

DYNAMIKA PRĘTA OBCIĄŻONEGO DWIEMA SIŁAMI ŚLEDZĄCYMI

KOSTA A. MLADENOV (SOFIA)

1. Wstęp

Dynamiczne zachowanie się układu sprężystego znajdującego się pod działaniem sił śledzących lub obwodowych posiada pewne szczególne własności spowodowane tym, że siły te nie są potencjalne.

Równania różniczkowe opisujące ruch tych układów w pobliżu konfiguracji równowagi zwykle nie są samo sprzężone względem warunków brzegowych. Odpowiadające wartości własne są rzeczywiste i różne tylko w przypadku wartości krytycznej parametru obciążenia. Poza tym, wartości własne są zespolone i określają niestabilność typu dywergencji lub flutteru. Bardziej szczegółową dyskusję na temat tych własności można znaleźć w szeroko znanej monografii BOŁOTINA [1], podczas gdy praca przeglądowa HERRMANNA [2] daje zwarty przegląd problemów dotyczących zagadnień niezachowawczej stabilności, stosunkowo niedawno sformułowanej stateczności sprężystej. Należy zauważyć, że badania dające dokładne rozwiązania układów niezachowawczych dotyczą przeważnie zwykłego, jednorodnego pręta ze zmiennymi warunkami brzegowymi znajdującego się pod niezachowawczym obciążeniem. Dobrze wiadomo, że układ niezachowawczy może być typu flutteru lub dywergencji w zależności od warunków brzegowych. W poprzedniej pracy autora [3] pokazano, że parametry określające sztywność zginania, masę oraz długość wpływają na zachowanie się układu niezachowawczego w punkcie krytycznym.

W niniejszej pracy skoncentrowano się na relatywnie bardziej skomplikowanym modelu składającym się z początkowo zwykłego pręta podpartego swobodnie na gładkiej rolce i obciążonego dwiema siłami śledzącymi. Pokazano, że oba typy niestabilności typu flutteru i dywergencji mogą wystąpić nie tylko wtedy gdy zmieniają się poprzednio wspomniane parametry, ale również między wartościami dwóch sił obwodowych.

2. Rozwiązanie równań podstawowych

Rozważamy początkowo prosty, jednorodny pręt posiadający stały moment bezwładności I (rys. 1). Pręt ten jest obciążony dwiema siłami śledzącymi, o stałej wielkości lecz przeciwnych zwrotach.

Zaniedbując bezwładność obrotową, równania różniczkowe opisujące małe drgania pręta wyprowadzaliśmy z zasady d'Alemberta-Lagrange'a.

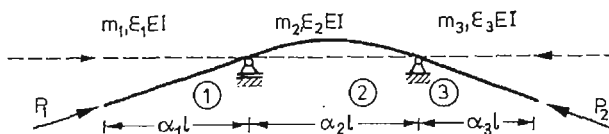
Ponieważ jest to powszechnie znany sposób, podamy więc jedynie wyniki

$$(1) \quad y_j^{IV} + k_j^2 y_j^{II} + v_j \ddot{y}_j = 0.$$

Tu jak i w pozostałej części pracy $j = 1, 2, 3$.

Ponadto celem sprowadzenia równań (1) do postaci bezwymiarowej wykorzystamy następujący zapis

$$(2) \quad y_j(\xi, t) = w_j(x, \tau)/l; \quad y_j^{IV} = \frac{\partial^4 y_j}{\partial \xi^4}; \quad \ddot{y}_j = \frac{\partial^2 y_j}{\partial t^2}$$



Rys. 1

Tutaj $w(x, \tau)$ i τ są odpowiednio obciążeniem poprzecznym, mierzonym wzdłuż osi x ($0 \leq x \leq l$) oraz czasem.

Bezwymiarowe parametry t i ξ są w następujący sposób związane z wielkościami fizycznymi x i τ .

$$(3) \quad \xi = x/l; \quad t^2 = \tau^2 EI / (ml^4),$$

przy czym EI oznacza sztywność zginania, podczas gdy m oznacza masę jednostki długości pręta. Pozostałe oznaczenia występujące w układzie równań cząstkowych (1) są definiowane następująco

$$(4) \quad \begin{aligned} k_n^2 &= P_n l^2 / (\epsilon_n EI), \quad n = 1, 2, \\ k_3^2 &= P_2 l^2 / (\epsilon_3 EI), \quad v_j = m_j / (\epsilon_j m), \end{aligned}$$

przy czym m_j oznacza masę jednostki długości j -tej części pręta, podczas gdy ϵ_j są danymi stałymi.

Zakłada się, że nietrywialne rozwiązanie układu (1) ma następującą postać

$$(5) \quad y_j = X_j(\xi_j) e^{i\omega t},$$

gdzie $i = (-1)^{1/2}$.

Bezwymiarowy parametr częstotliwości ω jest związany z wielkością fizyczną Ω następującą zależnością

$$(6) \quad \omega^2 = \Omega^2 ml^4 / (EI).$$

Podstawiając (5) do układu równań (1) i wykorzystując fakt, że $e^{i\omega t}$ nie zeruje się, otrzymano następujący układ równań różniczkowych zwyczajnych na funkcję $X_j(\xi_j)$

$$(7) \quad X_j^{IV} + k_j^2 X_j^{II} - \omega^2 v_j X_j = 0,$$

Rozwiązaniami jego są funkcje

$$(8) \quad X_j = C_{1j} \operatorname{ch} \gamma_j \xi_j + C_{2j} \operatorname{sh} \gamma_j \xi_j + C_{3j} \cos \delta_j \xi_j + C_{4j} \sin \delta_j \xi_j,$$

gdzie

$$(9) \quad \gamma_j = (z_j - k_j/2)^{1/2}, \quad \delta_j = (z_j + k_j/2)^{1/2}, \quad z_j = (n_j^4 + k_j^2/4),$$

i

$$(10) \quad n_j^4 = \omega^2 v_j / \epsilon_j, \quad 0 \leq \xi_j \leq \beta_j.$$

Rozwiązania te muszą spełniać następujące warunki brzegowe

$$(11) \quad \begin{aligned} X_1^{\text{II}}(0) = X_1^{\text{III}}(0) = X_1(\alpha_1) = 0, \quad X_1^{\text{I}}(\alpha_1) = X_2^{\text{I}}(0), \\ X_2(0) = 0, \quad \varepsilon_1 X_1^{\text{II}}(\alpha_1) = \varepsilon_2 X_2^{\text{II}}(0), \quad X_2^{\text{I}}(\alpha_2) = X_3^{\text{I}}(0), \\ \varepsilon_2 X_2^{\text{II}}(\alpha_2) = \varepsilon_3 X_3^{\text{II}}(0), \quad X_3(0) = X_3^{\text{II}}(\alpha_3) = X_3^{\text{III}}(\alpha_3) = 0. \end{aligned}$$

Podstawiając (8) do (11) otrzymuje się

$$(12) \quad \begin{aligned} C_{11}\gamma_1^2 - C_{31}\delta_1^2 = 0, \quad C_{21}\gamma_1^3 - C_{41}\delta_1^3 = 0, \\ C_{11}\text{ch}\gamma_1\alpha_1 + C_{21}\text{sh}\gamma_1\alpha_1 + C_{31}\cos\delta_1\alpha_1 + C_{41}\sin\delta_1\alpha_1 = 0, \\ C_{11}\gamma_1\text{sh}\gamma_1\alpha_1 + C_{21}\gamma_1\text{ch}\gamma_1\alpha_1 - C_{31}\delta_1\sin\delta_1\alpha_1 + C_{41}\delta_1\cos\delta_1\alpha_1 = \\ = C_{22}\gamma_2 + C_{42}\delta_2, \\ C_{11}\gamma_1^2\text{ch}\gamma_1\alpha_1 + C_{21}\gamma_1^2\text{sh}\gamma_1\alpha_1 - C_{31}\delta_1^2\cos\delta_1\alpha_1 - C_{41}\delta_1^2\sin\delta_1\alpha_1 = \\ = \varepsilon_2(C_{12}\gamma_2^2 - C_{32}\delta_2^2)/\varepsilon_1, \\ C_{12} + C_{32} = 0, \quad C_{13} + C_{33} = 0, \\ C_{12}\text{ch}\gamma_2\alpha_2 + C_{22}\text{sh}\gamma_2\alpha_2 + C_{32}\cos\delta_2\alpha_2 + C_{42}\sin\delta_2\alpha_2 = 0, \\ C_{12}\gamma_2^2\text{sh}\gamma_2\alpha_2 + C_{22}\gamma_2^2\text{ch}\gamma_2\alpha_2 - C_{32}\delta_2^2\sin\delta_2\alpha_2 + C_{42}\delta_2^2\cos\delta_2\alpha_2 = \\ = C_{23}\gamma^2 + C_{43}\delta_3, \\ C_{12}\gamma_2^2\text{ch}\gamma_2\alpha_2 + C_{22}\gamma_2^2\text{sh}\gamma_2\alpha_2 - C_{32}\delta_2^2\cos\delta_2\alpha_2 - C_{42}\delta_2^2\sin\delta_2\alpha_2 = \\ = \varepsilon_3(C_{13}\gamma_3^2 - C_{33}\delta_3^2)/\varepsilon_2, \\ C_{13}\gamma_3^2\text{ch}\gamma_3\alpha_3 + C_{23}\gamma_3^2\text{sh}\gamma_3\alpha_3 - C_{33}\delta_3^2\cos\delta_3\alpha_3 - C_{43}\delta_3^2\sin\delta_3\alpha_3 = 0, \\ C_{13}\gamma_3^3\text{sh}\gamma_3\alpha_3 + C_{23}\gamma_3^3\text{ch}\gamma_3\alpha_3 + C_{33}\delta_3^3\sin\delta_3\alpha_3 - C_{43}\delta_3^3\cos\delta_3\alpha_3 = 0. \end{aligned}$$

Dla niezerowego rozwiązania wyznacznik układu (12) musi znikać. Stąd otrzymuje się równanie charakterystyczne

$$(13) \quad \begin{aligned} z_2 \kappa_1 (z_2 \kappa_3 \text{sh} \gamma_2 \alpha_2 \sin \delta_2 \alpha_2 - z_3 n_3^2 \varepsilon_3 \Theta_2 \Theta_3) / \varepsilon_1 - \\ - n_1^2 z_1 \Theta_1 [\varepsilon_3 z_3 n_3^2 (2n_2^2 \text{ch} \gamma_2 \alpha_2 \cos \delta_2 \alpha_2 - 2n_2^2 + \\ k_2 \text{sh} \gamma_2 \alpha_2 \sin \delta_2 \alpha_2) \Theta_3 + z_2 \kappa_3 \Theta_{2s}] = 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$(14) \quad \begin{aligned} \kappa_i = \gamma_i^4 + \delta_i^4 + n_i^2 (2n_i^2 \text{ch} \gamma_i \alpha_i \cos \delta_i \alpha_i + k_i \text{sh} \gamma_i \alpha_i \sin \delta_i \alpha_i), \quad i = 1, 3, \\ \Theta_j = \gamma_j \text{ch} \gamma_j \alpha_j \sin \delta_j \alpha_j - \delta_j \text{sh} \gamma_j \alpha_j \cos \delta_j \alpha_j. \end{aligned}$$

Przestępne równanie (13) otrzymano dla

$$(15) \quad \varepsilon_2 = 1.$$

Niektóre równania charakterystyczne w zagadnieniach dotyczących wartości własnych pręta, znane z literatury, mogą być wyprowadzone jako szczególny przypadek z równań (13). Na przykład, niech α_3 jest bliskie zeru, wówczas

$$(16) \quad \Theta_3 = 0, \quad \kappa_3 = 4z_3^2,$$

oraz równania (13) redukują się do następującej postaci

$$(17) \quad \kappa_1 z_2 \text{sh} \gamma_2 \alpha_2 \sin \delta_2 \alpha_2 - \varepsilon_1 z_1 n^2 \Theta_1 \Theta_2 = 0.$$

Dla $\alpha_1 = 0$ można otrzymać z (14)

$$(18) \quad \Theta_1 = 0, \quad \kappa_1 = 4z_1^2,$$

gdy równanie (13) przyjmuje postać

$$(19) \quad z_2 \kappa_3 \text{sh} \gamma_2 \alpha_2 \sin \delta_2 \alpha_2 - z_3 n_3^2 \varepsilon_3 \Theta_2 \Theta_3 = 0.$$

Podstawiając

$$(20) \quad \alpha_1 = \alpha_3 = 0, \quad \alpha_2 = 1$$

oraz przekształcając wyrażenia (16) i (18), po transformacji dochodzi się do równania (21)

$$\text{sh} \gamma_2 \sin \delta_2 = 1.$$

Dla $P = 1$ jego pierwiastki odpowiadają częstotliwości drgań swobodnych swobodnie podpartego pręta, gdy $n_2 = 0$ prowadzi do nieskończonego zbioru pierwiastków równania (21), które odpowiadają dobrze znanej eulerowskiej sile krytycznej dla takiego samego pręta.

Równania charakterystyczne (17) i (19) dają wartości własne krzywych dla dwóch niezachowawczych zagadnień zbadanych przez autora [3].

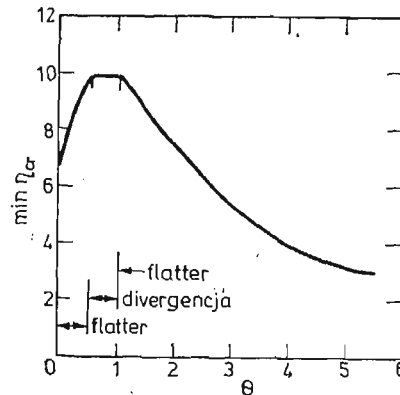
3. Wyniki numeryczne. Wnioski końcowe

Pierwiastki równania charakterystycznego (13) otrzymane zostały przy pomocy komputera. Przedstawiają one zależność pomiędzy częstotliwością a parametrami obciążenia. Wszystkie wyniki otrzymano przy założeniu

$$(22) \quad \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_2 = \varepsilon_3, \\ v_1 &= v_2 = v_3, \\ \alpha_2 &= 1. \end{aligned}$$

Dla wygody obliczeń wprowadzono wielkości

$$(23) \quad \Theta = P_2/P_1, \quad \eta = k_2.$$



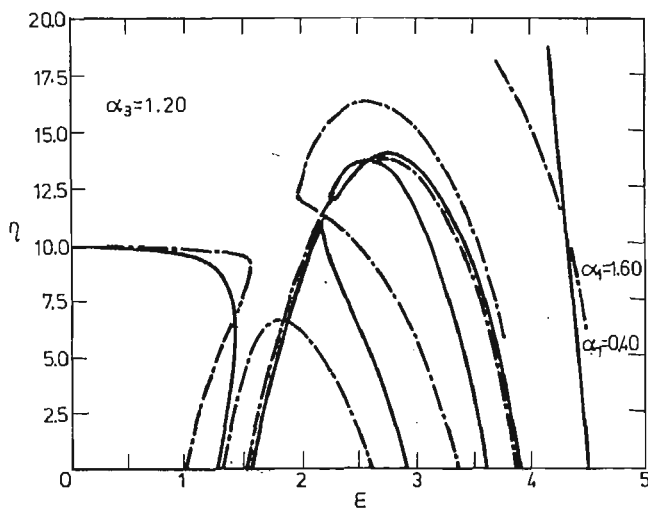
Rys. 2

Wyniki rozwiązań numerycznych dane są na rys. 2, 3, 4, 5. Pokazują one że jeden z parametrów krytycznych η zawsze zbiega do π^2 tzn., że odpowiada on najmniejszemu eulerowskiemu obciążeniu krytycznemu swobodnie podpartego pręta określającemu niestabilność typu dywergencji. Jest to albo najmniejsza wartość krytyczna, albo wartość o wyższym stopniu w zależności od parametrów rozważanego układu.

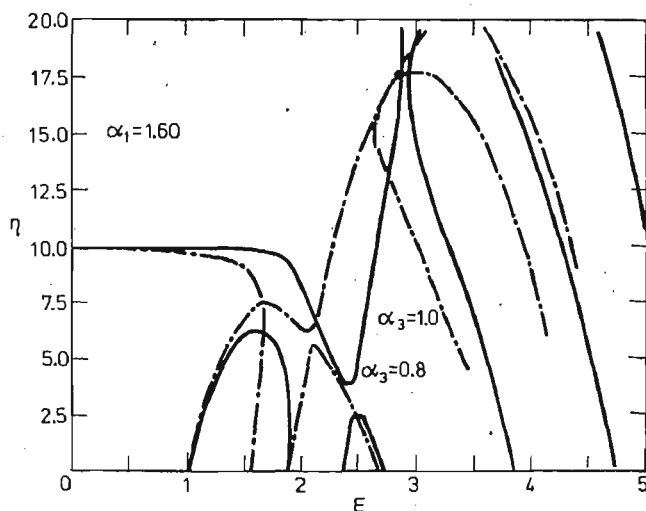
Ponadto na rys. 2 pokazaliśmy zależność pomiędzy najmniejszą krytyczną wartością parametru obciążenia η oraz stosunkiem Θ dla $\alpha_1 = \alpha_3 = 1$.

Zauważmy, że η_{cr} w dużym stopniu zależy od θ . Dla $\theta < 0.5$ i $\theta > 1.0$ najmniejsza η_{cr} odpowiada niestabilności typu flatteru, podczas gdy dla $0.5 \leq \theta \leq 1.0$ jest niezależne od θ i odpowiada niestabilności typu dywergencji.

Na rys. 3 pokazaliśmy jakie otrzymuje się krzywe wartości własnych gdy α_1 zmienia się, natomiast $\theta = 1$ i $\alpha_3 = 1.2$ są stałe.

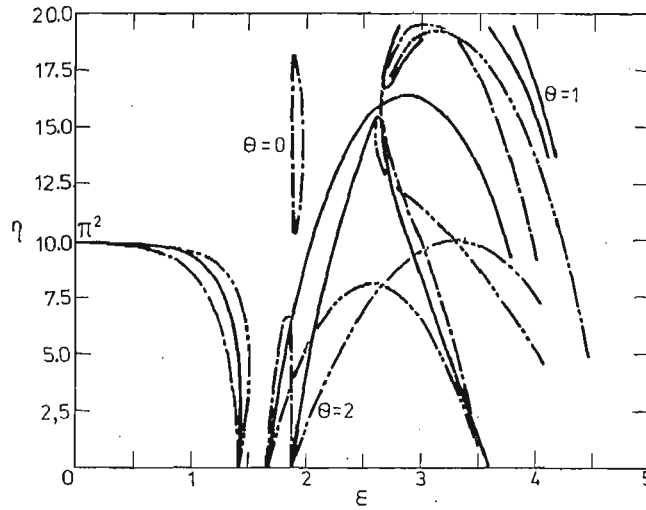


Rys. 3



Rys. 4

Podobna zależność dla $\alpha_1 = 1.6$, $\theta = 1.0$ i różnych α_3 jest przedstawiona na rys. 4. Rys. 5 pokazuje zależność wartości własnych od parametru. Widać stąd, że w punkcie krytycznym cechy dynamiczne układu zależą od parametrów układu nie tylko ilościowo, ale także jakościowo.



Rys. 5

Literatura cytowana w tekście

1. В. В. БОЛОТИН; *Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости*, Физматгит, Москва 1961.
2. G. HERRMANN; *Stability of equilibrium of elastic systems subjected to nonconservative forces*, AMR 20 (1967), 103 - 108.
3. K. A. MLADENOV; *Über das dynamische Verhalten eines Druckstabes mit tangententreuer Endbelastung*, to appear in ZAMM.

Резюме

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СТЕРЖНЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ
ДВУХ СЛЕДЯЩИХ СИЛ

Исследуется динамическое поведение двухконсольного однопролетного стержня, нагруженного в концах двумя следящими силами. Характеристическое уравнение задачи решено при помощи ЭВМ. Результаты показывают что стержень теряет устойчивость либо в виде флаттера, либо в виде дивергенции в зависимости от параметров системы и соотношения между величинами сил.

Summary

DYNAMICS OF A BAR UNDER TWO FOLLOWER FORCES

The purpose of the paper is to investigate the dynamical behaviour of a bar subjected to two follower forces. Numerical solutions of the characteristic equation show that both flutter and divergence instability may occur depending on the parameters of the system and the ratio between the magnitudes of the two forces.

WYŻSZA SZKOŁA BUDOWNICTWA I ARCHITEKTURY
SOFIA

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 kwietnia 1979 r.