbol{a}}_b$.

Wektor przemieszczenia $\boldsymbol{v}$ dowolnej cząstki powłoki ma postać szeregu

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}+\zeta\boldsymbol{\beta}+\ldots, \qquad \boldsymbol{\beta} = \bar{\boldsymbol{a}}_3-\boldsymbol{n} = \beta_\alpha\boldsymbol{a}^\alpha+\beta\boldsymbol{n}, \tag{6.1}$$

gdzie, w ramach liniowego przybliżenia, występują dwa niezależne parametry przemieszczenia $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{\beta}$.

Teorię deformacji powłoki, przy założeniu liniowości przemieszczeń, szczegółowo podano w [5]. Tutaj przedstawimy niektóre zależności dotyczące głównie obrotowej części deformacji [10], które uzyskuje się analogicznie jak w p. 2, jedynie zależności wynikowe są bardziej skomplikowane.

Na powierzchni środkowej określony jest ścisły tensor gradientu deformacji

$$G = \bar{a}_a \otimes a^a, \quad G^{-1} = a_a \otimes \bar{a}^a, \tag{6.2}$$

poprzez który zdefiniowane są miary odkształcenia powłoki

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{2}(G^T G - 1), \quad \pi = -(G^T \bar{\lambda} G - b), \\ \mu &= \frac{1}{2}(G^T \bar{\lambda}^T \bar{\lambda} G - b^2), \quad \bar{\lambda} = -\bar{a}_{3,\beta} \otimes \bar{a}^\beta. \end{aligned} \tag{6.3}$$

W ramach liniowego przybliżenia $(6.1)_1$ miary odkształcenia (6.3) są funkcjami kwadratowymi u i β oraz ich gradientów. Jednakże tylko składowe γ_{ab} oraz $\pi_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2}(\pi_{\alpha\beta} + \pi_{\beta\alpha})$ występują jako niezależne, natomiast μ jest wyrażalne przez γ i π oraz $\pi_{3\beta} = \gamma_{33,\beta}$.

Stosując do (6.2) twierdzenie o rozkładzie polarnym (3.1) można określić Lagrange'owską przestrzenną bazę pośrednią $\check{a}_a = U a_a$ i zmodyfikowany tensor odkształcenia $\check{\gamma} = U - 1$, poprzez które wyrażamy tensor obrotu skończonego R oraz wektor obrotu skończonego Ω głównych kierunków odkształcenia według następujących wzorów:

$$R = \bar{a}_a \otimes \check{a}^a = [(a_\alpha + u_{,\alpha})\bar{a}^{\alpha\beta} + (n + \beta)\bar{a}^{3b}] \otimes (\delta_b^c + \check{\gamma}_b^c) a_c, \tag{6.4}$$

$$\begin{aligned} 2\Omega &= \bar{\in}^{abc}(\bar{a}_a \cdot \check{a}_b)\check{a}_c = \check{a}_a \times \bar{a}^a = \\ &= \in_{\lambda\mu}\{(\delta_a^3 + \check{\gamma}_a^3)[\bar{a}^{\alpha\beta} l^\lambda_{.\beta} + \bar{a}^{a3}\beta^\lambda] - (\delta_a^\lambda + \check{\gamma}_a^\lambda)[\bar{a}^{a\beta}\varphi_\beta + \bar{a}^{a3}(1+\beta)]\} a^\mu + \\ &\quad + \in_{\lambda\mu}(\delta_a^\lambda + \check{\gamma}_a^\lambda)[\bar{a}^{a\beta} l^\mu_{.\beta} + \bar{a}^{a3}\beta^\mu] n. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Zależności te są niewymiernymi funkcjami u i β.

Różniczkując Ω otrzymamy (2.11), gdzie teraz

$$k_\beta = \bar{\in}^{aef}(\gamma_{e\beta;a} - A_{ea\beta})\check{a}_f, \quad A_{ea\beta} = \frac{1}{2} a^{gh} \check{\gamma}_{eg} \check{\gamma}_{ah;\beta}, \tag{6.6}$$

natomiast $(\ )_{;a}$ jest przestrzenną pochodną kowariantną, obliczoną na $\mathscr{M}$ przy pomocy a_{ab}. W szczególności $\gamma_{\alpha\beta;3} = \pi_{(\alpha\beta)} + b^\varkappa_\alpha \gamma_{\varkappa\beta} + b^\varkappa_\beta \gamma_{\varkappa\alpha}$, co pozwala rozwiązać zależność (6.6) względem $\pi_{(\alpha\beta)}$ otrzymując

$$\begin{aligned} \pi_{(\alpha\beta)} &= \frac{1}{2}(\bar{\in}_{3\alpha\lambda} k_\beta + \bar{\in}_{3\beta\lambda} k_\alpha) \cdot \check{a}^\lambda - \frac{1}{2}(b^\varkappa_\alpha \gamma_{\varkappa\beta} + b^\varkappa_\beta \gamma_{\varkappa\alpha}) - b_{\alpha\beta}\gamma_{33} + \\ &\quad + \frac{1}{2}(\gamma_{3\alpha|\beta} + \gamma_{3\beta|\alpha}) + \frac{1}{2}(A_{\alpha3\beta} + A_{\beta3\alpha} - A_{3\alpha\beta} - A_{3\beta\alpha}), \end{aligned} \tag{6.7}$$

co razem z $(2.12)_2$ daje ścisłe wyrażenie $\pi_{(\alpha\beta)}$ poprzez Ω oraz $\check{\gamma}_{ab}$.

Wprowadzając (6.6) do (2.14) otrzymamy trzy ścisłe równania ciągłości odkształceń wyrażone poprzez $\check{\gamma}_{ab}$ oraz $\pi_{(\alpha\beta)}$, które zapewniają istnienie parametrów przemieszczenia u i β.

W rozważanym ogólnym przypadku deformacji powłoki, prostokreślna powierzchnia brzegowa $\partial\mathscr{P}$, prostopadła do $\mathscr{M}$ i określona wektorem $p(s, \zeta) = r(s) + \zeta n(s)$, deformuje się w powierzchnię $\partial\overline{\mathscr{P}}$, która nie jest na ogół ani prostokreślna ani prostopadła do $\overline{\mathscr{M}}$ wzdłuż krzywej $\overline{\mathscr{C}} = \chi(\mathscr{C})$. W otoczeniu $\mathscr{C}$ dla wektora wodzącego $\overline{p} = \chi(p)$ mamy rozwinięcie

$$\overline{p}(s, \zeta) = \overline{r}(s) + \zeta\overline{a}_3(s) + \ldots, \tag{6.8}$$

które przybliża $\partial\overline{P}$ pewną powierzchnię prostokreślną określoną przez liniową część (6.8). Ortonormalna trójka wektorów $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{\nu}$ deformuje się w trójkę ukośnokątną $\overline{\boldsymbol{a}}_t = \boldsymbol{t} + \frac{d\boldsymbol{u}}{ds}$, $\overline{\boldsymbol{a}}_3 = \boldsymbol{n} + \boldsymbol{\beta}$, $\overline{\boldsymbol{a}}_\nu = \overline{\boldsymbol{a}}_t \times \overline{\boldsymbol{a}}_3$ o długościach

$$\begin{aligned} \overline{a}_t &= |\overline{\boldsymbol{a}}_t| = \sqrt{1+2\gamma_{tt}}, \qquad \overline{a}_3 = |\overline{\boldsymbol{a}}_3| = \sqrt{1+2\gamma_{33}}, \\ \overline{a}_\nu &= |\overline{\boldsymbol{a}}_\nu| = \sqrt{(1+2\gamma_{tt})(1+2\gamma_{33}) - 4\gamma_{3t}^2}, \end{aligned} \tag{6.9}$$

gdzie γ_{tt}, γ_{3t}, γ_{33} są fizycznymi składowymi odkształcenia na brzegu powłoki. Wprowadzając wektor

$$\overline{\boldsymbol{a}}_m = \overline{\boldsymbol{a}}_\nu \times \overline{\boldsymbol{a}}_t = \overline{a}_t^2 \overline{\boldsymbol{a}}_3 - 2\gamma_{3t}\overline{\boldsymbol{a}}_t, \qquad \overline{a}_m = \overline{a}_\nu \overline{a}_t, \tag{6.10}$$

można pokazać, że deformacja wersorów $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{\nu}$ w $\overline{\boldsymbol{a}}_t$, $\overline{\boldsymbol{a}}_m$, $\overline{\boldsymbol{a}}_\nu$ składa się z ich odpowiedniego rozciągnięcia (6.9) i (6.10) oraz dwóch kolejnych obrotów skończonych. Obroty te mogą być zastąpione jednym równoważnym obrotem skończonym, wykonywanym przy pomocy tensora $\boldsymbol{R}_t$ lub wektora $\boldsymbol{\Omega}_t$, określanych poprzez $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{\beta}$ zgodnie z zależnościami

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}_t &= \frac{\overline{\boldsymbol{a}}_t}{\overline{a}_t} \otimes \boldsymbol{t} + \frac{\overline{\boldsymbol{a}}_m}{\overline{a}_m} \otimes \boldsymbol{n} + \frac{\overline{\boldsymbol{a}}_\nu}{\overline{a}_\nu} \otimes \boldsymbol{\nu}, \\ 2\boldsymbol{\Omega}_t &= \boldsymbol{t} \times \frac{\overline{\boldsymbol{a}}_t}{\overline{a}_t} + \boldsymbol{n} \times \frac{\overline{\boldsymbol{a}}_m}{\overline{a}_m} + \boldsymbol{\nu} \times \frac{\overline{\boldsymbol{a}}_\nu}{\overline{a}_\nu}. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Różniczkowanie $\boldsymbol{\Omega}_t$ prowadzi do zależności (2.17), gdzie dla składowych $\boldsymbol{k}_t$ otrzymano ścisłe wzory poprzez miary odkształcenia γ_{ab} oraz $\pi_{(\alpha\beta)}$:

$$\begin{aligned} -k_{tt} &= \frac{1}{\overline{a}_t \overline{a}_m} \left[\overline{a}_t^2 \left(2\frac{d\gamma_{3t}}{ds} + \sigma_t - \pi_{tt} \right) - 2\gamma_{3t} \frac{d\gamma_{tt}}{ds} \right] - \sigma_t \\ k_{\nu t} &= \frac{1}{\overline{a}_\nu \overline{a}_m} \left[\sqrt{\frac{\overline{a}}{a}}\, \overline{a}_t^2 (\tau_t + \nu_\lambda \overline{a}^{c\lambda} \gamma_{c3\beta} t^\beta) + \right. \\ &\qquad \left. + 2\gamma_{3t}(\chi_t - \nu_\lambda \overline{a}^{\lambda c} \gamma_{c\alpha\beta} t^\alpha t^\beta) \right] - \tau_t, \\ -k_{nt} &= \frac{1}{\overline{a}_\nu \overline{a}_t} \sqrt{\frac{\overline{a}}{a}} (\varkappa_t - \nu_\lambda \overline{a}^{\lambda c} \gamma_{c\alpha\beta} t^\alpha t^\beta) - \varkappa_t, \\ \gamma_{abc} &= \gamma_{ab;c} + \gamma_{ac;b} - \gamma_{bc,a}. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Powierzchnię prostokreślną określoną przez liniową część (6.8) można zadać jednoznacznie zadając wartości $\boldsymbol{u}$ oraz $\boldsymbol{\beta}$ na $\mathscr{C}$. W [5] pokazano, że zadanie $\boldsymbol{\Omega}_t$ oraz γ_{tt}, γ_{3t}, γ_{33} lub $\boldsymbol{k}_t$ oraz γ_{tt}, γ_{3t}, γ_{33} również określa tę powierzchnię w sposób uwikłany, z dokładnością do sztywnego przesunięcia lub sztywnego ruchu w przestrzeni. W ten sposób również w ogólnym przypadku deformacji powłoki zostały sformułowane kinematyczne i deformacyjne warunki brzegowe, umożliwiające formułowanie ogólnych zagadnień nieliniowej teorii powłok w odpowiednio zmodyfikowanych zmiennych niezależnych.

Podane tutaj zależności, wynikające z obrotowej części deformacji, są trójwymiarowo ścisłymi na powierzchni środkowej powłoki, gdyż uwzględnienie wyższych wyrazów rozwinięć $(6.1)_1$ oraz (6.8) nie zmieni kierunku $\bar{a}_3$ stycznej do zdeformowanego włókna materialnego obliczonej na $\mathscr{M}$. Stąd też odpowiednie wzory dla różnych wariantów uproszczonych wynikają z tych zależności jako przypadki szczególne. W szczególności, łatwo zauważyć, że nakładając więzy K-L (tzn. przyjmując $\pi_{(\alpha\beta)} = \varkappa_{\alpha\beta}$, $\gamma_{3\alpha} = \gamma_{33} = \pi_{3\alpha} = 0$, $\bar{a}_3 = \bar{n}$) z tych ścisłych zależności otrzymamy odpowiednie wzory podane w p. 2. Inne uproszczenia tych zależności dla teorii geometrycznie nieliniowej, dla teorii pierwszego przybliżenia powłok sprężystych oraz przejścia graniczne do liniowej teorii powłok typu Reissnera i klasycznej liniowej teorii powłok dyskutowane są w [5, 10].

7. Uściślone zależności teorii geometrycznie nieliniowej dla powłok sprężystych

Dwuwymiarowe równania ruchu w opisie Lagrange'a oraz odpowiednie warunki brzegowe i początkowe, spójne z $(6.1)_1$, można uzyskać albo drogą bezpośredniego całkowania po grubości powłoki lokalnych równań ruchu ośrodka ciągłego w opisie Lagrange'a [55], lub stosując zasadę Hamiltona [5]. W rezultacie otrzymamy następujący układ równań ruchu

$$\begin{aligned} &(G\mathbf{N}^\beta)_{|\beta} + \mathbf{p} = \varrho_0 \ddot{\mathbf{u}} + \varrho\ddot{\boldsymbol{\beta}}, \\ &(G\mathbf{M}^\beta)_{|\beta} - G\mathbf{N}^3 + \mathbf{l} = \varrho_1 \ddot{\mathbf{u}} + \varrho_2 \ddot{\boldsymbol{\beta}}, \end{aligned} \tag{7.1}$$

gdzie

$$\begin{aligned} &G\mathbf{N}^b = Q^{ab}\bar{\mathbf{a}}_a, \qquad Q^{ab} = N^{ab} + (G^a_{3\lambda} + \bar{a}^{ac}\gamma_{c3\lambda})M^{\lambda\beta}, \\ &G\mathbf{M}^\beta = R^{a\beta}\bar{\mathbf{a}}_a, \qquad R^{a\beta} = M^{a\beta} + (G^a_{3\lambda} + \bar{a}^{ac}\gamma_{c3\lambda})K^{\lambda\beta}. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Tutaj N^{ab}, $M^{\alpha b}$ i $K^{\alpha\beta}$ są składowymi Lagrange'owskich sił wewnętrznych i momentów 1go i 2go rzędu, $\mathbf{l}$ jest wektorem momentów powierzchniowych, $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2$ są charakterystykami bezwładnościowymi powłoki, $(\dot{\ }) \equiv \frac{d}{dt}$ oraz $G^a_{3\lambda}$ są przestrzennymi symbolami Christoffela na $\mathscr{M}$.

Rozkładając (7.1) w bazach konfiguracji odniesienia $\mathbf{a}_a$, konfiguracji aktualnej $\bar{\mathbf{a}}_a$ lub też w bazie pośredniej $\check{\mathbf{a}}_a$ uzyskano w [5] pięć różnych postaci układów równań całkowicie wyrażonych poprzez wielkości Lagrange'owskie. Każda z tych postaci posiada cechy szczególne, które mogą mieć znaczenie przy ich wykorzystaniu. W szczególności składowe równań równowagi (7.1) w bazie $\bar{\mathbf{a}}_a$ mają postać

$$\begin{aligned} &Q^{\alpha\beta}|_\beta + \bar{a}^{\alpha d}\gamma_{d\lambda\beta}Q^{\lambda\beta} + (-b^\alpha_\lambda + \bar{a}^{\alpha d}\gamma_{d3\lambda})Q^{3\lambda} + \sqrt{\frac{\bar{a}}{a}}p^\alpha = 0, \\ &Q^{3\alpha}|_\alpha + (b_{\alpha\beta} + a^{3d}\gamma_{d\alpha\beta})Q^{\alpha\beta} + \bar{a}^{3d}\gamma_{d3\alpha}Q^{3\alpha} + \sqrt{\frac{\bar{a}}{a}}p^3 = 0, \end{aligned} \tag{7.3}$$

$$
(7.3)\qquad
\begin{aligned}
&R^{\alpha\beta}|_{\beta}+\bar{a}^{\alpha d}\gamma_{d\lambda\beta}R^{\lambda\beta}+(-b^{\alpha}_{\lambda}+\bar{a}^{\alpha d}\gamma_{d3\lambda})R^{3\lambda}-Q^{\alpha 3}+\sqrt{\frac{\bar{a}}{a}}\bar{l}^{\alpha}=0,\\
&R^{3\alpha}|_{\alpha}+(b_{\alpha\beta}+\bar{a}^{3d}\gamma_{d\alpha\beta})R^{\alpha\beta}+\bar{a}^{3d}\gamma_{d3\alpha}R^{3\alpha}-Q^{33}+\sqrt{\frac{\bar{a}}{a}}\bar{l}^{3}=0.
\end{aligned}
$$

Jest to tzw. mieszana postać równań równowagi, nie zawierająca w sposób jawny składowych gradientu deformacji, co predystynuje tę postać do rozwiązywania zagadnień formułowanych poprzez wielkości deformacyjne.

Podstawą uściślonych wariantów geometrycznie nieliniowej teorii powłok sprężystych, wychodzących poza pierwsze przybliżenie dyskutowane w p. 4, musi być konsekwentnie uściślona postać funkcji energii sprężystej powłoki. Po rozwinięciu trójwymiarowej funkcji energii materiału sprężystego w szereg względem ζ i odpowiednim scałkowaniu go po grubości otrzymamy ścisłą dwuwymiarową funkcję energii sprężystej powłoki w postaci szeregu nieskończonego względem potęg (małej) grubości powłoki. Zakładając małość odkształceń i wykorzystując ściśle oszacowania składowych stanu naprężenia podane przez Johna [49], można oszacować rząd wielkości wszystkich członów tego szeregu nieskończonego. W wyniku otrzymano [5,1] następującą postać uściślonej funkcji energii sprężystej powłoki

$$
(7.4)\qquad
\begin{aligned}
\sum = {} & \frac{h}{2}H^{\alpha\beta\lambda\mu}\left(\gamma_{\alpha\beta}\gamma_{\lambda\mu}+\frac{h^2}{12}\pi_{(\alpha\beta)}\pi_{(\alpha\mu)}\right)+2hL_0^{3\beta3\mu}\left(k^2\gamma_{3\beta}\gamma_{3\mu}+l^2\frac{h^2}{48}\pi_{3\beta}\pi_{3\mu}\right)+\\
&+\frac{h^3}{12}H^{\alpha\beta\lambda\mu}\gamma_{\alpha\beta}(\mu_{\lambda\mu}-2H\pi_{(\lambda\mu)})+\frac{h^3}{12}H_1^{\alpha\beta\lambda\mu}\gamma_{\alpha\beta}\pi_{(\lambda\mu)}+O(Eh\eta^2\vartheta^4),
\end{aligned}
$$

gdzie H jest średnią krzywizną powierzchni $\mathscr{M}$, $k^2 = 5/6$, $l^2 = 7/10$ natomiast tensory sprężystości, w przypadku materiału izotropowego, określone są przez (4.2) oraz

$$
(7.5)\qquad
\begin{aligned}
H_1^{\alpha\beta\lambda\mu} = {} & \frac{E}{2(1+\nu)}\Big[2(a^{\alpha\lambda}b^{\beta\mu}+b^{\alpha\lambda}a^{\beta\mu})+2(a^{\alpha\mu}b^{\beta\lambda}+b^{\alpha\mu}a^{\beta\lambda})+\\
&+\frac{4\nu}{1-\nu}(a^{\alpha\beta}b^{\lambda\mu}+b^{\alpha\beta}a^{\lambda\mu})\Big],\qquad L_0^{3\beta3\mu}=\frac{E}{2(1+\nu)}a^{\beta\mu}.
\end{aligned}
$$

Składowe $\pi_{(\alpha\beta)}$ można wyrazić przez $\varkappa_{\alpha\beta}$ otrzymując

$$
(7.6)\qquad \pi_{(\alpha\beta)} = \varkappa_{\alpha\beta}+\gamma_{3\alpha|\beta}+\gamma_{3\beta|\alpha}-(b_{\alpha\beta}-\varkappa_{\alpha\beta})\gamma_{33}+O\left(\frac{\eta^2\vartheta^2}{h}\right) = \varkappa_{\alpha\beta}+O\left(\frac{\eta\vartheta^2}{h}\right).
$$

Jeżeli wprowadzimy (7.6) do (7.4) łatwo zauważyć, że w ramach błędu $O(Eh\eta^2\vartheta^2)$ zależność ta rzeczywiście zredukuje się do energii sprężystej (4.1) teorii pierwszego przybliżenia.

Wyrażenie (7.4) można nazwać konsekwentnym drugim przybliżeniem do energii odkształcenie powłoki. Uściśla ono wyrażenie (4.1), zachowując w sposób konsekwentny również wszystkie człony drugorzędne, ujmujące dodatkową energię sprężystą od ścinania, od zmiany krzywizny wynikającej ze ścinania oraz dodatkową energię sprężystą od różnych sprzężeń między odkształceniami błonowymi, giętnymi, ścinającymi a także poprzecznymi, ujętymi w zmodyfikowanych tensorach sprężystości $\mathbf{H}$ i $\mathbf{H}_1$.

W wielu pracach oraz monografiach proponuje się uściśloną teorię opartą o trzy pierwsze człony w wyrażeniu (7.4). Jest jednak oczywiste, że dla powłok o słabej anizotropii uwzględnienie tylko jednego spośród pięciu członów dodatkowych nie może prowadzić do wyników globalnie dokładniejszych od uzyskiwanych z teorii pierwszego przybliżenia, aczkolwiek dla wybranych zadań i w niektórych obszarach powłoki wyniki te mogą rzeczywiście okazać się bliższe rozwiązaniu trójwymiarowemu. Jednakże dla innych zadań lub w innych obszarach taka „uściślona" teoria może prowadzić nawet do wyników gorszych od uzyskiwanych z teorii pierwszego przybliżenia.

Różniczkując wyrażenie (5.7) względem odpowiednich powłokowych miar odkształcenia otrzymamy uściślone równania konstytutywne wraz z oszacowaniem ich błędu [11], np.

$$(7.7)\quad N^{\alpha\beta} = \frac{\partial\Sigma}{\partial\gamma_{\alpha\beta}} = hH^{\alpha\beta\lambda\mu}\left[\gamma_{\lambda\mu} + \frac{h^2}{12}(\mu_{\lambda\mu} - 2H\pi_{(\lambda\mu)})\right] + \frac{h^3}{12}H_1^{\alpha\beta\lambda\mu}\pi_{(\lambda\mu)} + O(Eh\eta\vartheta^4).$$

Równania konstytutywne mogą być wykorzystane do sformułowania uściślonej geometrycznie nieliniowej teorii powłok w miarach odkształcenia γ_{ab} oraz $\pi_{(\alpha\beta)}$. Rzeczywiście, podstawiając je do (7.3), oraz dokonując odpowiednich oszacowań i uproszczeń [5] otrzymamy sześć równań względem γ_{ab} i $\pi_{(\alpha\beta)}$, które uzupełnione o trzy warunki ciągłości odkształceń wynikające z uproszczenia (2.14) i (6.6) określają dziewięć równań względem dziewięciu niewiadomych składowych miar odkształcenia. Odpowiednie deformacyjne warunki brzegowe wynikają z uproszczenia zależności (6.12), natomiast uściślone naturalne warunki statyczne, energetycznie spójne z deformacyjnymi, nie zostały jeszcze dla tego ogólnego przypadku skonstruowane.

8. Niektóre problemy teoretyczne wymagające dalszych badań

Wyniki referowane w niniejszej pracy wyłaniają szereg dalszych problemów o charakterze podstawowym, dokładniejsze zbadanie których może doprowadzić do interesujących poznawczo i ważnych praktycznie wyników. Wskażmy tutaj na niektóre z tych problemów do rozwiązania w przyszłości.

Przy znanych wartościach parametrów przemieszczenia wyznaczanie miar odkształcenia, parametrów obrotu skończonego, wektora zmiany krzywizny oraz parametrów deformacyjnych brzegu sprowadza się do operacji różniczkowania. Znacznie trudniejszym jest zadanie odwrotne — wyznaczenie składowych przemieszczenia gdy znane są składowe miar odkształcenia lub nawet wyznaczenie parametrów obrotu skończonego. W zagadnieniach nieliniowej teorii powłok problemy te sprowadzają się do rozwiązania układu równań różniczkowych. Struktura równań (2.11) jest analogiczna do równań ruchu ciała sztywnego dookoła punktu stałego i na drodze wykorzystania wyników uzyskanych w mechanice analitycznej [71] można spodziewać się rozwiązania tego zadania również dla powłok.

W ramach geometrycznie nieliniowej teorii powłok nie zostały dotychczas podjęte problemy wydzielenia osobliwości rozwiązań związane z obciążeniem skupionym lub osobliwością geometrii powłoki, jak też związane z tym zagadnienia rozwiązań powłok o obszarach wielospójnych.

W zagadnieniach liniowej teorii powłok rozwiązania takie są konstruowane [56, 57] poprzez całki krzywoliniowe, zawierające pochodne przemieszczenia i zlinearyzowanego wektora obrotu. Wydaje się więc, że korzystając z zależności teorii obrotów skończonych na brzegu powłoki możnaby uzyskać podstawowe zależności niezbędne do poprawnego formułowania i rozwiązywania tego typu zagadnień również w ramach nieliniowej teorii powłok.

Uzyskanie rozwiązania numerycznego podanych tu zależności geometrycznie nieliniowej teorii powłok na ogół wymaga zastosowania metod numerycznych opartych o wariacyjne sformułowanie zagadnienia. W literaturze jest wiele rozwiązań analitycznych i numerycznych, opartych o zasady wariacyjne, uzyskanych głównie w ramach najprostszego wariantu teorii powłok typu Donnella-Musztari-Własowa, np. [58 - 61]. Celowym jest jednak opracowanie różnych zasad wariacyjnych w ramach mniej ograniczających założeń geometrycznie nieliniowej teorii powłok przy umiarkowanych, dużych oraz skończonych obrotach. Chodziłoby tu nie tylko o skonstruowanie zasad wariacyjnych określających stacjonarność funkcjonału [70, 72], lecz głównie o skonstruowanie ekstremalnych zasad dualnych i podanie zakresu ich stosowalności. Mogą tu być pomocne niektóre wyniki uzyskane ostatnio w nieliniowej teorii sprężystości [62 - 65].

Dotychczas znane rozwiązania zadań nieliniowej teorii powłok sprężystych oparte są o warianty równań, w których część obrotowa deformacji została z góry ograniczona. Przykład nieliniowej deformacji wycinka kuli podany w [66] wskazuje, że uzyskane w ten sposób rozwiązanie może okazać się niespójnym z przyjętymi założeniami wyjściowymi. Celowe jest więc wykonanie szeregu testowych przykładów numerycznych dla prostych geometrii powłok (np. czasza kulista, cylinder, stożek etc.) opartych o pełne równania teorii geometrycznie nieliniowej oraz o równania przy ograniczonych obrotach. Dla najprostszych zadań jednowymiarowych celowe byłoby również wykonanie obliczeń, przyjmując kolejno $\boldsymbol{u}$, albo $\boldsymbol{\Omega}$ i $\gamma_{\alpha\beta}$ lub też $\gamma_{\alpha\beta}$ i $\chi_{\alpha\beta}$ jako zmienne niezależne oraz przedyskutowanie zalet i wad rozwiązania przy różnych układach zmiennych oraz powiązań między nimi.

W dotychczasowej literaturze warunki ograniczające parametry związane z obrotem elementów materialnych zawsze były stosowane jedynie w ramach teorii małych odkształceń. Poprzez rozkład polarny $(2.3)_1$ odkształcenie i obrót zostały ściśle rozdzielone. Istnieje więc możliwość zbudowania również konsekwentnie uproszczonej teorii umiarkowanych lub dużych odkształceń przy ograniczonych obrotach.

W ramach teorii drugiego przybliżenia interesujące byłoby określenie warunków dodatkowych, przy których tylko jeden spośród pięciu członów drugorzędnych wystarcza do uzyskania wyników uściślonych w stosunku do teorii pierwszego przybliżenia. Dotyczy to w szczególności warunków, przy których wystarcza uwzględnienie tylko dodatkowej energii sprężystej od ścinania, gdyż takie właśnie uściślone warianty są najczęściej stosowane.

Literatura cytowana w tekście

1. W. PIETRASZKIEWICZ; *Nieliniowe teorie cienkich powłok sprężystych*, w: „Konstrukcje powłokowe, teoria i zastosowanie", pod redakcją J. Orkisza i Z. Waszczyszyna, tom 1, Mat. Symp., Kraków, 25-27.IV.1974; PWN Warszawa 1978, 27 - 50.

2. W. PIETRASZKIEWICZ; *Linear compatibility conditions for the nonlinear theory of shells*, Biuletyn IMP PAN Nr 155 (843), Gdańsk 1976, 1 - 17.
3. W. PIETRASZKIEWICZ; *Some exact reduction of the nonlinear shell compatibility conditions*, ZAMM, vol. 57, No 5, 1977, T133 - T134.
4. W. PIETRASZKIEWICZ; *Simplified equations for the geometrically non-linear thin elastic shells*, Prace IMP PAN, z. 75, 1978, 165 - 173.
5. W. PIETRASZKIEWICZ; *Obroty skończone i opis Lagrange'a w nieliniowej teorii powłok*, Biuletyn IMP PAN Nr 172 (880), Gdańsk 1976, 1 - 191 wyd. w jęz. angielskim: *Finite rotations and Lagrangean discriptions in the non-linear theory off shells*, Polish Scientific Publishers, Warszawa - Poznań 1979.
6. В. ПЕТРАШКЕВИЧ, *Некоторые соотнашения нелинейной теории оболочек Рейсснера*, Вестник Ленинградского Ун-та 1, 1979, 115 - 124.
7. W. PIETRASZKIEWICZ; *Introduction to the non-linear theory of shells*, Ruhr — Universität Bochum, Mitt. Inst. für Mech. Nr 10, Mai 1977, 1 - 154.
8. W. PIETRASZKIEWICZ; *Finite rotations in the non-linear theory of thin shells*, Lecture notes for CISM course „Thin Shells", Udine, October 17 - 26, 1977 (w druku w Springer-Verlag Wien).
9. W. PIETRASZKIEWICZ; *Three forms of geometrically non-linear bending shell equations*, VIII Int. Congress on Appl. of Math. in Engng, Weimar, June 26 - July 2, 1978 (w druku w mat. pokonf.).
10. W. PIETRASZKIEWICZ; *Finite rotations in shells. Theory of shells*, W. T. Koiter, G. K. Mikhailov, Eds., Proc. Third IUTAM Symp., Tbilisi, 1978; North-Holland P. Co., Amsterdam 1980, 445 - 471.
11. W. PIETRASZKIEWICZ; *Consistent second approximation to the elastic strain energy of a shell*, ZAMM, vol. 59, 5, T 206 - T 208.
12. К. З. ГАЛИМОВ, *Основы нелинейной теории тонких оболочек*, Изд. Казанского ун-та, Казань 1975.
13. D. O. BRUSH, B. O. ALMROTH; *Buckling of bars, plates and shells*, McGraw - Hill B. Co, New York 1975.
14. Э. Л. АКСЕЛЬРАД; *Гибкие оболочки*, Наука, Москва 1976.
15. Д. И. ШИЛЬКРУТ, П. М. ВЫРЛАН, *Устойчивость нелинейных оболочек*, Кишинев, Штинца 1977.
16. H. L. LANGHAAR; *Elastic surfaces and theories of shells*, Acta Mechanica, vol. 19, 1974, 109 - 128.
17. J. G. SIMMONDS; *Recent advances in shell theory*, in: „Advances in Engng Sci.", Proc. 13 Annual Meet, Soc. Engng Sci., NASA CP - 2001, 1976, 617 - 626.
18. H. J. WEINITSCHKE; *Some mathematical problems in the non-linear theory of elastic membranes, plates and shells*, in: „Trends in Appl. of Pure Math. to Mech.", ed. by G. Fichera, Pitman Publ., London 1976, 409 - 424.
19. Л. М. ЗУБОВ; *Теория малых деформаций предварительно напряженных тонких оболочек*, ПММ, т. 40, 1976, вып. 1, 85 - 95.
20. Л. А. ШАПОВАЛОВ; *Уравнения эластики тонкой оболочки при неосесимметричной деформации*, Мех. Тв. Тела, 1976, № 3, 62 - 71.
21. A. M. A. van der HEIJDEN; *On modified boundary conditions for the free edge of a shell*, Delft University Press, 1976.
22. A. E. GREEN, P. M. NAGHDI; *On the derivation of shell theories by direct approach*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, Ser. E, March 1974, 173 - 176.
23. Z. F. BACZYŃSKI; *Structure of equations and estimation of solutions in non-linear shell theory*, Arch. Mech. Stos., vol. 27, 1975, No 3, 375 - 384.
24. В. Л. БЕРДИЧЕВСКИЙ, *О некоторых формах уравнений теории оболочек*, ДАН СССР, т. 233, 1977, № 5, 820 - 823.
25. Э. И. ГРИГОЛЮК, В. И. МАМАЙ, *Об одном варианте уравнений теории конечных перемещений непологих оболочек*, Прикл. Мех., т. 10, 1974, № 2, 3 - 13.
26. R. HARNACH, H. ROTHERT; *On the theory of inextensional bending of shell structures* Int. J. Sol. Str. vol. 12, 1976, No 5, 359 - 376.
27. M. KLEIBER, CZ. WOŹNIAK; *Nieliniowa mechanika konstrukcji*, PWN Warszawa (w druku).
28. Л. М. ЗУБОВ; *Уравнения упругих оболочек в эйлеровых координатах*, ДАН СССР, т. 237, 1977, № 5, 1044 - 1047.
29. Л. М. ЗУБОВ, *Об условиях консервативности гидростатической нагрузки на оболочку*, „Труды X-й Всес. Конф. по Теории Обол. и Пл.", т. 1, Мецниереба, Тбилиси 1975, 129 - 134.

30. M. E. GURTIN, A. I. MURDOCK; *A continuum theory of elastic material surfaces*, ARMA vol. 57, 1975, No 4, 291 - 323.
31. P. A. ZHILIN; *Mechanics of deformable directed surfaces*, Int. J. Sol. Str. vol. 12, 1976, No 9/10, 635 - 648.
32. C. WOŹNIAK; *Non-linear mechanics of constrained material continua*, I and II, Arch. Mech. Stos., vol. 26, 1974, No 1, 105 - 118; vol. 28, 1976, No 2, 155 - 170.
33. Н. П. СЕМЕНЮК; *Об уравнениях геометрических нелинейной теории оболочек типа Тимошенко*, Прикл. Мех., т. 14, 1978, № 2, 128 - 132.
34. W. B. KRÄTZIG; *Herleitung und Struktur konsistenter nichtlinearer und linearer Shalentheorien*, TU Hannover, Bericht Nr S. 77/1, 1977, 13.1 - 13.30.
35. В. Л. БЕРДИЧЕВСКИЙ; *Вариационно-асимптотический метод*, сб.: „Некоторые вопр. мех. спл. среды", ред. С. С. Григорян, Изд. МГУ, Москва 1978, 271 - 289.
36. E. STEIN; *Variational functionals in the geometrical non-linear theory of thin shells and FE discretization with application to stability problems Theory of shells*, W. T. Koiter, G. K. Mikhailov, Eds., Proc. Third IUTAM Symp., Tbilisi 1978; North-Holland P. Co., Amsterdam 1980, 509 - 535.
37. W. WUNDERLICH; *On a consistent shell theory im mixed tensor formulation*, *Theory of Shells*, W. T. Koiter, G. K. Mikhailov, Eds., Proc. Third IUTAM Symp., Tbilisi 1978; North-Holland P. Co., Amsterdam 1980, 607 - 633.
38. C. TRUESDELL W. NOLL; *The non-linear field theory*, in: „Handbuch der Physik", vol, III/3, Springer-Verlag Berlin - Heidelberg - New York 1965.
39. А. И. ЛУРЬЕ; *Аналитическая механика*, Наука, Москва 1961.
40. В. В. НОВОЖИЛОВ; *Основы нелинейной теории упругости*, Гостехиздат, Москва-Ленинград 1948.
41. В. А. ШАМИНА; *Об упрощении общих нелинейных соотношений теории деформации сплошной среды*, сб. „Акт. проблемы нел. механики спл. среды.", вып. 1, Изд. Ленун-та, Ленинград 1977, 132 - 147.
42. J. G. SIMMONDS, D. A. DANIELSON; *Nonlinear shell theory with a finite rotation vector*, I and II, Proc. Koninkl. Ned. Ak. Wet. ser., B, vol. 73, 1970, No 5, 460 - 478.
43. J. G. SIMMONDS, D. A. DANIELSON; *Non-linear shell theory with finite rotation and stress-function vectors*, J. of Appl. Mech., Trans. ASME, Ser. E, 1972, No 4, 1085 - 1090.
44. В. В. НОВОЖИЛОВ, В. А. ШАМИНА; *О кинематических краевых условиях в нелинейных задачах теории упругости*, Изв. АН СССР, Мех. Тв. Тела, 1975, № 5, 63 - 74.
45. *Теория оболочек с учетом поперечного сдвига*, сб., Изд. Казанского ун-та, Казань 1977.
46. R. T. SHIELD; *The rotation associated with large strains*, SIAM J. Appl. Math., vol. 25, 1973, No 3, 483 - 491.
47. В. А. ШАМИНА; *Об определении вектора перемещения по компонентам Тензора деформации в нелинейной механике сплошной среды*, Изв. АН СССР, Мех. Тв. Тела, 1974, № 1, 14 - 22.
48. К. Ф. ЧЕРНЫХ, В. А. ШАМИНА; *Некоторые вопросы нелинейной классической теории тонких стержней и оболочек*, „Труды IX-й Всес. Конф. по Теории Обол. и Пл.", Судостр., Ленинград 1975, 99 - 103.
49. F. JOHN; *Estimates for the derivatives of the stresses in a thin shell and interior shell equations*, Comm. Pure and Appl. Math., vol. 18, 1965, 235 - 267.
50. W. T. KOITER; *A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells*, Proc. IUTAM Symp. "Theory of Thin Shells", Delft 1959; North-Holland P. Co, Amsterdam 1960, 12 - 33.
51. Х. М. МУШТАРИ, К. З. ГАЛИМОВ; *Нелинейная теория упругих оболочек*, Таткнигоиздат, Казань 1957.
52. W. T. KOITER; *On the nonlinear theory of thin elastic shells*, Proc. Koninkl. Ned. Ak. Wet., Ser. B, vol. 69, 1966, No 1, 1 - 54.
53. W. Z. CHIEN; *The intrinsic theory of thin shells and plates*, Quart. Appl. Math., vol. 1, 1944, 297 - 327.
54. M. K. DUSZEK; *A systematic study of kinematics of shells at large strains and displacements*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci. techn., vol. 24, 1978, No 1, 39 - 47.
55. W. PIETRASZKIEWICZ; *Material equations of motion for the nonlinear theory of thin shells*, Bull. Acad. Polon. Sci., Serie sci. techn., vol. 19, 1971, No 6, 261 - 266.
56. В. В. НОВОЖИЛОВ, К. Ф. ЧЕРНЫХ; *К расчету оболочек на сосредоточенные воздействия*, Иссл. по упр. и пл., № 2, Ленун-т, 1963.

57. W. PIETRASZKIEWICZ; *Multivalued stress functions in the linear theory of shells*, Arch. Mech. Stos., vol. 20, 1968, No 1, 37 - 45.
58. Б. Я. КАНТОР; *Нелинейные задачи теории неоднородных пологих оболочек*, Наукова Думка, Киев 1971.
59. М. С. КОРНИШИН; *Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения*, Наука, Москва 1964.
60. N. GASS; *Some two-field variational principles for nonlinear deformation analysis of shells*, ZAMM, vol. 55, 1975, No 9, 515 - 521.
61. T. NISHIMURA; *An improved generalized variational principle of the geometrical nonlinear theory of thin elastic shells and its application*, IASS Conf. on Lightw. Shell and Space Str., Sept. 13 - 16, 1977, Alma-Ata; Mir Publ., 1977, 249 - 262.
62. Л. М. ЗУБОВ; *Принцип стационарности дополнительной работы в нелинейной теории упругости*, ПММ, т. 34, 1970, вып. 2, 241 - 245.
63. W. T. KOITER; *On the complementary energy theorem in non-linear elasticity theory*, in: „Trends in Appl. of Pure Math. to Mech.", ed. by G. Fichera, Pitman Publ., London 1976, 207 - 232.
64. E. H. DILL; *The complementary energy principle in non-linear elasticity*, Lett. Appl. and Engng Sci., vol. 5, 1977, No 2, 95 - 106.
65. H. STUMPF; *Dual extremum principles and error bounds in non-linear elasticity theory*, J. Elasticity, vol. 8, 1978, No 4, 1 - 14.
66. M. WESSELS; *Das statische und dynamische Durchschlagproblem der imperfekten flachen Kugelschale bei elastischer rotationssymmetrischer Verformung*, TU Hannover, Mitt. Inst. für Statik Nr 23, Dezember 1977.
67. G. WEMPNER; *Finite elements, finite rotations and small strains*, Int. J. Sol. Str., vol. 5, 1969, 117 - 153.
68. P. G. GLOCKNER, J. P. SHRIVASTAVA; *On the geometry and kinematics of nonlinear deformation of shell space*, in: „Proceed. 11th Midw. Mech. Conf.", Iowa St. Univ., Aug. 18 - 20, 1969, 331 - 352.
69. W. T. KOITER, J. G. SIMMONDS; *Foundations of shell theory*, in: Theoretical and Applied Mechanics, Proc. 13th IUTAM Congress, Moscow 1972; Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1973.
70. R. SCHMIDT, W. PIETRASZKIEWICZ; *Variational principles in the geometrically non-linear theory of schell under going moderate* rotations, Ruhr-Universität, Inst. f. Mechanik, Bochum, July 1979 (w druku w Ingenieur - Archiv).
71. Г. А. ГОРР, Л. В. КУДРЯШОВА, Л. А. СТЕПАНОВА; *Классические задачи динамики твердого тела*, Наукова Думка, Киев 1978.
72. W. PIETRASZKIEWICZ, M. SZWABOWICZ; *Lagrangian non-linear theory of thin shells*, Archives of Mechanics (w druku).

Резюме

НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

В работе дан обзор некоторых достижений в нелинейной теории оболочек полученных в период 1975—1978, с особой ссылкой на результаты полученные автором. В рамках нелинейной теории тонких оболочек рассмотрены следующие проблемы: теория конечных поворотов, разные виды геометрических краевых условий и энергетически согласованных статических граничных условий, разные представления основных уравнений в Лагранжевом описании и их упрощение в случае малой упругой деформации, а также в случае дополнительного ограничения поворотов. Сформулированы основные зависимости общей теории конечных поворотов в оболочках. Приведена уточненная формула второго приближения к упругой энергии деформации оболочки и соответственные уточненные двухмерные уравнения равновесия и определяющие соотношения. В заключении обсуждены некоторые нерешенные проблемы нелинейной теории оболочек.

Summary

SOME PROBLEMS OF THE NON-LINEAR THEORY OF SHELLS

The paper contains a revue of some advances in the non-linear theory of shells in the period 1975—1978 with particular reference to the new results obtained by the author. Within the non-linear theory of thin shells the following topics are discussed: the theory of finite rotations, various forms of geometric boundary conditions and energetically compatible static boundary conditions, various representations in the Lagrangean descrioption and the consistent simplification of the equations in the case of small elastic strain and for additionally restricted rotations. Basic relations of the general theory of finite rotations in shells are presented. A consistent second approximations refined two-dimensional equilibrium equations and constitutive relations are presented. Finally, some unsolved problems of the non-linear theory of shells are pointed out.

INST. MASZYN PRZEPŁYWOWYCH PAN GDAŃSK

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 marca 1979 roku.