MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
2, 18 (1980)

RÓWNANIA BILANSU I ZASADY ZACHOWANIA W POROWATYCH CIAŁACH WIELOSKŁADNIKOWYCH

MAŁGORZATA WOŹNIAK (WARSZAWA)

Wstęp

Kontynualne teorie mieszanin [1, 2] oraz zarówno liniowe [3, 4] jak i nieliniowe [5, 6] sformułowania teorii ośrodków porowatych i konsolidacji postulują, że w danej chwili w jednym i tym samym miejscu przestrzeni mogą się znajdować różne cząstki ośrodka oraz, że porowatość ośrodka opisują wprowadzone *a priori* pola. Przegląd i omówienie literatury problemu można znaleźć np. w [6]. W monografii [7] przedstawiono bardziej fizyczne podejście do teorii ośrodków porowatych nasyconych cieczą, biorąc jako punkt wyjścia skokowo-niejednorodną i nieciągłą (zawierającą inkluzję i pustki) „mikro"-strukturę ciała. Podstawowe równania pola otrzymano w [7] przez przeprowadzenie uśrednień po pewnych „makro"-powierzchniach i „makro"-objętościach.

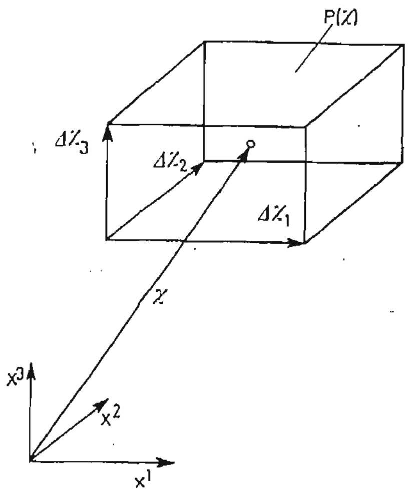
W tej pracy przedstawiono formalizację podejścia zastosowanego w [7] i dokonano jego uogólnienia na przypadek N-składnikowego ciała o dowolnej strukturze niejednorodnej i porowatej. Celem pracy jest podanie ogólnego schematu konstrukcji równań bilansu dla pól opisujących pewne globalne (uśrednione) własności porowatych ciał wieloskładnikowych. Pokazano również zastosowania tego schematu do budowy praw zachowania i niektórych równań transportu dla pól uśrednionych. Wyniki pracy umożliwiają także głębszą interpretację fizyczną pól, których istnienie postuluje się w kontynualnych teoriach mieszanin i ośrodków porowatych.

1. Podstawowe pojęcia i oznaczenia

Rozważania dotyczą ośrodka ciągłego M zajmującego w dowolnej chwili t sumę M_t rozłącznych obszarów w R^3 (tj. w przestrzeni fizycznej z ustalonym ortogonalnym układem kartezjańskim $0x^1x^2x^3$). Celem uproszczenia formalnej strony rozważań założymy, że ośrodek jest nieograniczony w tym sensie, że istnieje liczba r, $r > 0$, taka, że dla każdego $\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in R^3$, kula $K(\mathbf{x}, r)$ o promieniu r i o środku $\mathbf{x}$ zawiera punkty należące do M_t, $t \in R^3$. Ośrodek M może więc mieć strukturę porowatą (gdy $R^3 \setminus \overline{M}_t \neq \emptyset$) i skokowo-niejednorodną (gdy $\partial M_t \cap M_t \neq \emptyset$).

Zakładamy, że w ośrodku M można wyróżnić skończoną liczbę N składników $B^{(a)}, \ldots$ $\ldots, B^{(N)}$. Przez $B_t^{(a)}$, $B_t^{(a)} \subset M_t$, oznaczymy sumę obszarów przestrzeni R^3 zajętych przez składnik $B^{(a)}$ ośrodka w dowolnej chwili t, $M_t = \cup B_t^{(a)}$. Żądamy, by istniała liczba r, $r > 0$, taka by $K(\mathbf{x}, r) \cap B_t^{(a)} \neq \emptyset$, $a = 1, \ldots, N$, było dla każdego $\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in R^3$, skończoną sumą regularnych rozłącznych obszarów w R^3, przy czym wszystkie pola charakteryzujące własności lub stan dowolnego składnika $B^{(a)}$ były dostatecznie regularne w każdym z tych obszarów. Zakładamy ponadto, że w jednym punkcie przestrzeni R^3 w dowolnej lecz ustalonej chwili t może się znajdować najwyżej jeden składnik, tj. $B_t^{(a)} \cap B_t^{(b)} = \emptyset$ dla każdego $a \neq b$. Wszystkie rozważania aż do końca p. 4 dotyczą dowolnego lecz ustalonego składnika $B = B^{(a)}$; faktu tego nie będziemy zaznaczać przy użyciu wskaźnika a, wyróżniającego składnik. Należy jednak pamiętać, że wprowadzone w p. 1 - 4 obiekty należy traktować jako dotyczące jednego wybranego składnika $B = B^{(a)}$.

Przyporządkujmy każdemu $\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in R^3$, bazę wektorową $\Delta\mathbf{x}_k = (\delta_{k1}\Delta x^1, \delta_{k2}\Delta x^2, \delta_{k3}\Delta x^3)$, $k = 1, 2, 3$, tj. wprowadźmy na razie dowolną funkcję $\Delta\mathbf{x}_k = \Delta\mathbf{x}_k(\mathbf{x})$[1], określoną w R^3. Funkcję tę przyjmujemy niezależnie dla każdego składnika. Symbolem $\Delta x^k = |\Delta\mathbf{x}_k|$ oznaczymy długość k-tego wektora bazy, $\Delta\mathbf{x}_k = \Delta\mathbf{x}_k(\mathbf{x})$, $k = 1, 2, 3$. Przez $P(\mathbf{x})$ oznaczymy prostopadłościan o środku w dowolnym punkcie $\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in R^3$, rozpięty na wektorach bazy $\Delta\mathbf{x}_1, \Delta\mathbf{x}_2, \Delta\mathbf{x}_3$, przyporządkowanej temu punktowi, por. rys. 1.

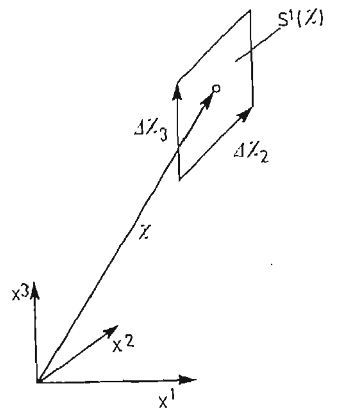


Rys. 1

Objętość $\Delta x^1 \Delta x^2 \Delta x^3$ tego prostopadłościanu oznaczymy przez ΔV. Ponadto przez $S^l(\mathbf{x})$ oznaczymy prostokąt o środku w dowolnym punkcie $\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in R^3$, rozpięty na wektorach bazy $\Delta\mathbf{x}_m, \Delta\mathbf{x}_n$, $l \neq m \neq n \neq l$, przyporządkowanej temu punktowi, por. rys. 2. Pole prostokąta $S^l(\mathbf{x})$ oznaczymy przez ΔS^l. Zarówno $\Delta\mathbf{x}_k$, ΔV jak i $\Delta S_l(\mathbf{x})$ są w przypadku ogólnym funkcjami punktu $\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in R^3$.

Niech $\Psi(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in B_t = B_t^{(a)}$, $t \in R$, oznacza dowolne pole tensorowe o walencji K, $K \geqslant 0$, które jest polem gęstości objętościowej w dowolnym równaniu bilansu wyróżnionego składnika $B = B_t^{(a)}$. Zakładamy, że dla każdej chwili t pole $\Psi(\cdot, t)$ jest ciągłe w $\bar{B}_t^{(a)}$ a ponadto $\Psi(\mathbf{x}, \cdot)$ jest różniczkowalne podług czasu dla każdego $\mathbf{x} \in R^3$. Połóżmy $\Psi(\mathbf{x}, t) \equiv 0$ dla każdego $\mathbf{x} \in R^3 \setminus \bar{B}_t^{(a)}$, rozszerzając dziedzinę funkcji $\Psi(\cdot, t)$ na R^3.

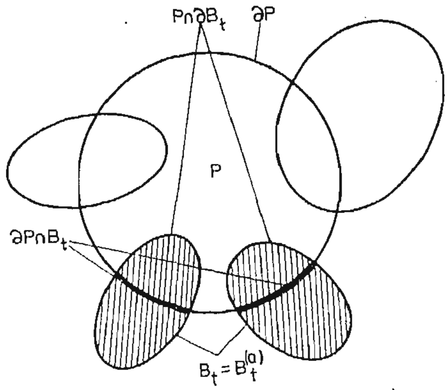
[1] Tu i dalej wskaźniki i, j, k, l, m, n przebiegają ciąg 1, 2, 3. Konwencja sumacyjna obowiązuje tylko względem wskaźnika powtarzającego się dwukrotnie na różnych poziomach.



Rys. 2

Zdefiniujmy dla każdego $\mathbf{x} \in R^3$, $t \in R$ następujące uśrednienia pól $\Psi(\mathbf{x}, t)$ po objętościach

$$
\begin{aligned}
&\overline{\Psi}(\mathbf{x}, t) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{\Delta V} \int\limits_{P(\mathbf{x})} \Psi(\mathbf{y}, t)\,dv; \qquad \mathbf{x} \in R^3, \qquad t \in R, \\
&\overline{\Psi}^{k_1\ldots k_K}(\mathbf{x}, t) \overset{\mathrm{df}}{=} \int\limits_{P(\mathbf{x})} \Psi^{k_1\ldots k_K}(\mathbf{y}, t)\,dv.
\end{aligned} \tag{1.1}
$$



Rys. 3

Kładąc $\Psi = \Xi\varrho$, gdzie $\varrho = \varrho(\mathbf{x}, t)$ jest gęstością masy wybranego składnika, zdefiniujemy także następujące uśrednienia pola $\Xi(\mathbf{x}, t)$ podług masy tego składnika

$$
\begin{aligned}
&\mathring{\Xi}(\mathbf{x}, t) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\int\limits_{P(\mathbf{x})} \Xi(\mathbf{y}, t)\varrho(\mathbf{y}, t)\,dv}{\int\limits_{P(\mathbf{x})} \varrho(\mathbf{y}, t)\,dv} = \frac{1}{\overline{\varrho}(\mathbf{x}, t)} \int\limits_{P(\mathbf{x})} \Xi(\mathbf{y}, t)\varrho(\mathbf{y}, t)\,dv, \\
&\mathring{\Xi}^{k_1\ldots k_K}(\mathbf{x}, t) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{\overline{\varrho}(\mathbf{x}, t)} \int\limits_{P(\mathbf{x})} \Xi^{k_1\ldots k_K}(\mathbf{y}, t)\varrho(\mathbf{y}, t)\,dv.
\end{aligned} \tag{1.2}
$$

Niech $\Phi(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in R^3$, $t \in R$, oznacza pole tensorowe o walencji $K+1$, $K \geqslant 0$, takie, że $\Phi(\cdot, t)$ jest polem gęstości na powierzchni zorientowanej wektorem $\mathbf{n}$, występującej w dowolnym globalnym równaniu bilansu składnika $B = B^{(\alpha)}$. Zakładamy, że $\Phi(\cdot, t)$ jest ciągłe w $\bar{B}_t^{(\alpha)}$ oraz różniczkowalne w każdym z rozłącznych obszarów, z których składa się $B_t^{(\alpha)}$, $t \in R$. Rozszerzymy dziedzinę funkcji $\Phi(\cdot, t)$ na R^3 kładąc, jak poprzednio, $\Phi(\mathbf{x}, t) \equiv 0$ dla każdego $\mathbf{x} \in R^3 \setminus \bar{B}_t^{(\alpha)}$. Dla każdego $\mathbf{x} \in R^3$, $t \in R$, oraz dla każdego wersora $e_m = (\delta_{m1}, \delta_{m2}, \delta_{m3})$ zdefiniujmy następujące uśrednienia po powierzchniach

$$
\tilde{\Phi}^m(\mathbf{x}, t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{\Delta S_m} \int\limits_{S^m(\mathbf{x})} \Phi(\mathbf{y}, t) e_m \, ds; \qquad \mathbf{x} \in R^3, \qquad t \in R,
$$

$$
\tilde{\Phi}^{k_1 \dots k_K m}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{\Delta S_m} \int\limits_{S^m(\mathbf{x})} \Phi^{k_1 \dots k_K m}(\mathbf{y}, t) \, ds. \tag{1.3}
$$

Wartości pól uśrednionych $\bar{\Psi}(\cdot, t)$, $\bar{\Xi}(\cdot, t)$, $\mathring{\tilde{\Phi}}^m(\cdot, t)$, $t \in R$, zależą oczywiście od funkcji $\Delta \mathbf{x}_K$. Przyjmiemy dalej, że pola te są co najmniej ciągłe w R^3 dla każdej chwili $t \in R$.

2. Ogólna postać równania bilansu

Niech P będzie dowolnym regularnym obszarem w R^3. Rozpatrując jeden wybrany składnik $B^{(\alpha)}$, oznaczmy $B_t = B_t^{(\alpha)}$. Oznaczmy ponadto przez $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \partial(B_t \cap P)$, jednostkowy wektor zewnętrznie normalny do gładkich płatów powierzchni $\partial(B_t \cap P)$. Niech ψ, π, σ będą polami określonymi w B_t, $t \in R$, które wraz z polem prędkości $\mathbf{v}$ składnika $B^{(\alpha)}$ są powiązane poniższym ogólnym równaniem bilansu dla tego składnika[2)]

$$
\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{P \cap B_t} \psi(\mathbf{x}, t) dv = \int\limits_{P \cap B_t} [\pi(\mathbf{x}, t) - \psi(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) ds +
\int\limits_{P \cap B_t} \sigma(\mathbf{x}, t) dv + \int\limits_{P \cap \partial B_t} \pi(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) ds. \tag{2.1}
$$

Ze związku (2.1) wynika, że ψ jest polem określającym gęstość objętościową tej wielkości fizycznej, którą bilansujemy; jest to pole tensorowe o walencji K, $K \geqslant 0$. Pole tensorowe σ, o tej samej walencji K jest gęstością objętościową źródeł wewnętrznych wielkości bilansowanej. Iloczyn $\pi \cdot \mathbf{n}$ charakteryzuje przepływ wielkości bilansowanej przez jednostkę powierzchni zorientowanej wektorem normalnym $\mathbf{n}$. Samo pole tensorowe π o walencji $K+1$, $K \geqslant 0$, charakteryzuje więc gęstość źródeł powierzchniowych wielkości bilansowanej, niezależnej od transportu masy; $\mathbf{v}$ jest polem wektorowym prędkości materiału składnika $B^{(\alpha)}$. Wszystkie powyższe pola są określone w każdej chwili t w $\bar{B}_t^{(\alpha)}$, $\bar{B}_t^{(\alpha)} \subset M_t$, a równanie (2.1) ma być spełnione dla każdego regularnego obszaru P, $P \subset R^3$.

Celem napisania ogólnego równania bilansu dla dowolnego regularnego, niezależnego od czasu, obszaru P, $P \subset R^3$, rozszerzmy pola $\psi, \dots, \mathbf{v}$, dotychczas określone w $\bar{B}_t$ dla każdego t, na całą przestrzeń R^3, kładąc $\psi(\mathbf{x}, t) \equiv 0$, $\pi(\mathbf{x}, t) \equiv 0$, $\sigma(\mathbf{x}, t) \equiv 0$, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \equiv 0$

[2)] Ogólnym równaniem bilansu nazywamy równanie bilansu, w którym polom ψ, π, σ nie nadajemy wyraźnego sensu fizycznego, por. [8], str. 141. Wyprowadzenie związku (2.1) ze znanej ogólnej zasady bilansu, [8], podano w Dodatku na końcu pracy.

dla każdego $\mathbf{x} \in R^3 \setminus \overline{B}_t$ i każdego $t \in R$. Oznaczmy tu przez $\Sigma_t(P)$ sumę brzegów rozłącznych obszarów, z których składa się ∂B_t, zawartych w obszarze P, $\Sigma_t(P) \overset{\mathrm{df}}{=} P \cap \partial B_t$. Ogólne równanie bilansu ma wtedy postać

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_P \psi(\mathbf{x}, t)dv = \oint_{\partial P} [\pi(\mathbf{x}, t) - \psi(\mathbf{x}, t)\otimes \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)]\cdot \mathbf{n}ds + \int_P \sigma(\mathbf{x}, t)dv + \int_{\Sigma_t(P)} \pi(\mathbf{x}, t)\cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t)ds,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_P \psi^{k_1\ldots k_K}(\mathbf{x}, t)dv = \oint_{\partial P} [\pi^{k_1\ldots k_K l}(\mathbf{x}, t) - \psi^{k_1\ldots k_K}(\mathbf{x}, t)v^l(\mathbf{x}, t)]n_l ds + \int_P \sigma^{k_1\ldots k_K}(\mathbf{x}, t)dv + \int_{\Sigma_t(P)} \pi^{k_1\ldots k_K l}(\mathbf{x}, t)n_l ds. \tag{2.2}$$

Związek (2.2) ma być spełniony dla dowolnego regularnego obszaru P w R^3. Stanowić on będzie podstawę do otrzymania w punkcie 3 funkcyjnych różnicowych równań bilansu, z których otrzymamy w punkcie 4 zasady bilansu dla pól uśrednionych, tj. pól zdefiniowanych przez (1.1) - (1.3).

3. Funkcyjne różnicowe równania bilansu

Przyjmijmy $P = P(\mathbf{x})$ w (2.2) dla dowolnego $\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in R^3$ przy danej, na razie dowolnej bazie $\Delta\mathbf{x}_1, \Delta\mathbf{x}_2, \Delta\mathbf{x}_3$ (baza ta może zależeć również od $\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in R^3$, por. pkt. 1). Oznaczmy ponadto $\Sigma_t(\mathbf{x}) \overset{\mathrm{df}}{=} \Sigma_t(P)$ dla $P = P(\mathbf{x})$. Zdefiniujmy dla dowolnej funkcji $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in R^3$, operator różnicowy

$$\frac{\Delta}{\Delta \mathbf{x}^l} f(\mathbf{x}, t) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{f(\mathbf{x}+\frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}_l, t) - f(\mathbf{x}-\frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}_l, t)}{\Delta \mathbf{x}^l}. \tag{3.1}$$

Dzieląc (2.2) przez ΔV i uwzględniając definicję (1.1), (1.2), (1.3) i (3.1) otrzymamy

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{\psi}^{k_1\ldots k_K}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{V}\int_{P(\mathbf{x})} \psi^{k_1\ldots k_K}(\mathbf{y}, t)dv;$$

$$\frac{\Delta}{\Delta \mathbf{x}^l}\tilde{\pi}^{k_1\ldots k_K l}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\Delta V}\int_{\partial P(\mathbf{x})} \dot{\pi}^{k_1\ldots k_K l}(\mathbf{y}, t)n_l ds; \qquad \overline{\sigma}^{k_1\ldots k_K}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\Delta V}\int_{P(\mathbf{x})} \sigma^{k_1\ldots k_K}(\mathbf{y}, t)dv.$$

W dalszym ciągu mamy

$$\frac{1}{\Delta V}\int_{\partial P(\mathbf{x})} \psi^{k_1\ldots k_K}(\mathbf{y}, t)v^l(\mathbf{y}, t)\mathrm{n}_l ds = \sum_{l=1}^{3}\frac{1}{\Delta S_l \Delta x^l}\Bigg[\int_{S^l(\mathbf{x}+\frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}_l)} \psi^{k_1\ldots k_K}(\mathbf{y}, t)v^l(\mathbf{y}, t)ds - \int_{S^l(\mathbf{x}-\frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}_l)} \psi^{k_1\ldots k_K}(\mathbf{y}, t)v^l(\mathbf{y}, t)ds\Bigg], \tag{3.2}$$

Oznaczając przez $\varrho = \varrho(\mathbf{x}, t)$ gęstość masy rozpatrywanego składnika, zdefiniujmy prędkość średnią $\mathring{\mathbf{v}}$ tego składnika, zgodnie z (1.2)

$$\mathring{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\int_{P(\mathbf{x})} v(\mathbf{y}, t)\varrho(\mathbf{y}, t)dv}{\int_{P(\mathbf{x})} \varrho(\mathbf{y}, t)dv}. \tag{3.3}$$

Przedstawmy następnie wektor prędkości jako sumę

$$\mathrm{v}^l(\mathrm{y}, t) = \mathring{\mathrm{v}}^l(\mathrm{x}, t) + \overset{*}{\mathrm{v}}{}^l(\mathrm{y}, t); \quad \mathrm{y} \in \mathrm{S}^l(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in \mathrm{R}^3, \tag{3.4}$$

gdzie

$$\overset{*}{\mathrm{v}}{}^l(\mathrm{y}, t) \overset{\mathrm{df}}{=} \mathrm{v}^l(\mathrm{y}, t) - \mathring{\mathrm{v}}^l(\mathrm{x}, t), \quad \mathrm{y} \in S^l(\mathrm{x}), \tag{3.5}$$

jest definicją tzw. prędkości oscylacyjnej $\overset{*}{\mathrm{v}}$ w dowolnie wybranym punkcie y prostokąta $\mathrm{S}^l(\mathrm{x})$. Rozkład prędkości oscylacyjnej $\overset{*}{\mathrm{v}}{}^l$ jest określony niezależnie dla każdego prostokąta $\mathrm{S}^l(\mathrm{x})$. Podobnie przyjmijmy

$$\psi^{k_1 \ldots k_K}(\mathrm{y}, t) = \overline{\psi}^{k_1 \ldots k_K}(\mathrm{x}, t) + \overset{*}{\psi}{}^{k_1 \ldots k_K}(\mathrm{y}, t); \quad \mathrm{y} \in P(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in \mathrm{R}^3, \tag{3.6}$$

gdzie

$$\overset{*}{\psi}{}^{k_1 \ldots k_K}(\mathrm{y}, t) \overset{\mathrm{df}}{=} \psi^{k_1 \ldots k_K}(\mathrm{y}, t) - \overline{\psi}^{k_1 \ldots k_K}(\mathrm{x}, t), \quad \mathrm{y} \in P(\mathrm{x}), \tag{3.7}$$

jest oscylacją wielkości ψ w dowolnym punkcie prostopadłościanu P(x); wielkość oscylacyjna $\overset{*}{\psi}$ jest określona niezależnie dla każdego prostopadłościanu P(x), $\mathrm{x} \in \mathrm{R}^3$. Prawą stronę równości (3.2) można teraz doprowadzić do postaci

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{3} \frac{1}{\Delta \mathrm{S}_l \Delta x^l} \Big[& \int\limits_{\mathrm{S}^l(\mathrm{x}+\frac{1}{2}\Delta \mathrm{x}_l)} (\overset{*}{\psi}{}^{k_1 \ldots k_K} \mathring{v}^l + \overline{\psi}^{k_1 \ldots k_K} \overset{*}{v}{}^l + \overset{*}{\psi}{}^{k_1 \ldots k_K} \overset{*}{\mathrm{v}}{}^l) ds - \\ & - \int\limits_{S^l(\mathrm{x}-\frac{1}{2}\Delta \mathrm{x}_l)} \overset{*}{\psi}{}^{k_1 \ldots k_K} \mathring{v}^l + \overline{\psi}^{k_1 \ldots k_K} \overset{*}{v}{}^l + \overset{*}{\psi}{}^{k_1 \ldots k_K} \overset{*}{v}{}^l) ds + \\ & + \frac{\Delta}{\Delta x^l} (\overline{\psi}^{k_1 \ldots k_K} \mathring{v}^l) = \frac{\Delta}{\Delta \mathrm{x}^l} (\tilde{\eta}^{k_1 \ldots k_K l} + \overline{\psi}^{k_1 \ldots k_K} \mathring{\mathrm{v}}^l), \end{aligned} \tag{3.8}$$

w której

$$\begin{aligned} & \tilde{\eta}^{k_1 \ldots k_K l}(\mathrm{x}, t) = \frac{1}{\Delta S_l} \int\limits_{S^l(\mathrm{x})} \eta^{k_1 \ldots k_K l}(\mathrm{y}, t) ds; \quad \mathrm{y} \in S^l(\mathrm{x}), \\ & \eta^{k_1 \ldots k_K l}(\mathrm{y}, t) \overset{\mathrm{df}}{=} (\psi^{k_1 \ldots k_K}(\mathrm{y}, t) \overset{*}{v}{}^l(\mathrm{y}, t) + \overset{*}{\psi}{}^{k_1 \ldots k_K}(\mathrm{y}, t) \mathring{\mathrm{v}}^l(\mathrm{y}, t)). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Korzystając z (3.1) oraz (3.8), równość (3.2) przedstawimy w postaci

$$\frac{1}{\Delta V} \int\limits_{\partial P(\mathrm{x})} \psi^{k_1 \ldots k_K}(\mathrm{y}, t) v^l(\mathrm{y}, t) = \sum_{l=1}^{3} \left[\frac{\Delta}{\Delta \mathrm{x}^l} \mathring{v}^l(\mathrm{x}, t) \tilde{\psi}^{k_1 \ldots k_K}(\mathrm{x}, t) - \frac{\Delta}{\Delta \mathrm{x}^l} \tilde{\eta}^{k_1 \ldots k_K l}(\mathrm{x}, t) \right].$$

Oznaczmy ponadto

$$q^{k_1 \ldots k_K}(\mathrm{x}, t) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{\Delta V} \int\limits_{\Sigma_l(\mathrm{x})} \pi^{k_1 \ldots k_K}(\mathrm{y}, t) \mathrm{n}_l(\mathrm{y}, t) ds. \tag{3.10}$$

Wykorzystując powyższe przekształcenia oraz wprowadzone oznaczenia, ogólne równanie bilansu (2.2) doprowadzimy do postaci

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{\psi}^{k_1 \ldots k_K}(\mathrm{x}, t) = \frac{\Delta}{\Delta \mathrm{x}^l} [& \tilde{\pi}^{k_1 \ldots k_K l}(\mathrm{x}, t) - \mathring{v}^l(\mathrm{x}, t) \overline{\psi}^{k_1 \ldots k_K}(\mathrm{x}, t) - \\ & - \tilde{\eta}^{k_1 \ldots k_K l}(\mathrm{x}, t)] + \overline{\sigma}^{k_1 \ldots k_K}(\mathrm{x}, t) + q^{k_1 \ldots k_K}(\mathrm{x}, t); \quad \mathrm{x} \in R^3, \quad t \in R. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Związek (3.11) nazwiemy funkcyjnym różnicowym równaniem bilansu dla dowolnego lecz ustalonego składnika $B = B^{(a)}$. Przy wyprowadzaniu równania (3.11) nie korzystano z żadnych założeń upraszczających opis ośrodka. Równanie (3.11) stanowi punkt wyjścia do otrzymania różniczkowych zasad bilansu dla pól uśrednionych (1.1) - (1.3).

4. Różniczkowe zasady bilansu dla pól uśrednionych

Oznaczmy przez Φ dowolne pole tensorowe o walencji $K+1$, $K \geqslant 0$, występujące w zasadzie bilansu, tj. Φ niech oznacza pola $\tilde{\pi}$, $\overline{\psi}\otimes \mathring{\mathrm{v}}$, $\tilde{\eta}$, a także ich sumę. Załóżmy, że dla przyjętej funkcji bazy wektorowej $\Delta \mathrm{x}_k = \Delta \mathrm{x}_k(\mathrm{x})$, $\mathrm{x} \in R^3$, $k = 1, 2, 3$, pola $\Phi(\cdot, t)$ są różniczkowalne, a pozostałe pola występujące w (3.11) są ciągłe w R^3 dla każdego t, $t \in R$. Zdefiniujmy różnicowo-różniczkowe operatory

$$\delta_l(\Phi) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{\Delta(\Phi)}{\Delta \mathrm{x}^l} - \frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{x}^l}, \quad l = 1, 2, 3, \tag{4.1}$$

oraz wprowadźmy pola o wartościach

$$\delta_0^{k_1 \ldots k_K}(\mathrm{x}, t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \delta_l\big(\tilde{\pi}^{k_1 \ldots k_K l}(\mathrm{x}, t) - \overline{\psi}^{k_1 \ldots k_K}(\mathrm{x}, t)\mathring{v}^l(\mathrm{x}, t) - \tilde{\eta}^{k_1 \ldots k_K l}(\mathrm{x}, t)\big). \tag{4.2}$$

Funkcyjną różnicową zasadę bilansu (3.11) można teraz napisać w postaci

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{\psi}(\mathrm{x}, t) = \operatorname{div}\big(\tilde{\pi}(\mathrm{x}, t) - \overline{\psi}(\mathrm{x}, t)\otimes \mathring{\mathrm{v}}(\mathrm{x}, t) - \tilde{\eta}(\mathrm{x}, t)\big) + \overline{\sigma}(\mathrm{x}, t) + q(\mathrm{x}, t) + \delta_0(\mathrm{x}, t),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\overline{\psi}^{k_1 \ldots k_K}(\mathrm{x}, t) = {}& \big(\tilde{\pi}^{k_1 \ldots k_K l}(\mathrm{x}, t) - \overline{\psi}^{k_1 \ldots k_K}(\mathrm{x}, t)\mathring{v}^l(\mathrm{x}, t) - \tilde{\eta}^{k_1 \ldots k_K l}(\mathrm{x}, t)\big)_{,l} + \\ & + \overline{\sigma}^{k_1 \ldots k_K}(\mathrm{x}, t) + q^{k_1 \ldots k_K}(\mathrm{x}, t) + \delta_0^{k_1 \ldots k_K}(\mathrm{x}, t), \qquad \mathrm{x} \in R^3, \quad t \in R,\end{aligned} \tag{4.3}$$

gdzie tu i dalej oznaczymy $(\cdot)_{,k} \equiv \dfrac{\partial(\cdot)}{\partial x^k}$.

Równanie (4.3) ma postać lokalnego równania bilansu, w którym występuje formalnie wprowadzone pole gęstości objętościowych źródeł δ_0. Załóżmy, że każdemu punktowi x, $\mathrm{x} \in R^3$ można przyporządkować taką trójkę wektorów $\Delta \mathrm{x}_k$, $k = 1, 2, 3$, że w klasie rozważanych problemów dla rozpatrywanego ciała, pole gęstości objętościowych „źródeł" δ_0 można uznać jako zaniedbywalnie małe w równaniach bilansu (4.3). Równanie (4.3) z pomijalnie małym polem „źródeł" δ_0 nazwiemy różniczkową zasadą bilansu dla pól uśrednionych.

Łatwo zauważyć, że różniczkową zasadę bilansu dla pól uśrednionych można stosować gdy każde pole $\Phi(\cdot, t)$, $t \in R$, w każdym obszarze $P(\mathrm{x})$, $\mathrm{x} \in R^3$, jest w przybliżeniu polem liniowym. W tym przypadku bowiem $\delta_l(\Phi)$ jest zaniedbywalnie małe, a tym samym zaniedbywalnie małe są wartości formalnie wprowadzonej gęstości objętościowej $\tilde{\delta}_0$ w zasadzie bilansu (4.3).

Zakładając tu i dalej, że $\delta_l(\Phi) \cong 0$ będziemy pole $\tilde{\eta}^{k_1 \ldots k_K}(\cdot, t)$, występujące w (3.11), traktować w przybliżeniu jako liniowe w każdym z obszarów $P(\mathrm{x})$, $\mathrm{x} \in R^3$. Tym samym

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}^{k_1 \ldots k_K l}(\mathrm{x}, t) &= \frac{1}{\Delta V}\int_{P(\mathrm{x})} \eta^{k_1 \ldots k_K l}(\mathrm{y}, t)\,dv = \frac{1}{\Delta \mathrm{x}^l}\int_{\mathrm{x}-\frac{1}{2}\Delta \mathrm{x}_l}^{\mathrm{x}+\frac{1}{2}\Delta \mathrm{x}_l} \frac{1}{\Delta S_l}\int_{S^l(\mathrm{y})} \tilde{\eta}^{k_1 \ldots k_K l}\,ds\,dy^l = \\ &= \frac{1}{\Delta \mathrm{x}^l}\int_{\mathrm{x}-\frac{1}{2}\Delta \mathrm{x}^l}^{\mathrm{x}+\frac{1}{2}\Delta \mathrm{x}^l} \eta^{k_1 \ldots k_K l}\,dy^l \cong \frac{1}{\Delta \mathrm{x}^l}\,\tilde{\eta}^{k_1 \ldots k_K l}(\mathrm{x}, t)\,\Delta \mathrm{x}^l,\end{aligned}$$

czyli

$$\tilde{\eta}(\mathbf{x}, t) \cong \tilde{\eta}(\mathbf{x}, t), \qquad \mathbf{x} \in R^3,$$

tj. uśrednienie po powierzchni $S^l(\mathbf{x})$. funkcji $\eta^{k_1...k_K l}$ zastąpimy dalej uśrednieniem tej funkcji po obszarze $P(\mathbf{x})$. Równość przybliżona powyższej postaci dotyczy także dowolnego pola $\Phi(\cdot, t)$, $t \in R$. Oznaczając $\delta \overset{\mathrm{df}}{=} \delta_0 - \operatorname{div}(\tilde{\eta} - \tilde{\eta})$, różniczkową zasadę bilansu (4.3) napiszemy w postaci alternatywnej

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{\psi}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{div}\big(\tilde{\pi}(\mathbf{x}, t) - \bar{\psi}(\mathbf{x}, t) \otimes \mathring{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) - \tilde{\eta}(\mathbf{x}, t)\big) + \bar{\sigma}(\mathbf{x}, t) + q(\mathbf{x}, t) + \delta(\mathbf{x}, t),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{\psi}^{k_1...k_K}(\mathbf{x}, t) = \big(\tilde{\pi}^{k_1...k_K l}(\mathbf{x}, t) - \bar{\psi}^{k_1...k_K}(\mathbf{x}, t)\mathring{v}^l(\mathbf{x}, t) - \tilde{\eta}^{k_1...k_K l}(\mathbf{x}, t)\big)_{,l} + \tag{4.4}$$
$$+ \bar{\sigma}^{k_1...k_K}(\mathbf{x}, t) + q^{k_1...k_K}(\mathbf{x}, t) + \delta^{k_1...k_K}(\mathbf{x}, t); \qquad \mathbf{x} \in R^3, \quad t \in R^2,$$

w której wkład „źródeł" o gęstości $\delta^{k_1...k_K}(\mathbf{x}, t)$ przyjmujemy jako pomijalnie mały.

W dalszym ciągu będziemy korzystać z różniczkowej zasady bilansu dla pól uśrednionych w postaci (4.4). Występujące w tej zasadzie uśrednione pola (zgodnie z definicjami (1.1), (1.2), (1.3)) są określone przez

$$\begin{aligned}
&\bar{\psi}^{k_1...k_K}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\Delta V}\int\limits_{P(\mathbf{x})} \psi^{k_1...k_K} dv,\\
&\tilde{\pi}^{k_1...k_K l}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\Delta S_l}\int\limits_{S^l(\mathbf{x})} \pi^{k_1...k_K l} ds,\\
&\mathring{v}^k(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\bar{\varrho}(\mathbf{x}, t)}\int\limits_{P(\mathbf{x})} v^k \varrho\, dv; \qquad \bar{\varrho}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\Delta V}\int\limits_{P(\mathbf{x})} \varrho\, dv,\\
&\tilde{\eta}^{k_1...k_K}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\Delta V}\int\limits_{P(\mathbf{x})} \psi^{k_1...k_K} \overset{*}{v}{}^l dv,\\
&\bar{\sigma}^{k^1...k_K}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\Delta V}\int\limits_{P(\mathbf{x})} \sigma^{k^1...k_K} dv,\\
&q^{k_1...k_K}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\Delta V}\int\limits_{\Sigma_l(\mathbf{x})} \pi^{k_1...k_K l} n_l\, ds; \qquad \mathbf{x} \in R^3, \quad t \in R,
\end{aligned} \tag{4.5}$$

natomiast pole $\delta(\mathbf{x}, t)$ będziemy interpretować jako zaniedbywalnie małą wydajność (formalnie wprowadzonych) dodatkowych źródeł wielkości bilansowanej.

Należy pamiętać, że wprowadzone ogólne zasady bilansu oraz występujące tam pola, dotyczą dowolnego lecz ustalonego składnika $B^{(\alpha)}$. Uzyskane powyżej funkcyjna różnicowa lokalna postać zasad bilansu (3.11), oraz ogólna postać różniczkowa (4.4) umożliwiają pewien uśredniony opis wieloskładnikowego ciała porowatego (jego homogenizację). Opis ten jest szczególnie przydatny np. w ciałach kapilarno-porowatych, gruntach, niektórych kompozytach, oraz tam, gdzie dysponujemy tylko statystycznymi informacjami o rozkładzie składników lub o porowatości. W tych sytuacjach dysponujemy równaniami konstytutywnymi bezpośrednio dla pól uśrednionych (4.5). Niektóre zastosowania zasad (4.4) podamy w punktach 4 - 7.

W zasadach bilansu (3.11) i (4.4), wszystkie pola uśrednione zależą od postaci funkcji wektorowych $\Delta\mathrm{x}_k = \Delta\mathrm{x}_k^{(a)}(\mathrm{x})$, $\mathrm{x} \in R^3$, $a = 1, \ldots, N$ bowiem dowolnie obrane prostopadłościany P(x) oraz prostokąty $S^l(\mathrm{x})$ występujące w równaniach (4.5), są rozpięte na wektorach $\Delta\mathrm{x}_1(\mathrm{x}), \Delta\mathrm{x}_2(\mathrm{x}), \Delta\mathrm{x}_3(\mathrm{x})$ oraz odpowiednio $\Delta\mathrm{x}_m(\mathrm{x}), \Delta\mathrm{x}_n(\mathrm{x})$, Wartości funkcji $\Delta\mathrm{x}_k^{(a)}(\mathrm{x})$, $k = 1, 2, 3$ dla każdego x, $\mathrm{x} \in R^3$ wyznaczają więc pewien rodzaj uśrednienia, który dla każdego składnika $B^{(a)}$ może być inny. W funkcyjnych różnicowych zasadach bilansu (3.11) rodzaj uśrednienia jest dowolny w przeciwieństwie do różniczkowych zasad bilansu (4.4), w których dodatkowo żądamy, by wkład pola δ do bilansu był pomijalnie mały. Wybór rodzaju uśrednienia (tj. przyjęcie funkcji $\Delta\mathrm{x}_k(\cdot)$ lub $P(\cdot)$) zapewniający zaniedbywalność wielkości δ w różniczkowej zasadzie bilansu (4.4) zależy od struktury ośrodka i zachodzących w nim procesów. Kryteria tego wyboru mają więc charakter fizyczny, por. np. [7], i dla różnych zjawisk fizycznych mogą być zupełnie różne. W szczególności żądamy, by wszystkie przekroje przez ośrodek prostokątami $S^l(\mathrm{x})$, $\mathrm{x} \in R^3$, $l = 1, 2, 3$ były przekrojami statystycznymi, [6]. Różniczkowej zasady bilansu nie możemy więc stosować do ciał np. o regularnym rozkładzie inkluzji, pustek, warstw, włókien itp.

Zauważmy, że w ogólnych zasadach bilansu danych przez (3.11), (4.4) i (4.5), tylko pole prędkości $\mathbf{v}$ jest w ścisłym tego słowa znaczeniu polem fizycznym. Wszystkim pozostałym polom, tj. ψ, π, σ, sens fizyczny nadamy w dalszej części pracy, w której podamy przykłady zastosowań ogólnej zasady bilansu (4.4) do budowy niektórych równań mechaniki porowatych ciał wieloskładnikowych.

Nieco inne sposoby konstrukcji różniczkowych ogólnych zasad bilansu podano w [9], gdzie zasady te nie zawierają pól $\delta(\mathrm{x}, t)$ natomiast pola o podobnym znaczeniu pojawiają się w definicjach wielkości uśrednionych.

5. Zasady zachowania dla pól uśrednionych

Korzystając ze wzorów (4.4) i (4.5) przedstawimy zasady zachowania dla pól uśrednionych w wieloskładnikowych ciałach porowatych. Ograniczymy się wyłącznie do zjawisk mechanicznych.

5.1. Zasada zachowania masy składnika. Mamy tutaj: $\psi = \varrho^{(a)}$, $\pi = 0$, $\sigma = 0$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(a)}$. Tak więc zgodnie z (4.4) i (4.5) otrzymamy

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\Delta V}\int\limits_{P(\mathrm{x})}\varrho^{(a)}dv = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^l}\left(\mathring{v}^{(a)l}\frac{1}{\Delta V}\int\limits_{P(\mathrm{x})}\varrho^{(a)}dv - \frac{1}{\Delta V}\int\limits_{P(\mathrm{x})}\overset{*}{v}^{(a)l}\varrho^{(a)}dv\right) + \delta^{(a)}.$$

Ponieważ ostatnia całka jest równa zeru (wynika to z (3.3) i (3.5)) przeto

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\Delta V}\int\limits_{P(\mathrm{x})}\varrho^{(a)}dv + \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^l}\left(\mathring{v}^{(a)l}\frac{1}{\Delta V}\int\limits_{P(\mathrm{x})}\varrho^{(a)}dv\right) = \delta^{(a)},$$

czyli

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{\varrho}^{(a)} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^l}(\mathring{v}^{(a)l}\bar{\varrho}^{(a)}) = \delta^{(a)}. \tag{5.1}$$

Przy założeniu, że pole $\delta^{(a)}$ jest pomijalnie małe, wzór (5.1) przedstawia różniczkową zasadę zachowania masy dla pól uśrednionych. Pomijając w (5.1), pole $\delta^{(a)}$ otrzymamy równanie

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{\varrho}^{(a)}+\frac{\partial}{\partial x^l}(\mathring{v}^{(a)l}\bar{\varrho}^{(a)})=0, \tag{5.2}$$

które nazwiemy uproszczonym równaniem zachowania masy, lub uproszczonym równaniem ciągłości składnika $B^{(a)}$. Wzór (5.2) ma podobną budowę jak klasyczna lokalna zasada zachowania masy, niemniej znaczenie występujących w (5.2) pól jest inne.

5.2. Zasada zachowania pędu składnika. Korzystamy z równości (4.4) i (4.5), gdzie funkcjami podcałkowymi są: $\psi^k = \varrho^{(a)}v^{(a)k}$, $\sigma^{(a)k} = \varrho^{(a)}b^{(a)k}$, $\pi^{kl} = T^{(a)kl}$, $v^k = v^{(a)k}$, $b^{(a)}$ są siłami masowymi, $T^{(a)kl}$ jest tensorem naprężenia Cauchy'ego. Mamy

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\Delta V}\int\limits_{P(x)}\varrho^{(a)}v^{(a)k}dv=\frac{\partial}{\partial x^l}\Bigg(\frac{1}{\Delta S_l}\int\limits_{S^l(x)}T^{(a)kl}ds-\mathring{v}^{(a)l}\frac{1}{\Delta V}\int\limits_{P(x)}\varrho^{(a)}v^{(a)k}dv-$$

$$-\frac{1}{\Delta V}\int\limits_{P(x)}v^{(a)k}\overset{*}{v}^{(a)l}\varrho^{(a)}dv\Bigg)+\frac{1}{\Delta V}\int\limits_{P(x)}\varrho^{(a)}b^{(a)k}dv+\frac{1}{\Delta V}\int\limits_{\Sigma_l(x)}T^{(a)kl}n_l ds+\delta^{(a)k}.$$

Korzystając z rozkładu (3.4) możemy napisać

$$\frac{1}{\Delta V}\int\limits_{P(x)}\overset{*}{v}^{(a)l}(\mathring{v}^{(a)k}+\overset{*}{v}^{(a)k})\varrho^{(a)}dv=\mathring{v}^{(a)k}\int\limits_{P(x)}\varrho^{(a)}\overset{*}{v}^{(a)l}dv+$$

$$+\int\limits_{P(x)}\overset{*}{v}^{(a)l}\overset{*}{v}^{(a)k}\varrho^{(a)}dv=\int\limits_{P(x)}\varrho^{(a)}\overset{*}{v}^{(a)k}\overset{*}{v}^{(a)l}dv.$$

Uwzględniając powyższe wyrażenie, otrzymamy

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\Delta V}\int\limits_{P(x)}\varrho^{(a)}v^{(a)k}dv=\frac{\partial}{\partial x^l}\Bigg(\frac{1}{\Delta S_l}\int\limits_{S^l(x)}T^{(a)kl}ds-\mathring{v}^{(a)k}\mathring{v}^{(a)l}\frac{1}{\Delta V}\int\limits_{P(x)}\varrho^{(a)}dv-$$

$$-\frac{1}{\Delta V}\int\limits_{P(x)}\varrho^{(a)}\overset{*}{v}^{(a)k}\overset{*}{v}^{(a)l}dv\Bigg)+\frac{1}{\Delta V}\int\limits_{P(x)}\varrho^{(a)}b^{(a)k}dv+\frac{1}{\Delta V}\int\limits_{\Sigma_l(x)}T^{(a)kl}n_l ds+\delta^{(a)k}.$$

Skąd następnie, korzystając z (1.1) - (1.3)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathring{v}^{(a)k}\bar{\varrho}^{(a)})=\frac{\partial}{\partial x^l}(\tilde{T}^{(a)kl}-\mathring{v}^{(a)k}\mathring{v}^{(a)l}\bar{\varrho}^{(a)}-\overset{*}{W}^{(a)kl})+\bar{\varrho}^{(a)}\mathring{b}^{(a)k}+r^{(a)k}+\delta^{(a)k}, \tag{5.3}$$

gdzie

$$r^{(a)k}\overset{\mathrm{df}}{=}\frac{1}{\Delta V}\int\limits_{\Sigma_l(x)}T^{(a)kl}n_l ds;\qquad \overset{*}{W}^{(a)kl}\overset{\mathrm{df}}{=}\frac{1}{\Delta V}\int\limits_{P(x)}\varrho^{(a)}\overset{*}{v}^{(a)k}\overset{*}{v}^{(a)l}dv. \tag{5.4}$$

Równanie (5.3), po pominięciu wielkości $\delta^{(a)k}$, jest uproszczoną różniczkową postacią zasady zachowania pędu. Jeżeli prędkości oscylacyjne $\overset{*}{v}^{(a)}$ są niewielkie wobec wartości prędkości średnich $\mathring{v}^{(a)}$, można pominąć człon zawierający kwadraty prędkości $\overset{*}{v}^{(a)}$. Po wprowadzeniu pochodnej całkowitej i wykorzystaniu równania (5.2), oraz po pominięciu $\delta^{(a)k}$, otrzymamy ostatecznie

$$\bar{\varrho}^{(a)}\frac{d_{(a)}\mathring{v}^{(a)k}}{dt}+\frac{\partial\overset{*}{W}^{(a)kl}}{\partial x^l}=\frac{\partial\tilde{T}^{(a)kl}}{\partial x^l}+\bar{\varrho}^{(a)}\mathring{b}^{(a)k}+r^{(a)k}, \tag{5.5}$$

gdzie

$$\frac{d_{(a)}}{dt} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^l} v^{(a)}. \tag{5.6}$$

Wzór (5.5) przedstawia uproszczoną różniczkową postać zasady bilansu pędu.

5.3. Zasada zachowania momentu pędu. Wielkością bilansowaną jest w tym przypadku moment pędu, którego gęstość dla ustalonego składnika $\mathrm{B}^{(a)}$ wyrażamy przy pomocy tensora antysymetrycznego: $\psi^{ij} = \varrho^{(a)}\mathrm{v}^{(a)[i}\mathrm{x}^{j]}$. Podobnie przyjmiemy $\sigma^{ij} = \varrho^{(a)}\mathrm{b}^{(a)[i}\mathrm{x}^{j]}$, $\pi^{ij} = \mathrm{T}^{(a)[i|k|}\mathrm{x}^{j]}$. Podstawiając powyższe wartości pól do równości (4.4), otrzymamy

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\Delta V}\int\limits_{P(\mathbf{x})} \varrho^{(a)} v^{(a)[i} y^{j]} dv = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^k}\Bigg(\frac{1}{\Delta \mathrm{S}_k}\int\limits_{\mathrm{P}^k(\mathbf{x})} T^{(a)[i|k|} y^{j]} ds -\\ -\mathring{v}^{(a)k}\frac{1}{\Delta V}\int\limits_{\mathrm{P}(\mathbf{x})} \varrho^{(a)} v^{(a)[i} y^{j]} dv - \frac{1}{\Delta V}\int\limits_{\mathrm{P}(\mathbf{x})} \varrho^{(a)} v^{(a)[i} y^{j]} \overset{*}{v}{}^{(a)k} dv\Bigg) +\\ + \frac{1}{\Delta V}\int\limits_{\mathrm{P}(\mathbf{x})} \varrho^{(a)} b^{(a)[i} y^{j]} dv + \frac{1}{\Delta V}\int\limits_{\Sigma_t(\mathbf{x})} \mathrm{T}^{(a)[i|k|} y^{j]} \mathrm{n}_k ds + \delta^{(a)ij}.\end{aligned}$$

Korzystając z rozkładu (3.4) oraz przyjmując $\mathbf{y} = \mathbf{x}+\boldsymbol{\xi}$, mamy

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\varrho}^{(a)}\mathring{v}^{(a)[i}\mathrm{x}^{j]} + \bar{\varrho}^{(a)}\mathring{v}^{(a)[i}\mu^{j]}) = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^k}(\tilde{T}^{(a)[i|k|}\mathrm{x}^{j]} +\\ + \mathrm{M}^{(a)ijk} - \mathring{v}^{(a)k}\mathring{v}^{(a)[i}\mathrm{x}^{j]}\bar{\varrho}^{(a)} - \bar{\varrho}^{(a)}\mathring{v}^{(a)k}\mathring{v}^{(a)[i}\mu^{(a)j]} +\\ + \bar{\varrho}^{(a)}\mathring{b}^{(a)[i}\mathrm{x}^{j]} + \bar{\varrho}^{(a)}\mathrm{H}^{(a)[ij]} + \mathrm{r}^{(a)[i}\mathrm{x}^{j]} + \mathrm{R}^{(a)[ij]} + \overset{*}{\mathrm{U}}{}^{(a)ij} + \delta^{(a)ij},\end{aligned} \tag{5.7}$$

gdzie $\overset{*}{\mathrm{U}}{}^{(a)ij}$ zależą od prędkości oscylacyjnej $\overset{*}{\mathrm{v}}{}^{(a)}$ oraz

$$\bar{\varrho}^{(a)}\mu^{(a)j} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{\Delta V}\int\limits_{\mathrm{P}(\mathbf{x})} \varrho^{(a)}\xi^j dv,$$

$$\mathrm{M}^{(a)ijk} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{\Delta S_k}\int\limits_{\mathrm{S}^k(\mathbf{x})} \mathrm{T}^{(a)[i|k|}\xi^{j]} ds,$$

$$\bar{\varrho}^{(a)}H^{(a)ij} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{\Delta V}\int\limits_{\mathrm{P}(\mathbf{x})} \bar{\varrho}^{(a)} b^{(a)[i}\xi^{j]} dv,$$

$$\mathrm{R}^{(a)ij} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{\Delta V}\int\limits_{\Sigma_t(\mathbf{x})} \mathrm{T}^{(a)[i|k|}\xi^{j]}\mathrm{n}_k ds.$$

Uwzględniając zasadę zachowania pędu, (5.7) zredukuje się do postaci

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\varrho}^{(a)}\mathring{v}^{(a)[i}\mu^{(a)j]}) = \tilde{\mathrm{T}}^{(a)[ij]} + \mathrm{M}^{(a)ijk}{}_{,k} - (\bar{\varrho}^{(a)}\mathring{v}^{(a)k}\mathring{v}^{(a)[i}\mu^{(a)j]})_{,k} +\\ + \bar{\varrho}^{(a)}\mathring{\mathrm{b}}^{(a)[i}\mathrm{x}^{j]} + \bar{\varrho}^{(a)}\mathrm{H}^{(a)[ij]} + \mathrm{R}^{(a)[ij]} + \delta^{(a)ij}.\end{aligned}$$

Ponieważ zgodnie z zasadą zachowania masy, dla dowolnego $\mathbf{f}$ mamy

$$\bar{\varrho}^{(a)}\frac{d_{(a)}\mathbf{f}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\varrho}^{(a)}\mathbf{f}) + \operatorname{div}(\bar{\varrho}^{(a)}\mathbf{f}\cdot\mathring{\mathrm{v}}^{(a)}),$$

otrzymamy ostatecznie po pominięciu $\delta^{(a)ij}$

$$\bar{\varrho}^{(a)}\frac{d_{(a)}}{dt}(\mathring{v}^{(a)[i}\mu^{(a)j]}) = \tilde{T}^{(a)[ij]}+M^{(a)ijk}{}_{,k}+H^{(a)[ij]}+R^{(a)[ij]}+\overset{*}{U}^{(a)[ij]}. \tag{5.8}$$

Jest to uproszczona postać różniczkowa zasady zachowania momentu pędu.

5.4. Zasada zachowania energii. Mamy tutaj $\psi = \frac{1}{2}\varrho^{(a)}v^{(a)k}v_k^{(a)}+\varrho^{(a)}\varepsilon^{(a)}$, $\pi^k = T^{(a)kl}v_l^{(a)}+$ $+h^{(a)k}$, $\sigma = \varrho^{(a)}b^{(a)k}v_k^{(a)}+q^{(a)}$, co po podstawieniu do (4.5) i (4.4) daje

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\Delta V}\int\limits_{P(x)}\left(\frac{1}{2}\varrho^{(a)}v^{(a)k}v_k^{(a)}+\varrho^{(a)}\varepsilon^{(a)}\right)dv = \frac{\partial}{\partial x^k}\left[\frac{1}{\Delta S_k}\int\limits_{S^k(x)}(T^{(a)kl}v_l^{(a)}+h^{(a)k})ds-\right.$$

$$\left.-\mathring{v}^{(a)k}\frac{1}{\Delta V}\int\limits_{P(x)}\left(\frac{1}{2}\varrho^{(a)}v^{(a)k}v_k^{(a)}+\varrho^{(a)}\varepsilon^{(a)}\right)dv-\frac{1}{\Delta V}\int\limits_{P(x)}\left(\frac{1}{2}\varrho^{(a)}v^{(a)k}v_k^{(a)}+\varrho^{(a)}\varepsilon^{(a)}\right)\overset{*}{v}^{(a)k}dv\right]+$$

$$+\frac{1}{\Delta V}\int\limits_{P(x)}(\varrho^{(a)}b^{(a)k}v_k^{(a)}+q^{(a)})dv+\frac{1}{\Delta V}\int\limits_{\Sigma_t(x)}(T^{(a)kl}v_l^{(a)}+h^{(a)k})n_k ds+\delta^{(a)}.$$

Wykorzystując związek (3.4) oraz definicje (1.1) - (1.3) mamy

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\bar{\varrho}^{(a)}\mathring{v}^{(a)k}\mathring{v}_k^{(a)}+\bar{\varrho}^{(a)}\mathring{\varepsilon}^{(a)}\right) = \frac{\partial}{\partial x^k}\left[\mathring{v}_k^{(a)}\tilde{T}^{(a)kl}+\tilde{h}^{(a)k}-\right.$$

$$\left.-\mathring{v}^{(a)k}\left(\frac{1}{2}\bar{\varrho}^{(a)}\mathring{v}^{(a)m}\mathring{v}_m^{(a)}+\bar{\varrho}^{(a)}\mathring{\varepsilon}^{(a)}\right)\right]+\bar{\varrho}^{(a)}\mathring{b}^{(a)k}\mathring{v}_k^{(a)}+q^{(a)}+r^{(a)k}\mathring{v}_k^{(a)}+s^{(a)}+\overset{*}{W}^{(a)}+\delta^{(a)},$$

gdzie oznaczono

$$s^{(a)} \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{\Delta V}\int\limits_{\Sigma_t(x)} h^{(a)k}n_k ds,$$

a $\overset{*}{W}^{(a)}$ zawiera wszystkie człony z oscylacjami prędkości $\overset{*}{v}^{(a)}$. Wykorzystajmy zasadę zachowania pędu (5.5), definicję (5.6) oraz zasadę zachowania masy (5.2). Równość powyższa sprowadzi się wtedy do postaci

$$\bar{\varrho}^{(a)}\frac{d_{(a)}}{dt}\mathring{\varepsilon}^{(a)} = \tilde{T}^{(a)kl}\mathring{v}_{l,k}^{(a)}+\tilde{h}^{(a)k}{}_{,k}+q^{(a)}+s^{(a)}+\overset{*}{W}^{(a)}+\delta^{(a)}, \tag{5.9}$$

Równanie (5.9), w którym pominiemy wielkość $\delta^{(a)}$, jest przybliżoną różniczkową postacią zasady zachowania energii.

6. Równania koncentracji dla pól uśrednionych.

Oznaczmy przez $C^{(a)}$ koncentrację składnika transportowanego przez ośrodek o gęstości ϱ, czyli gęstość ośrodka transportowanego jest równa $\varrho^{(a)} = \varrho C^{(a)}$. Wprowadźmy ponadto współczynnik dyfuzji D. Wielkości podcałkowe w związkach (4.5) mają postać $\psi = \varrho^{(a)} =$ $= \varrho C^{(a)}$, $\sigma = 0$, $\pi_k = D^{(a)}C_{,k}^{(a)}$. Podstawiając powyższe zależności do (4.5) i wykorzystując (4.4), otrzymamy

$$(6.1)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\Delta V}\int\limits_{P(\mathrm{x})}\varrho^{(a)}dv=\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^l}\left(\frac{1}{\Delta \mathrm{S}_l}\int\limits_{S^l(\mathrm{x})}\mathrm{D}^{(a)}\mathrm{C}^{(a)}{}_{,l}ds-\mathring{v}^{(a)l}\frac{1}{\Delta V}\int\limits_{P(\mathrm{x})}\varrho^{(a)}dv-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\Delta V}\int\limits_{P(\mathrm{x})}\varrho^{(a)}\overset{*}{v}{}^{(a)l}dv\right)+\frac{1}{\Delta V}\int\limits_{\Sigma_t(\mathrm{x})}\mathrm{D}^{(a)}\mathrm{C}^{(a)}{}_{,l}\mathrm{n}^l ds+\delta^{(a)}.$$

Przedstawmy $\mathrm{D}^{(a)}$ zgodnie z (3.6)

$$\mathrm{D}^{(a)}=\overline{\mathrm{D}}^{(a)}+\overset{*}{\mathrm{D}}{}^{(a)};\qquad \overline{\mathrm{D}}^{(a)}\overset{\mathrm{df}}{=}\frac{1}{\Delta V}\int\limits_{P(\mathrm{x})}\mathrm{D}^{(a)}dv$$

wobec powyższego

$$\frac{1}{\Delta \mathrm{S}_l}\int\limits_{S^l(\mathrm{x})}\mathrm{D}^{(a)}\mathrm{C}^{(a)}{}_{,l}ds=\overline{\mathrm{D}}^{(a)}\frac{1}{\Delta S_l}\int\limits_{S^l(\mathrm{x})}\mathrm{C}^{(a)}{}_{,l}ds+\frac{1}{\Delta \mathrm{S}_l}\int\limits_{S^l(\mathrm{x})}\overset{*}{\mathrm{D}}{}^{(a)}\mathrm{C}^{(a)}{}_{,l}ds=$$
$$=\overline{\mathrm{D}}^{(a)}\tilde{\mathrm{C}}^{(a)}{}_{,l}ds+\frac{1}{\Delta S_l}\int\limits_{S^l(\mathrm{x})}\overset{*}{\mathrm{D}}{}^{(a)}\mathrm{C}^{(a)}{}_{,l}ds.$$

Podstawiając powyższe związki do (6.1) mamy

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{\varrho}^{(a)}=\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^l}(\overline{\mathrm{D}}^{(a)}\tilde{\mathrm{C}}^{(a)}{}_{,k}\delta^{kl}+\mathrm{a}^{(a)l}-\mathring{v}^{(a)l}\bar{\varrho}^{(a)}-\mathrm{D}^{(a)l})+\mathrm{d}^{(a)}+\delta^{(a)},$$

gdzie

$$\mathrm{a}^{(a)l}\overset{\mathrm{df}}{=}\frac{1}{\Delta \mathrm{S}_l}\int\limits_{S^l(\mathrm{x})}\mathrm{C}^{(a)}{}_{,l}\overset{*}{\mathrm{D}}{}^{(a)}ds,$$

$$\mathrm{q}^{(a)l}\overset{\mathrm{df}}{=}\frac{1}{\Delta V}\int\limits_{P(\mathrm{x})}\bar{\varrho}^{(a)}\overset{*}{v}{}^{(a)l}\mathrm{d}v,$$

$$\mathrm{d}^{(a)}\overset{\mathrm{df}}{=}\frac{1}{\Delta V}\int\limits_{\Sigma_t(\mathrm{x})}\mathrm{D}^{(a)}\mathrm{C}^{(a)}{}_{,l}\mathrm{n}^l dv.$$

Jeżeli $\mathrm{C}^{(a)}{}_{,l}\mathrm{n}_l$ na powierzchni wewnętrznej $\Sigma_t(\mathrm{x})$ jest równa zeru, to po pominięciu $\delta^{(a)}$ otrzymamy uproszczone równanie koncentracji składnika $\mathrm{B}^{(a)}$

$$(6.2)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\bar{\varrho}^{(a)}=\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^l}(\overline{\mathrm{D}}^{(a)}\tilde{\mathrm{C}}^{(a)}{}_{,k}\delta^{kl}+\mathrm{a}^{(a)l}-\mathring{v}^{(a)l}\bar{\varrho}^{(a)}-q^{(a)l}),$$

w którym

$$(6.3)\qquad \bar{\varrho}^{(a)}=\varrho\mathrm{C}^{(a)}+\frac{1}{\Delta V}\int\limits_{P(\mathrm{x})}\mathrm{C}^{(a)}\overset{*}{\varrho}dv,$$

oraz $\overline{\mathrm{C}}^{(a)}\simeq\tilde{\mathrm{C}}^{(a)}$ (por. punkt 4).

7. Związki z teorią konsolidacji

Wprowadźmy funkcję losową, por. [8] s. 11, $\mathrm{X}^{(a)}(\mathbf{x},t,\chi)$, taką, że

$$(7.1)\qquad \mathrm{X}^{(a)}(\mathbf{x},t,\chi)=\begin{cases}1 & \text{gdy}\quad \mathbf{x}\in\overline{\mathrm{B}}_t^{(a)},\\ 0 & \text{gdy}\quad \mathbf{x}\sim\in\overline{\mathrm{B}}_t^{(a)}.\end{cases}$$

Symbol realizacji χ będzie dalej pomijany, kładąc $\eta^{(a)}(\chi, t) \stackrel{\text{df}}{=} X^{(a)}(\mathbf{x}, t, \chi)$. Oznaczmy przez $\Delta V^{(a)}$ część objętości prostopadłościanu $P(\mathbf{x})$, zajętą przez składnik $B^{(a)}$

$$\Delta V^{(a)}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{df}}{=} \int_{P(\mathbf{x})} \eta^{(a)}(\mathbf{y}, t)\, dv, \tag{7.2}$$

ponadto oznaczmy

$$n^{(a)}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\Delta V^{(a)}(\mathbf{x}, t)}{\Delta V(\mathbf{x}, t)}, \tag{7.3}$$

oraz średnią gęstość składnika $B^{(a)}$

$$\hat{\varrho}^{(a)}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{\Delta V^{(a)}} \int_{P(\mathbf{x})} \varrho^{(a)} dv. \tag{7.4}$$

Ponieważ zgodnie z (1.1)

$$\bar{\varrho}^{(a)} \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{\Delta V} \int_{P(\mathbf{x})} \varrho^{(a)} dv,$$

przeto z uwzględnieniem (7.3) i (7.4), mamy

$$\bar{\varrho}^{(a)}(\mathbf{x}, t) = n^{(a)}(\mathbf{x}, t)\hat{\varrho}^{(a)}(\mathbf{x}, t). \tag{7.5}$$

Wielkość $\bar{\varrho}^{(a)}(\mathbf{x}, t)$ jest nazywana gęstością objętościową.

Korzystając z (7.5) napiszmy zasadę zachowania masy (5.2) w postaci

$$\frac{\partial}{\partial t}(n^{(a)}\hat{\varrho}^{(a)}) + \frac{\partial}{\partial x^l}(n^{(a)}\hat{\varrho}^{(a)}\mathring{v}^{(a)l}) = 0; \quad a = 1, \ldots, N. \tag{7.6}$$

Jeżeli $B^{(a)}$ jest materiałem wypełniającym pory ośrodka, to $n^{(a)}(\mathbf{x}, t)$ można nazwać średnią porowatością obszaru $P(\mathbf{x})$ w chwili t. W teorii konsolidacji zamiast średniej porowatości występuje porowatość w „punkcie". Równanie (7.6) jest formalnie identyczne z jego odpowiednikiem w teorii konsolidacji, [6], jednakże występują różnice w sposobie interpretacji wyrażenia.

Tensorem naprężeń cząstkowych nazywamy wielkość

$$\tilde{T}^{(a)kl}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{\Delta S_l} \int_{S^l(\mathbf{x})} T^{(a)kl}(\mathbf{y}, t)\, ds. \tag{7.7}$$

Określmy część powierzchni $S^l(\mathbf{x})$ zajętą przez składnik $B^{(a)}$ jako

$$\Delta S_l^{(a)}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{df}}{=} \int_{S^l(\mathbf{x})} \eta^{(a)}(\mathbf{y}, t)\, ds. \tag{7.8}$$

Wprowadźmy

$$T^{(a)kl}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{\Delta S_l^{(a)}} \int_{S^l(\mathbf{x})} T^{(a)kl}(\mathbf{y}, t)\, ds, \tag{7.9}$$

oraz

$$\lambda^{(a)l}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{\Delta S_l^{(a)}}{\Delta S_l}. \tag{7.10}$$

Jeżeli

$$\Delta V^{(a)}(\mathrm{x}, t) \cong \Delta \mathrm{x}^l \Delta \mathrm{S}_l^{(a)}(\mathrm{x}, t), \tag{7.11}$$

tj., gdy $\Delta \mathrm{S}_l^{(a)}$ jest przekrojem statystycznym, to z uwagi na (7.3) mamy

$$\mathrm{n}^{(a)}(\mathrm{x}, t) \cong \lambda^{(a)l}(\mathrm{x}, t), \quad l = 1, 2, 3. \tag{7.12}$$

Ponieważ zgodnie z (7.9) i (7.10) tensor naprężeń cząstkowych ma postać

$$\tilde{\mathrm{T}}^{(a)kl}(\mathrm{x}, t) = \lambda^{(a)l}(\mathrm{x}, t)\hat{\mathrm{T}}^{(a)kl}(\mathrm{x}, t), \tag{7.13}$$

możemy teraz napisać zasadę zachowania pędu (5.5):

$$\mathrm{n}^{(a)}\hat{\varrho}^{(a)} \frac{d_{(a)}\mathring{v}^{(a)l}}{dt} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^l}(\lambda^{(a)l}\hat{\mathrm{T}}^{(a)kl} - \overset{*}{\mathrm{W}}{}^{(a)kl}) + \mathrm{n}^{(a)}\hat{\varrho}^{(a)}\mathring{\mathrm{b}}^{(a)k} + \mathrm{r}^{(a)k}. \tag{7.14}$$

Powyższą zasadę, po wykorzystaniu (7.12) i pominięciu członów oscylacyjnych $\overset{*}{\mathrm{W}}{}^{(a)kl}$ gdy są małe wobec $\tilde{\mathrm{T}}^{(a)kl}$, napiszemy w uproszczonej postaci

$$\mathrm{n}^{(a)}\hat{\varrho}^{(a)} \frac{d_{(a)}\mathring{v}^{(a)l}}{dt} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^l}(\mathrm{n}^{(a)}\hat{\mathrm{T}}^{(a)kl}) + \mathrm{n}^{(a)}\hat{\varrho}^{(a)}\mathrm{b}^{(a)k} + \mathrm{r}^{(a)k}. \tag{7.15}$$

Niezależnie od podobieństwa formalnego równania różniczkowego ruchu w teorii konsolidacji, [6], i zasady (7.15), różnica polega na interpretacji występujących w (4.15) pól, jako pól uśrednionych, a nie jako postulowanych a priori wielkości lokalnych.

Rozpatrując zasadę zachowania momentu pędu (5.8), założymy, że można pominąć w niej człony oscylacyjne $\overset{*}{\mathrm{U}}$. Załóżmy, że można także pominąć wielkości μ, $\overline{\mathrm{M}}$, H. Wtedy

$$\tilde{\mathrm{T}}^{(a)[ij]} + \mathrm{R}^{(a)[ij]} = 0. \tag{7.16}$$

Oznaczając

$$\hat{\mathrm{T}}^{(a)kl}(\mathrm{x}, t) \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{a=1}^{N} \mathrm{T}^{(a)kl}(\mathrm{x}, t), \tag{7.17}$$

mamy wobec $\sum_{a=1}^{N} \mathrm{R}^{(a)[ij]} = 0$.

$$\tilde{\mathrm{T}}^{(a)[ij]} = 0, \tag{7.18}$$

co oznacza, że przy stosowalności (7.16) założeń, do związku tensor naprężeń T^{ij} jest symetryczny.

Funkcje $\mathrm{n}^{(a)}(\mathrm{x}, t)$, $\lambda^{(a)l}(\mathrm{x}, t)$ oraz $\hat{\varrho}^{(a)}(\mathrm{x}, t)$ opisują cechy topologiczne ciała, podobnie jak w teorii konsolidacji [6]. Jednakże funkcje te interpretujemy jako wielkości średnie. Wielkościom $\lambda^{(a)l}$ odpowiada w teorii konsolidacji jedna funkcja $\lambda^{(a)}$ dla każdego a, [6].

Dodatek

Postać całkowej zasady bilansu (2.1) dotyczy obszaru $\mathrm{P} \cap \mathrm{B}_t$ dla którego część brzegu $\mathrm{P} \cap \partial \mathrm{B}_t$ jest powierzchnią materialną (zmienną w czasie), a druga część $\partial \mathrm{P} \cap \mathrm{B}_t$ jest powierzchnią ustaloną (niezmienną w czasie). Ponieważ ogólna postać zasady bilansu dla takich obszarów nie jest na ogół spotykana w literaturze, podano poniżej wyprowadzenie związku (2.1).

Punktem wyjścia rozważań jest równanie bilansu, por. np. [8] str. 141, w postaci

$$\int_{P\cap B_t} \varrho\dot{\xi}dv = \oint_{\partial(P\cap B_t)} \pi\cdot \mathrm{n}ds + \int_{P\cap B_t} \sigma dv, \tag{1}$$

gdzie

$$\dot{\xi} \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \xi_{,k}v^k$$

Przyjmując ponadto oznaczenie $\psi = \varrho\xi$, podobne jak w punkcie 1, oraz korzystając z lokalnej zasady zachowania masy, mamy

$$\varrho\dot{\xi} = \varrho\frac{\partial \xi}{\partial t} + \varrho\xi_{,k}v^k = \frac{\partial \psi}{\partial t} - \xi\frac{\partial \varrho}{\partial t} + (\psi v^k)_{,k} - \xi(\varrho v^k)_{,k} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\psi v^k)_{,k} \tag{2}$$

Scałkujmy równość (2) po obszarze $P\cap B_t$. Stosując twierdzenie o dywergencji, otrzymamy

$$\int_{P\cap Bt} \varrho\dot{\xi}dv = \int_{P\cap B_t} \frac{\partial \psi}{\partial t}dv + \oint_{\partial(P\cap B_t)} \psi v^k \mathrm{n}_k ds. \tag{3}$$

Zgodnie z definicją pochodnej po czasie, można łatwo wykazać, że

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{P\cap B_t} \psi dv = \int_{P\cap B_t} \frac{\partial \psi}{\partial t}dv + \int_{P\cap\partial B_t} \psi v^k \mathrm{n}_k ds. \tag{4}$$

Odejmując stronami równanie (4) od (3) otrzymujemy

$$\int_{P\cap B_t} \varrho\dot{\xi}dv = \frac{\partial}{\partial t}\int_{P\cap B_t} \psi dv + \int_{\partial P\cap B_t} \psi v^k \mathrm{n}_k ds. \tag{5}$$

Wykorzystując związek (5), podstawiając go do równania (1), otrzymamy ostatecznie

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{P\cap B_t} \psi dv = \int_{\partial P\cap B_t} (\pi - \psi\otimes v)\cdot \mathrm{n}ds + \int_{P\cap B_t} \sigma dv + \int_{P\cap\partial B_t} \pi\cdot \mathrm{n}ds,$$

to jest zasadę bilansu (2.1).

Literatura cytowana w tekście

1. C. TRUESDELL; *Sulle Basi Della Termodinamica Della Miscele*, Acc. Naz. Lincei, VIII, vol. XLIV, 1968.
2. A. E. GREEN, Quart. P. M. NAGHDI; *On Basic Equations for Mixtures, Journ. Mech. Appl. Math.* XXII, 1969.
3. M. A. BIOT; *General Theory of Three-Dimensional Consolidation*, J. Appl. Phys. 12, 1941.
4. M. A. BIOT; *Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid*, J. Acoust. Soc. Am. 28, 1956.
5. E. H. DAVIS, G. P. RAYMOND; *A Non-Linear Theory of Consolidation*, Geotechnique 2, **15**, 1965.
6. G. SZEFER; *Nonlinear Problems of Consolidation Theory*, Problémes de Reologie, Mater. Konf. Polsko-Francuskiej, Kraków 1977.
7. W. N. NIKOLAEVSKI, K. S. BASNEV, A. T. GORBUNOV, G. A. ZOTOV; *Mechanics of saturated porous media*, Moskwa 1970.

8. C. TRUESDELL; *A first course in rational continuum mechanics*, Johns Hopkins Univ. Baltimore, Maryland, 1972.
9. CZ. WOŹNIAK, M. WOŹNIAK; *Effective Balance Equations for Multiconstituent; Porous Media and Composities*, Bull. Acad. Polon. Sci. Techn. (w przygotowaniu).

Р е з ю м е

УРАВНЕНИЯ БАЛАНСА И ПРИНЦИПЫ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ ПОРИСТЫХ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СРЕД

В работе выведено общую форму уравнения баланса для разроблённых и разрывных сред зависящую от некоторых гладких полей. Полученные уравнения баланса для многокомпонентных пористых сред применено для получения принципов сохранения. Дано приблизительные связи между введенными и разрывными полями, которые описывают роздроблённые среды. Указано некоторые применения к теории консолидации.

S u m m a r y

THE BALANCE EQUATIONS AND CONSERVATION LAWS FOR MULTICONSTITUENT POROUS MEDIA

The aim of the paper is to express the general form of the balance equation for media with disintegrated and discontinuous structure in terms of certain smooth fields. The obtained form of the balance equation for these fields was applied to the function of the conservation laws for multiconstituent porous media. The interrelation between the introduced smooth fields and the discontinuous fields describing the disintegrated medium is given by a form of certain approximation. Some applications to the foundation of the non-linear consolidation theory were also mentioned.

SGGW — AKADEMIA ROLNICZA
WARSZAWA

Praca została złożona w Redakcji dnia 13 listopada 1979 roku