

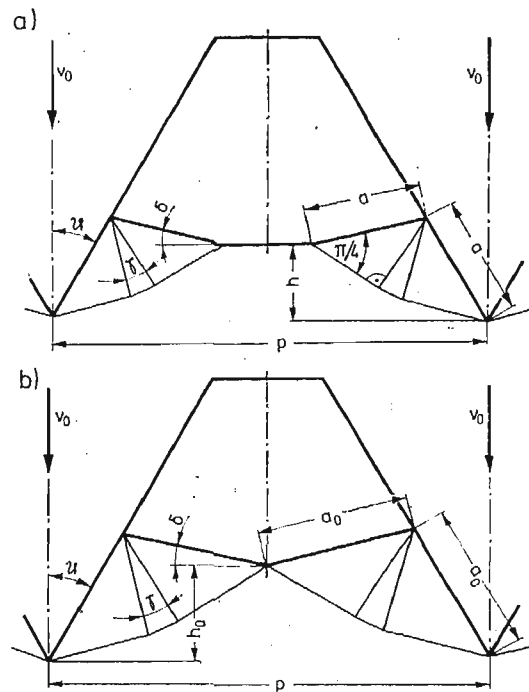
WGŁĘBIANIE NARZĘDZIA Z PERIODYCZNYM ZARYSEM KLINOWYM
W OŚRODEK PLASTYCZNY

STANISŁAW OKOŃSKI (KRAKÓW)

1. Wprowadzenie

Potrzeba rozwiązania zagadnienia wgłębiania narzędzia z periodycznym zarysem klinowym w ośrodek plastyczny wynika z braku modelu teoretycznego, mogącego posłużyć do analizy plastycznego kształtowania gwintów wewnętrznych, wygniatania trójkątnych rowków położonych blisko siebie i tym podobnych przypadków.

W dotychczasowych pracach [1] stosowano model wgłębiania pojedynczego klina, dla którego rozwiązanie zostało opracowane przez R. HILLA, E. H. LEE i S. J. TUPPERA [2, 3, 4]. W przypadku periodycznego zarysu klinowego rozwiązanie to traci ważność z chwilą połączenia się stref plastycznych wokół sąsiednich wierzchołków, dla pewnej wielkości zagłębienia h_0 . Siatkę linii poślizgu dla tego przypadku podano na rys. 1b.



Rys. 1. Siatki linii poślizgu: a — dla początkowego stadium wgłębiania, b — dla granicznego przypadku ważności rozwiązania R. HILLA

Obowiązują następujące zależności:

$$(1.1) \quad \delta = \vartheta - \gamma,$$

$$(1.2) \quad \cos(\vartheta - \gamma) = \operatorname{tg}(\pi/4 - \gamma/2).$$

Korzystając z rys. 1b oraz zależności (1.1) i (1.2) można dla dowolnego kąta wierzchołka klina obliczyć graniczną wartość zagłębienia h_0 . Wynosi ona:

$$(1.3) \quad h_0 = \frac{\cos \vartheta - \sin(\vartheta - \gamma)}{\sin \vartheta + \cos(\vartheta - \gamma)} \cdot \frac{P}{2}.$$

Analiza zagadnienia dla zagłębienia większego niż h_0 wymaga nowego opracowania

2. Rozwiązanie metodą charakterystyk

Zagadnienie rozwiązano przyjmując warunki płaskiego stanu odkształcenia, przy pominięciu tarcia i wzmocnienia materiału. Przyjęto warunek plastyczności HUBERA-MISESA. Dodatkowo założono, że krawędź powierzchni swobodnej materiału pomiędzy sąsiednimi wierzchołkami klinów składa się z dwóch prostoliniowych odcinków, które w trakcie wgłębienia przemieszczają się równoległe do swego początkowego położenia pokazanego na rys. 1. Analizowany proces jest niestacjonarny i jego rozwiązanie wymaga rozważenia pewnej liczby kolejno po sobie następujących etapów. Ponieważ zarys wciskanego narzędzia jest periodyczny, wystarczy rozważyć obszar pomiędzy sąsiednimi wierzchołkami klinów, a właściwie — ze względu na symetrię — tylko jedną jego połowę.

Analiza konkretnych zagadnień w płaskim stanie odkształcenia polega [5] na rozwiązywaniu zagadnień brzegowych do równań charakterystyk:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \operatorname{tg}\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right), & \chi + \varphi &= \text{const. dla linii } \alpha, \\ \frac{dy}{dx} &= \operatorname{tg}\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right), & \chi - \varphi &= \text{const. dla linii } \beta, \end{aligned}$$

gdzie φ jest kątem, jaki większe z naprężeń głównych tworzy z osią x , a χ funkcją zależną od sumy naprężeń głównych:

$$(2.2) \quad \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = \sigma_0 + 2k\chi.$$

Składowe stanu naprężenia wyrażają się przez funkcje χ i φ jak następuje:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_0 + 2k\chi + k \cos 2\varphi, \\ \sigma_y &= \sigma_0 + 2k\chi - k \cos 2\varphi, \\ \tau_{xy} &= k \sin 2\varphi, \end{aligned}$$

gdzie k jest granicą plastyczności przy czystym ścinaniu, a σ_0 — pewną stałą, którą należy przyjąć na początku rozwiązania. Zależności (2.3) spełniają tożsamościowo warunek plastyczności HUBERA-MISESA:

$$(2.4) \quad (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2.$$

Ponadto

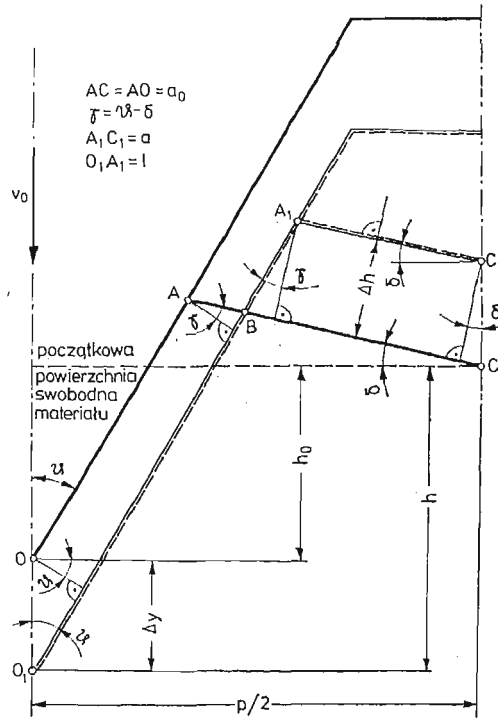
$$(2.5) \quad \sigma_1 - \sigma_2 = 2k,$$

W naszym przypadku przyjmujemy $\sigma_0 = 0$.

Prędkości płynięcia można otrzymać wykorzystując równania H. GERINGER, które obowiązują wzdłuż charakterystyk (2.1):

$$(2.6) \quad \begin{aligned} dv_\alpha + v_\beta d\varphi &= 0, & \text{wzdłuż linii } \alpha, \\ dv_\beta - v_\alpha d\varphi &= 0, & \text{wzdłuż linii } \beta. \end{aligned}$$

Rozwiązanie rozpoczniemy od określenia położenia i wymiarów krawędzi powierzchni swobodnej dla dowolnej wielkości zagłębienia. Jeżeli wierzchołek klina zagłębli się w ma-



Rys. 2. Położenie krawędzi powierzchni swobodnej $A_1 C_1$ dla wielkości zagłębienia większej od h_0

teriale na głębokość $h_0 + \Delta y$ (rys. 2), to położenie krawędzi $A_1 C_1$ powierzchni swobodnej można określić podając odległość pionową pomiędzy punktami O_1 i C_1 :

$$(2.7) \quad H = h_0 + \Delta y + \frac{\Delta h}{\cos \delta}.$$

Z warunku nieściśliwości wynika równość pól czworokątów OO_1BA i BA_1C_1C , co daje związek:

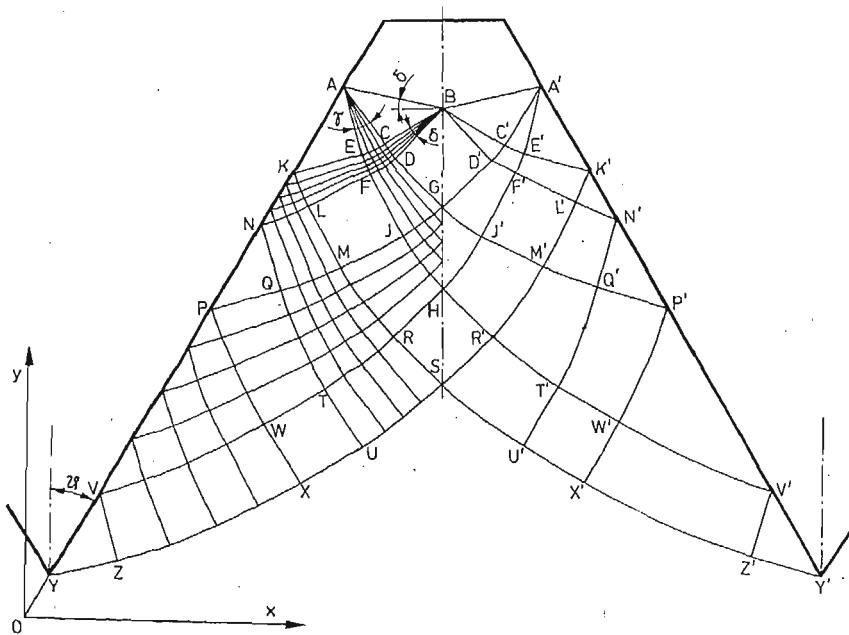
$$(2.8) \quad (\Delta h)^2 (\text{tg } \gamma + \text{tg } \delta) - \Delta h \frac{P}{\sin \vartheta + \cos \delta} - 2\Delta y \frac{\sin \vartheta}{\cos \gamma} + \frac{P\Delta y \sin \vartheta}{\sin \vartheta + \cos \delta} + (\Delta y)^2 \sin \vartheta (\cos \vartheta + \sin \vartheta \text{tg } \gamma) = 0.$$

Długość odcinka $A_1 C_1$ wynosi:

$$(2.9) \quad A_1 C_1 = a = \frac{P}{2(\sin \vartheta + \cos \delta)} - \Delta h (\sin \delta + \sin \gamma) - \Delta y \frac{\sin \vartheta}{\cos \gamma}.$$

Korzystając z zależności (2.8) należy w związkach (2.7) i (2.9) wyrugować Δh i w ten sposób określić położenie i wymiary powierzchni swobodnej w funkcji wielkości zagłębienia $h_0 + \Delta y$. Obliczenia najłatwiej jest przeprowadzić dla konkretnej wartości kąta ϑ , po uprzednim wyznaczeniu kątów δ i γ z równań (1.1) i (1.2).

Schemat siatki linii poślizgu dla zaawansowanego etapu procesu przedstawia rys. 3. Obszar ABCEK odpowiada rozwiązaniu R. HILLA. Współrzędne punktów węzłowych



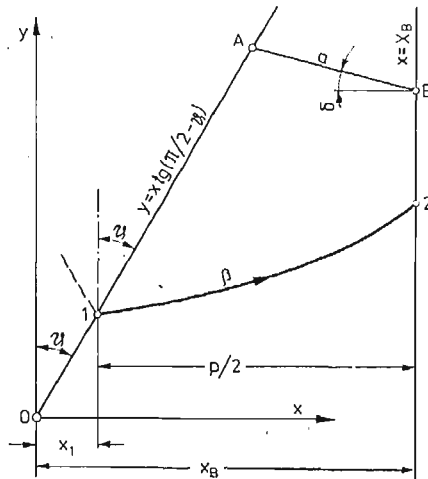
Rys. 3. Schemat siatki linii poślizgu dla zaawansowanego stadium wgłębienia

Tablica 1. Wartości funkcji φ i χ w obszarach z jednorodnym stanem naprężenia dla siatki linii poślizgu z rys. 3

Obszar	φ	χ
ABC ^{+))}	$\pi/2 - \delta$	-0,5
AEK ^{+))}	$\pi/2 - \vartheta$	-0,5 - γ
BDGD'	$\pi/2$	-0,5 - δ
LMJF	$\pi/2 - \gamma$	-0,5 - $\gamma - \delta$
PQN	$\pi/2 - \vartheta$	-0,5 - $\gamma - 2\delta$
RSR'H	$\pi/2$	-0,5 - $2\gamma - \delta$
WTUX	$\pi/2 - \delta$	-0,5 - $2\gamma - 2\delta$
VZY	$\pi/2 - \vartheta$	-0,5 - $3\gamma - 2\delta$

^{+))} Wartości znane z rozwiązania R. HILLA

siatki linii poślizgu oraz wartości funkcji χ i φ w tych punktach wyznacza się ze związków (2.1) wychodząc ze znanych wartości na linii BCEK. Całkowanie przeprowadza się numerycznie sposobem podanym w monografii [5]. W obszarach ABC, AEK, BDGD', LMJF, PQN, RSR'H, WTUX, VZY panują jednorodne stany naprężenia, które można wyznaczyć w sposób elementarny na podstawie związków wzdłuż charakterystyk: $\chi + \varphi = \text{const.}$ dla linii α , oraz $\chi - \varphi = \text{const.}$ dla linii β . Wartości funkcji χ i φ dla tych obszarów podano w tabl. 1. Po określeniu χ i φ naprężenia wyznacza się z zależności (2.3) bądź też (2.2) i (2.5).



Rys. 4. Schemat postępowania przy konstruowaniu siatki linii poślizgu

Omówimy teraz bardziej szczegółowo konstrukcję siatek linii poślizgu dla poszczególnych etapów procesu. W układzie współrzędnych Oxy (rys. 4) przyjmujemy prostą o równaniu:

$$y = x \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta \right),$$

obrazującą boczną powierzchnię klina. Na tej prostej wybieramy dowolnie punkt $A(x_A, y_A)$, z którego prowadzimy odcinek AB o dowolnie przyjętej długości, nachyleny do poziomu pod kątem δ . Przez jego koniec B prowadzimy prostą pionową o równaniu $x = x_B$, którą przyjmujemy za oś symetrii obszaru uplastycznionego. Znamy więc współrzędne x_A, y_A, x_B, y_B oraz długość odcinka $AB = a$. W dalszym ciągu przystępujemy do wyznaczania współrzędnych punktów węzłowych siatki linii poślizgu oraz określania naprężeń w sposób podany uprzednio, przy czym położenie wierzchołka klina a tym samym wartość skoku P (odległość pomiędzy sąsiednimi wierzchołkami) jest na razie nieznaną. Dowolna charakterystyka rodziny β przecinająca kontur narzędzia może być dolną granicą obszaru uplastycznionego. Przyjmijmy dla przykładu, że wyznaczyliśmy przebieg charakterystyki 1-2 (rys. 4). Stanowi ona dolną granicę obszaru uplastycznionego, jeżeli wierzchołek klina znajduje się w punkcie 1. Wartość skoku wynosi więc $P = x_B - x_1$. Wartość x_1 jest znana z przebiegu charakterystyki 1-2, a wartość x_B wyznaczyliśmy uprzednio,

przyjmując długość odcinka AB i położenie punktu A. Teraz na podstawie równań (1.3), (2.8) i (2.9) podstawiając znane wartości a i P określa się wartość $h_0 + \Delta y$. Jest to wielkość zagłębienia dla etapu, przy którym charakterystyka 1-2 stanowi dolną granicę obszaru uplastycznionego. Następnie należy dokonać przekształcenia współrzędnych polegającego na przesunięciu początku układu do punktu 1 i obliczyć bezwymiarowe wielkości x/P , y/P , h_0/P i $\Delta y/P$. W ten sam sposób kontynuuje się rozwiązanie dla dalszych etapów wgłębienia, wyznaczonych przez przebieg kolejnych charakterystyk rodziny β .

Jeżeli nie jest konieczna duża dokładność obliczeń, siatki linii poślizgu można otrzymać wykreślnie, na przykład sposobem opisanym w monografii [5]. Punktem wyjścia jest obliczenie długości odcinka a dla danej wielkości zagłębienia Δy z zależności (2.8) i (2.9). Jak widać z rys. 4, przy znanych wartościach P i ϑ wystarczy to do określenia położenia punktu 1.

Analiza prędkości płynięcia prowadzi do wniosku, że istnieją pewne zakresy wielkości zagłębienia uzależnione od kąta 2ϑ , dla których nie można otrzymać poprawnego rozwiązania dla prędkości (występuje kinematycznie niedopuszczalny typ nieciągłości). W pozostałych zakresach rozwiązanie jest kinematycznie dopuszczalne. Zagadnienie to jest omówione w dalszym ciągu na konkretnym przykładzie.

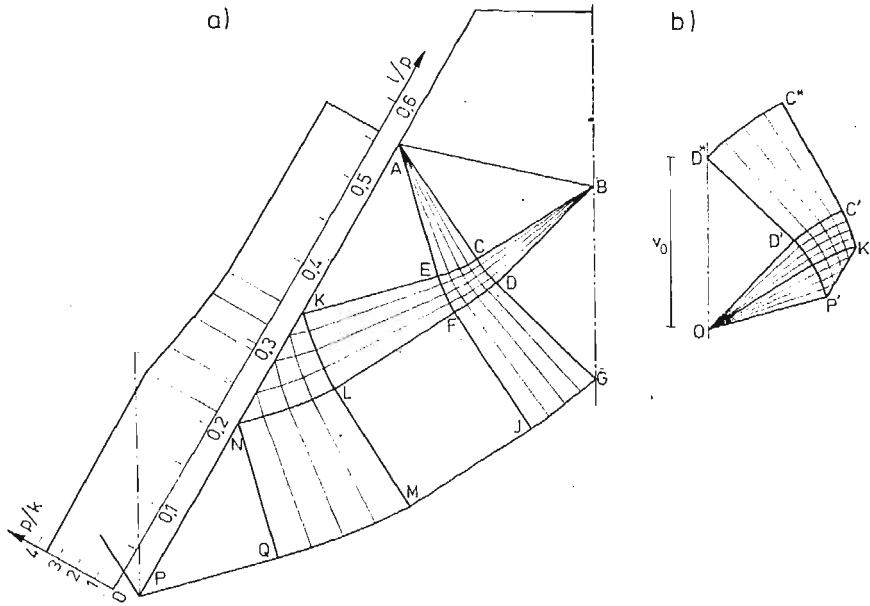
3. Wyniki obliczeń

Obliczenia przeprowadzono dla szczególnego przypadku, gdy $2\vartheta = 1,047$ rad. (60°). Z równań (1.1), (1.2) i (1.3) wynikają wartości: $\gamma = 0,303$ rad. ($17^\circ 20'$), $\delta = 0,221$ rad. ($12^\circ 40'$) oraz $h_0 = 0,219P$. Przeanalizowano przebieg procesu dla wielkości zagłębienia h w zakresie $0,219 \leq h/P \leq 0,403$. W obliczeniach numerycznych przyjęto przyrosty kątów w wycinkach biegunowych EAC i CBD (rys. 3) równe odpowiednio: $\Delta\gamma = 0,038$ rad. ($2^\circ 10'$) oraz $\Delta\delta = 0,028$ rad. ($1^\circ 35'$). Rozważono 10 etapów wgłębienia wyznaczonych

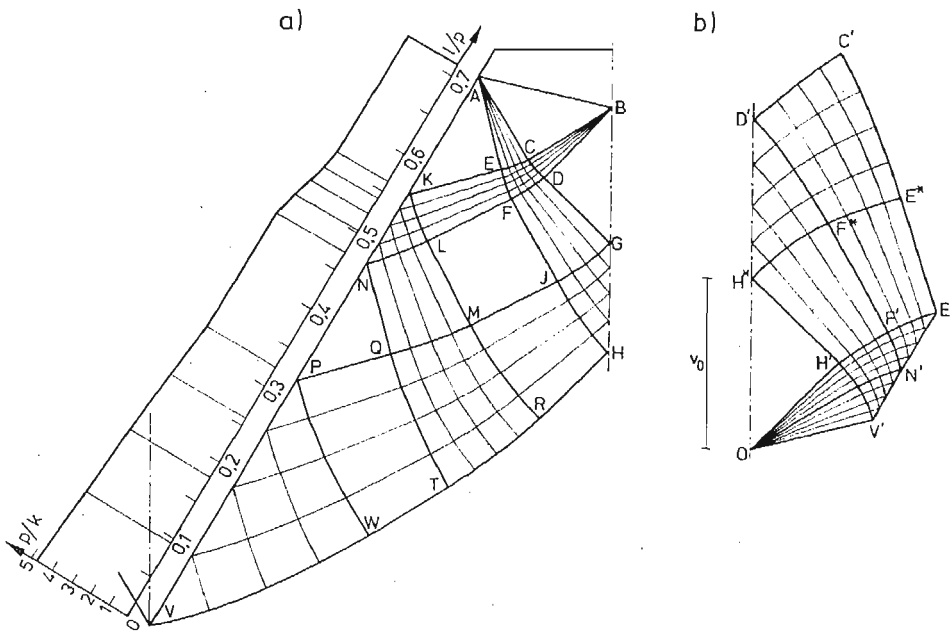
Tablica 2. Wyniki obliczeń przykładu

Etap	Zagłębienie		Długość styku bocznej powierzchni narzędzia z materiałem l/P	Średni nacisk jednostkowy p_{sr}/k
	$\frac{\Delta y}{P}$	$\frac{h_0 + \Delta y}{P}$		
0*)	0	0,219	0,339	2,61
1	0,018	0,237	0,367	2,62
2	0,035	0,254	0,395	2,66
3	0,051	0,270	0,422	2,71
4	0,066	0,285	0,449	2,78
5	0,125	0,344	0,570	3,06
6	0,141	0,360	0,609	3,14
7	0,153	0,372	0,645	3,26
8	0,165	0,384	0,679	3,39
9	0,174	0,393	0,709	3,55
10	0,184	0,403	0,747	3,68

*. Etap zerowy obejmuje początkowy okres procesu, $h \leq h_0$; $p_{sr} = \text{const.}$, $p = \text{const.}$



Rys. 5. Siatka linii poślizgu (a) i hodograf (b) dla zagłębienia $\Delta y/P = 0,125$; $(h_0 + \Delta y)/P = 0,344$, $p_{sr} = 3,06 k$, $l/P = 0,570$, $2\vartheta = 60^\circ$

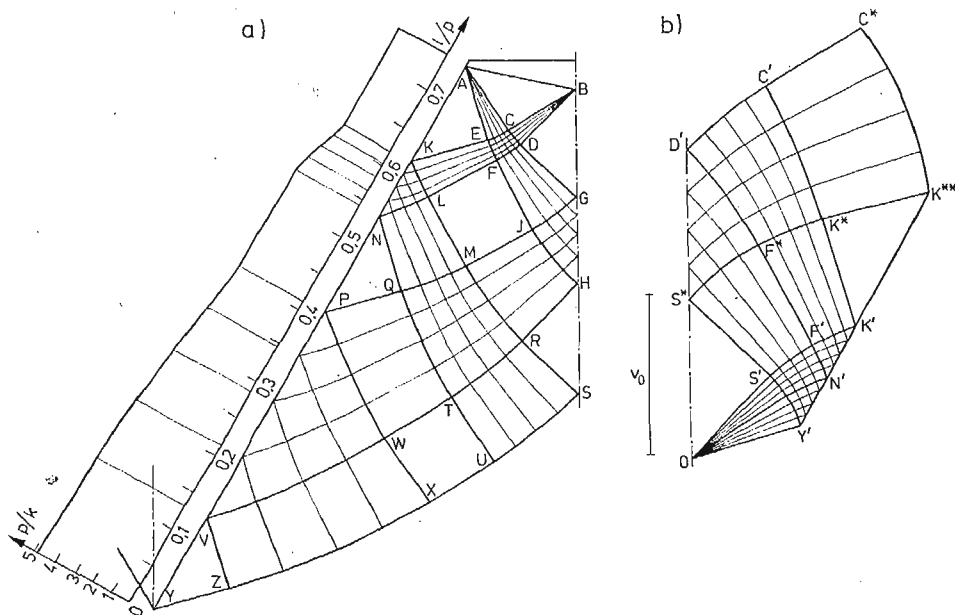


Rys. 6. Siatka linii poślizgu (a) i hodograf (b) dla zagłębienia $\Delta y/P = 0,174$; $(h_0 + \Delta y)/P = 0,393$, $p_{sr} = 3,55k$, $l/P = 0,709$, $2\vartheta = 60^\circ$

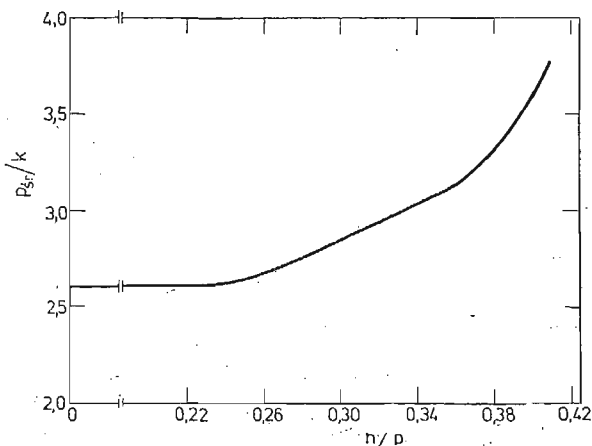
przez przebieg odpowiednich charakterystyk rodziny β . Dla każdego etapu określono zagłębienie Δy oraz $h = h_0 + \Delta y$. Następnie obliczono długość styku bocznej powierzchni materiału z klinem l z oczywistej (z rys. 2) zależności:

$$P/2 = l \sin \vartheta + a \cos \delta,$$

gdzie a wyraża się poprzez Δy wzorem (2.9), w którym należy wyrugować Δh za pomocą związku (2.8). Określono rozkłady nacisków jednostkowych, oraz wartości średnie nacisków p_{sr} . Wyniki obliczeń przedstawiono w tabl. 2, a przykładowe siatki linii poślizgu



Rys. 7. Siatka linii poślizgu (a) i hodograf (b) dla zagłębienia $\Delta y/P = 0,184$; $(h_0 + \Delta y)/P = 0,403$, $p_{sr} = 3,68k$, $l/P = 0,747$, $2\vartheta = 60^\circ$



Rys. 8. Zależność średniego nacisku jednostkowego od wielkości zagłębienia

i hodografy prędkości na rys. 5, 6 i 7. Na rysunkach dla przejrzystości przyjęto dwa razy większe przyrosty $\Delta\gamma$ i $\Delta\delta$ niż w obliczeniach numerycznych. Zależność średniego nacisku jednostkowego od wielkości zagłębienia przedstawiono na rys. 8.

Całkowitą siłę potrzebną do wglębiania (na jednostkę długości narzędzia) oblicza się z zależności:

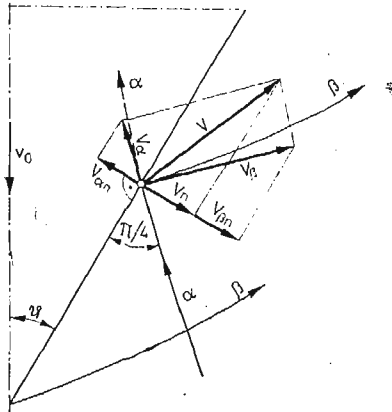
$$(3.1) \quad P = 2\rho_{sr} l \sin\vartheta(n-1) + \frac{4kh(1+\gamma)\sin\vartheta}{\cos\vartheta - \sin(\vartheta-\gamma)},$$

gdy $h > h_0$, lub też

$$(3.2) \quad P = \frac{4khn(1+\gamma)\sin\vartheta}{\cos\vartheta - \sin(\vartheta-\gamma)},$$

gdy $h \leq h_0$. Zależność (3.2) wynika z rozwiązania R. HILLA; n jest liczbą klinowych wierzchołków. W zakresie $h > h_0$ nie można podać analitycznej zależności siły od wielkości zagłębienia, gdyż ρ_{sr} określa się numerycznie. Drugi człon w równaniu (3.1) uwzględnia dwie boczne powierzchnie skrajnych wierzchołków narzędzia.

Określenie prędkości płynięcia przedstawimy na przykładzie siatki z rys. 6. Wzdłuż linii VH dana jest składowa normalna prędkości, równa składowej normalnej prędkości sztywnej części materiału. Zatem na linii VH $v_\alpha = 0$. Na odcinku VP nie będącym charakterystyką, a także na całej długości linii styku materiału z narzędziem VA dana jest również składowa normalna, równa składowej normalnej prędkości przemieszczania się narzędzia. Składowa ta wynosi $v_n = v_0 \sin\vartheta$, gdzie v_0 jest pionową prędkością narzędzia. W celu otrzymania związku pomiędzy v_α i v_β na odcinku VP (a także na całym brzegu VA) rzutujemy te składowe na kierunek normalny do powierzchni narzędzia (rys. 9).



Rys. 9. Schemat warunku brzegowego dla składowych v_α i v_β na linii styku klina z materiałem

Otrzymuje się związek:

$$v_\beta \cos\pi/4 - v_\alpha \cos\pi/4 = v_0 \sin\vartheta.$$

Wykorzystując te dane można rozwiązać w polu PWV zagadnienie brzegowe typu mieszanego dla równań (2.6). Daje to łącznie z warunkiem na linii VH punkt wyjścia dla dalszych obliczeń. Przeprowadza się je numerycznie sposobem podanym w monografii [5].

Charakterystyki VWTRH i HJFEA są liniami nieciągłości prędkości. Kończą się one w narożach wycinków biegunowych, co jest kinematycznie dopuszczalne¹⁾. Podobnie wyznacza się prędkości płynięcia dla innych wielkości zagłębienia.

W przedstawionym rozwiązaniu dla $2\theta = 60^\circ$ wystąpiły dwa zakresy wielkości zagłębienia, dla których pojawił się kinematycznie niedopuszczalny typ nieciągłości prędkości (linia nieciągłości przecina prostoliniowy odcinek krawędzi powierzchni materiału). Zakresy te są następujące: $0,066 < \Delta y/P < 0,125$ oraz $0,174 < \Delta y/P < 0,184$. Dla pozostałych wielkości zagłębienia rozwiązanie jest kinematycznie dopuszczalne.

4. Uwagi końcowe

Przedstawione rozwiązanie umożliwia wyznaczenie rozkładu nacisków jednostkowych na powierzchni narzędzia oraz całkowitej siły potrzebnej do wgłębienia. W odróżnieniu od przypadku pojedynczego klina nacisk jednostkowy nie jest stały, lecz zmienia się wzdłuż linii styku osiągając największą wartość przy wierzchołku. Średnia wartość nacisku rośnie wraz z zagłębieniem.

Dla pewnych zakresów wielkości zagłębienia zależnych od kąta 2θ występuje linia nieciągłości prędkości przecinająca swobodny brzeg materiału. Jest to kinematycznie niedopuszczalne i świadczy o tym, że założenie o prostoliniowych krawędziach powierzchni swobodnej nie daje się w tych zakresach utrzymać. Rozwiązanie dla dalszych zakresów odpowiada przypadkowi wgłębienia narzędzia w materiał o odpowiednio ukształtowanym brzegu, a nie w materiał o brzegu początkowo płaskim, co nie jest w pełni zgodne z charakterem procesu. W związku z tym uzyskane wyniki winny być traktowane jako przybliżone. Zaletą przedstawionego rozwiązania jest jego prostota. Siatki linii poślizgu dla poszczególnych etapów zagłębienia można otrzymać w łatwy sposób, zarówno numerycznie jak i wykreślnie, dla różnych kątów wierzchołkowych 2θ . Natomiast uwzględnienie rzeczywistego kształtu powierzchni swobodnej napotyka na znaczne trudności.

Literatura cytowana w tekście

1. W. E. HENDERER, B. F. TURKOWICH; *Theory of the cold forming tap*, CIRP Ann. vol. 23/1 (1974).
2. R. HILL, S. J. LEE, S. J. TUPPER; *Theory of wedge indentation of ductile materials*, Proc. Roy. Soc. of London A, vol. 188 (1945).
3. J. GRUNZWEIG, J. M. LOGMAN, N. J. PETCH; *Calculation and measurements on wedge-indentation*, J. Mech. Phys. Solid. vol. 2 (1954).
4. D. S. DUGDALE; *Wedge indentation experiments with coldworked metals*. J. Mech. Phys. Solid. vol. 2 (1953).
5. W. SZCZEPIŃSKI; *Teoria obróbki plastycznej metali*. PWN Warszawa (1964).

¹⁾ Rys. 6a przedstawia połowę siatki, stąd linie VWTRH i HJFEA mają dalszy ciąg po prawej stronie osi symetrii.

Резюме

ВНЕДРЕНИЕ ИНСТРУМЕНТА С ПЕРИОДИЧЕСКИМ
КЛИНЕВЫМ ПРОФИЛЕМ В ПЛАСТИЧЕСКУЮ СРЕДУ

В работе представлено решение задачи о внедрении инструмента, который имеет рабочую часть в виде ряда клиневых вершин, в пластическую среду, при плоской деформации, без трения и упрочнения материала; принято условие пластичности Губера-Мизеса. Использован метод характеристик. Разработано частный случай, при котором угол вершины клина был равен 60° . Представлено сетки линии скольжения, годографы скорости и результаты вычислений для некоторых значений глубины внедрения.

Summary

INDENTATION OF A PERIODICALLY WEDGE-SHAPED TOOL INTO PLASTIC
MATERIAL

The title problem has been discussed in the case of plane strain and Huber-Mises yield criterion without friction or material hardening taken into account. The solution has been obtained by the method of characteristics.

As an example we consider a particular case for the wedge angle 60° . The slip-lines networks, selected indentations have been presented.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 stycznia 1979 roku
