

KSZTAŁTY PRĘTÓW SILNIE ZAKRZYWIONYCH PODDANYCH ZGINANIU Z ROZCIĄGANIEM I ŚCINANIEM, CAŁKOWICIE UPLASTYCZNIONYCH W STADIUM ZNISZCZENIA

ANNA D O L L A R, Z D Z I S Ł A W A K O R D A S (KRAKÓW)

1. Wstęp

Powszechnie stosowanym podejściem przy kształtowaniu elementów konstrukcyjnych w zakresie sprężystym jest zastosowanie warunków równomiernej wytrzymałości. W zakresie plastycznym, pewnym odpowiednikiem tego podejścia jest poszukiwanie kształtów ciał, które przy osiągnięciu nośności granicznej osiągną stan plastyczny w całej swej objętości. Narzucenie warunku całkowitego uplastycznienia w stadium zniszczenia przy projektowaniu elementów z materiału idealnie plastycznego pozwala na wyeliminowanie z konstrukcji stref sztywnych bądź sprężystych: pozwala zatem na lepsze wykorzystanie materiału w pracach [1], [5] stwierdzono, bowiem, że w optymalnych konstrukcjach w stadium zniszczenia uplastycznione powinno być całe ciało, bądź możliwie wielki jego podobszar.

Kształty, które uzyskuje się w oparciu o to kryterium wykazują najczęściej całkowitą niejednoznaczność, zatem przy doborze kształtów optymalnych, należałoby przeprowadzić procedurę optymalizacyjną np. w oparciu o warunek minimum objętości. Niekiedy jednak pewne wymagania konstrukcyjne narzucają kształty odbiegające od kształtów regularnych, powszechnie stosowanych w praktyce. Wtedy też można dobrać kształty, które odpowiadają całkowitemu uplastycznieniu w stadium zniszczenia, bez prowadzenia procedury optymalizacyjnej. Niekiedy też kształty, o których mowa spełniają warunek minimum objętości, zatem są kształtami optymalnymi w sensie powszechnie przyjętym.

Omawiane podejście przy kształtowaniu elementów konstrukcyjnych w zakresie plastycznym było stosowane w pracy [3], przy kształtowaniu niekołowych cylindrów grubościennych, następnie w pracy [2] przy projektowaniu skręcanych prętów rurowych. Szersze omówienie problematyki wyłaniającej się w trakcie kształtowania ciał wykazujących całkowite uplastycznienie w stadium zniszczenia, jak również przegląd publikacji z tego zakresu, można znaleźć w pracy [4].

W niniejszym opracowaniu poszukuje się takich kształtów pręta z materiału idealnie sprężysto-plastycznego, który poddany zginaniu z rozciąganiem i ścinaniem jak na rys. 1, uległby całkowitemu uplastycznieniu przy osiągnięciu nośności granicznej. Problem rozwiążemy w warunkach płaskiego stanu odkształcenia, w p. 6 podamy ponadto wyniki analizy problemu w warunkach płaskiego stanu naprężenia.

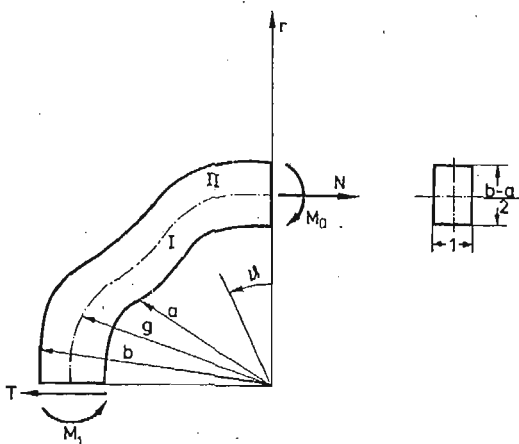
Z uwagi na zastosowaną metodę małego parametru poszukuje się kształtów pręta, odbiegającego od kołowego (od ćwiartki koła), będącego rozwiązaniem trywialnym

postawionego zagadnienia. Problem ten jest rozwinięciem i uzupełnieniem przykładów analizowanych w pracy [4] i pozwala na szersze poznanie analizowanej tam problematyki.

Rozwiązanie ma spełniać warunki równowagi wewnętrznej, warunków plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego w formie równości oraz naprężeniowe warunki brzegowe. Można więc je uzyskać w oparciu o równania naprężeniowe bez analizy równań odkształceniowych. Otrzymuje się szereg rozwiązań statycznie dopuszczalnych, a odpowiadające tym rozwiązaniom kształty są kształtami bezpiecznymi. W omawianym pręcie można wyróżnić strefę obwodowego ściskania oraz strefę obwodowego rozciągania. W każdej ze stref uzyskano dwa jakościowo różne rozwiązania, mianowicie ciąg rozwiązań odpowiadający niewielkim odstępstwom od kształtu będącego ćwiartką pierścienia kołowego, o ustalonym stosunku niezaburzonych promieni wewnętrznego i zewnętrznego oraz rozwiązania dla dowolnych stosunków niezaburzonych promieni.

2. Założenia i równania podstawowe

Rozważany jest pręt o przekroju prostokątnym i kształcie scharakteryzowanym we współrzędnych biegunowych funkcjami $a(\theta)$ i $b(\theta)$, obciążony jak na rysunku 1.



Rys. 1

W pręcie tym wyróżnia się dwie strefy uszeregowania naprężeń:

- strefę I — wewnętrzną, ściskaną naprężeniem obwodowym $\sigma_{\theta I}$
- strefę II — zewnętrzną, rozciągana naprężeniem obwodowym $\sigma_{\theta II}$.

Przy założeniu płaskiego stanu odkształcenia i nieściśliwości materiału, stan naprężenia w dowolnym punkcie pręta jest określony czwórką składowych σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$, oraz $\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta)$.

Napężenia te, w każdej ze stref spełniają po dwa równania równowagi wewnętrznej postaci:

$$(2.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_r}{\partial \vartheta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{r} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\vartheta}{\partial \vartheta} + 2 \frac{\tau_{r\vartheta}}{r} = 0. \end{cases}$$

Zgodnie z przyjętym kryterium kształtowania pręta, w każdym punkcie jest spełniony warunek plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego:

$$(2.2) \quad (\sigma_r - \sigma_\vartheta)^2 + 4\tau_{r\vartheta}^2 = \frac{4}{3}\sigma_0^2.$$

Problem jest zatem wewnętrznie statycznie wyznaczalny, gdyż w każdej ze stref mamy do dyspozycji trzy równania naprężeniowe oraz trzy niewiadome składowe stanu naprężenia.

Dla wyznaczenia poszukiwanych funkcji $a(\theta)$ i $b(\theta)$ oraz czterech stałych całkowania równań równowagi wewnętrznej, wykorzystano naprężeniowe warunki brzegowe (równowartości naprężeń promieniowych i obwodowych) na brzegach wewnętrznym i zewnętrznym oraz na granicy stref. Na obu nieobciążonych brzegach $a(\theta)$ i $b(\theta)$, składowe ciśnienia p_{nr} i $p_{n\vartheta}$ są równe zeru. Na powierzchni $g(\vartheta)$, rozgraniczającej obie strefy składowe naprężeń wewnętrznych równoważą się wzajemnie. Warunki te wyprowadzone w pracy [3] przyjmują następującą postać (oznaczenie „I” odnosi się do strefy wewnętrznej, a „II” do strefy zewnętrznej):

— na powierzchni wewnętrznej $r = a(\theta)$:

$$(2.3) \quad \begin{cases} a(\theta)\sigma_{rI}|_{r=a(\theta)} - a'(\theta)\tau_{r\theta I}|_{r=a(\theta)} = 0, \\ a'(\theta)\sigma_{\theta I}|_{r=a(\theta)} - a(\theta)\tau_{r\theta I}|_{r=a(\theta)} = 0, \end{cases}$$

— na powierzchni zewnętrznej $r = b(\theta)$:

$$(2.4) \quad \begin{cases} b(\theta)\sigma_{rII}|_{r=b(\theta)} - b'(\theta)\tau_{r\theta II}|_{r=b(\theta)} = 0, \\ b'(\theta)\sigma_{\theta II}|_{r=b(\theta)} - b(\theta)\tau_{r\theta II}|_{r=b(\theta)} = 0, \end{cases}$$

— na granicy stref $r = g(\theta)$:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} -g(\vartheta)\sigma_{rI}|_{r=g(\vartheta)} + g'(\vartheta)\tau_{r\theta I}|_{r=g(\vartheta)} &= -g(\vartheta)\sigma_{rII}|_{r=g(\vartheta)} + g'(\vartheta)\tau_{r\theta II}|_{r=g(\vartheta)}, \\ g'(\vartheta)\sigma_{\theta I}|_{r=g(\vartheta)} - g(\vartheta)\tau_{r\theta I}|_{r=g(\vartheta)} &= g'(\vartheta)\sigma_{\theta II}|_{r=g(\vartheta)} - g(\vartheta)\tau_{r\theta II}|_{r=g(\vartheta)}. \end{aligned}$$

Okaże się, że na tej drodze uzyskamy dwie rodziny rozwiązań: pierwsza będzie dotyczyć niekołowych kształtów przy czystym zginaniu momentem M_0 , natomiast druga dopuszcza wpływ jednoczesnego niewielkiego ścinania i rozciągania siłami $N = T$.

3. Metoda małego parametru

Przyjmujemy rozwiązanie w postaci szeregu parametru, charakteryzującego niekołowość kształtu pręta, mianowicie:

$$(3.1) \quad x(r, \vartheta) = x_0 + \alpha x_1(r, \vartheta) + \alpha^2 x_2(r, \vartheta) + \dots,$$

gdzie

$$x(r, \vartheta) = \sigma_r(r, \vartheta), \sigma_\vartheta(r, \vartheta), \tau_{r\vartheta}(r, \vartheta), a(\vartheta), b(\vartheta), g(\vartheta),$$

a wielkości z indeksem „0” są składowymi stanu naprężenia dla pręta kołowego o promieniach a_0 i b_0 , zginanego momentem M_0 , będącym nośnością graniczną tego pręta. Jak wiadomo, w oparciu o metodę małego parametru, nie badając zbieżności szeregów, możemy wyciągnąć pewne jakościowe wnioski np. odnośnie niejednoznaczności rozwiązań.

Po rozwinięciu składowych stanu naprężenia w równaniach (2.1) i (2.2) w szereg parametru α i porównaniu współczynników przy odpowiednich potęgach α otrzymuje się dla każdej ze stref ciąg układów 3 równań, w których niewiadomymi są odpowiednie poprawki składowych stanu naprężenia:

$$(3.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{ri}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\vartheta i}}{\partial \vartheta} + \frac{\sigma_{ri} - \sigma_{\vartheta i}}{r} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\vartheta i}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\vartheta i}}{\partial \vartheta} + \frac{2\tau_{r\vartheta i}}{r} = 0, \end{cases}$$

$$(3.3) \quad \sigma_{ri} - \sigma_{\vartheta i} = f_i(\sigma_{\vartheta 0}, \sigma_{r0} \dots \sigma_{r_{i-1}}, \sigma_{\vartheta_{i-1}}, \tau_{r\vartheta_{i-1}}),$$

gdzie $i = 0, 1, 2 \dots$

Równania (3.2) mają dla każdego przybliżenia, identyczną postać z wyjściowymi warunkami (2.1), które są równaniami liniowymi. Równanie (3.3) jest dla i — tego przybliżenia liniowym warunkiem plastyczności.

Zastąpienie w warunkach brzegowych (2.3), (2.4) i (2.5) funkcji $a(\theta)$, $b(\theta)$, $g(\theta)$ ich rozwinięciami (3.1) oraz rozwinięcie wyrażeń na kolejne składowe stanu naprężenia dla promieni $a(\theta)$, $b(\theta)$ i $g(\theta)$ odpowiednio wokół punktów a_0 , b_0 i g_0 prowadzi do rozwinięcia warunków brzegowych w szereg parametru α (schemat rozwinięcia według pracy [3]).

Pierwszy z warunków (2.5) (warunek na granicy stref) po rozwinięciu przybiera następującą postać:

gdzie $i = 0, 1, 2 \dots$

$$(3.4) \quad \begin{aligned} & -(g_0 + \alpha g_1 + \alpha^2 g_2 + \dots) \left\{ \left[(\sigma_{r0i} - \sigma_{r0i}) \right]_{r=g_0} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial (\sigma_{r0i} - \sigma_{r0i})}{\partial r} \Big|_{r=g_0} (\alpha g_1 + \alpha^2 g_2 + \dots) + \frac{\partial^2 (\sigma_{r0i} - \sigma_{r0i})}{\partial r^2} \frac{g_1^2}{2!} \alpha^2 + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial (\sigma_{r1i} - \sigma_{r1i})}{\partial r} \Big|_{r=g_0} (\alpha g_1 + \alpha^2 g_2 + \dots) \right] \alpha + (\sigma_{r2i} - \sigma_{r2i}) \Big|_{r=g_0} \alpha^2 + \dots + \left. \right\} \\ & \quad + (\alpha g'_1 + \alpha^2 g'_2 + \dots) \left\{ \left[(\tau_{r\vartheta 1i} - \tau_{r\vartheta 1i}) \right]_{r=g_0} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial (\tau_{r\vartheta 1i} - \tau_{r\vartheta 1i})}{\partial r} \Big|_{r=g_0} (\alpha g_1 + \alpha^2 g_2 + \dots) \right] \alpha + (\tau_{r\vartheta 2i} - \tau_{r\vartheta 2i}) \Big|_{r=g_0} \alpha^2 + \dots = 0, \end{aligned}$$

Pozostałe warunki rozwijają się podobnie.

Porównanie współczynników przy α^i prowadzi do warunków brzegowych w i — tym przybliżeniu. W dalszym ciągu oznaczono poszczególne warunki odnoszące się do brzegu wewnętrznego literą „ W ”, zewnętrznego „ Z ”, a do granicy stref literą „ g ”.

Indeks „ p ” odnosi się do warunków równowagi naprężeń promieniowych, a indeks „ o ” obwodowych.

Cyfra w nawiasie oznacza szczebel przybliżenia.

Warunki brzegowe w zerowym przybliżeniu:

$$(3.5) \quad \begin{cases} W_p(0): 0 = \sigma_{r0I}|_{r=a_0}, \\ W_o(0): 0 = 0, \\ Z_p(0): 0 = \sigma_{r0II}|_{r=b_0}, \\ Z_o(0): 0 = 0, \\ g_p(0): 0 = \sigma_{r0I}|_{r=g_0} - \sigma_{r0II}|_{r=g_0}, \\ g_o(0): 0 = 0 \end{cases}$$

Warunki brzegowe w pierwszym przybliżeniu:

$$(3.6) \quad \begin{cases} W_p(1): 0 = -a_1 \sigma_{r0I}|_{r=a_0} - a_0 a_1 \frac{\partial \sigma_{r0I}}{\partial r} \Big|_{r=a_0} - a_0 \sigma_{r1I}|_{r=a_0}, \\ W_o(1): 0 = -a'_1 \sigma_{\theta 0I}|_{r=a_0} + a_0 \tau_{r\theta 1I}|_{r=a_0}, \\ Z_p(1): 0 = -b_1 \sigma_{r0II}|_{r=b_0} - b_0 b_1 \frac{\partial \sigma_{r0II}}{\partial r} \Big|_{r=b_0} - b_0 \sigma_{r1II}|_{r=b_0}, \\ Z_o(1): 0 = -b'_1 \sigma_{\theta 0II}|_{r=b_0} + b_0 \tau_{r\theta 1II}|_{r=b_0}, \\ g_p(1): 0 = \left[-g_1 (\sigma_{r0I} - \sigma_{r0II}) - g_0 g_1 \frac{\partial (\sigma_{r0I} - \sigma_{r0II})}{\partial r} - g_0 (\sigma_{r1I} - \sigma_{r1II}) \right] \Big|_{r=g_0}, \\ g_o(1): 0 = [-g'_1 (\sigma_{\theta 0I} - \sigma_{\theta 0II}) + g_0 (\tau_{r\theta 1I} - \tau_{r\theta 1II})] \Big|_{r=g_0}. \end{cases}$$

Warunki brzegowe w drugim przybliżeniu:

$$(3.7) \quad \begin{cases} W_p(2): 0 = \left[-a_2 \sigma_{r0I} - a_1^2 \frac{\partial \sigma_{r0I}}{\partial r} - a_0 a_2 \frac{\partial \sigma_{r0I}}{\partial r} - \frac{a_0 a_1^2}{2} \frac{\partial^2 \sigma_{r0I}}{\partial r^2} - \right. \\ \left. - a_1 \sigma_{r1I} - a_0 a_1 \frac{\partial \sigma_{r1I}}{\partial r} - a_0 \sigma_{r2I} + a'_1 \tau_{r\theta 1I} \right] \Big|_{r=a_0}, \\ W_o(2): 0 = \left[-a'_2 \sigma_{\theta 0I} - a'_1 a_1 \frac{\partial \sigma_{\theta 0I}}{\partial r} - a'_1 \sigma_{\theta 1I} + \right. \\ \left. + a_0 a_1 \frac{\partial \tau_{r\theta 1I}}{\partial r} + a_1 \tau_{r\theta 1I} + a_0 \tau_{r\theta 2I} \right] \Big|_{r=a_0}, \\ Z_p(2): 0 = \left[-b_2 \sigma_{r0II} - b_1^2 \frac{\partial \sigma_{r0II}}{\partial r} - b_0 b_2 \frac{\partial \sigma_{r0II}}{\partial r} - \frac{b_0 b_1^2}{2} \frac{\partial^2 \sigma_{r0II}}{\partial r^2} - \right. \\ \left. - b_1 \sigma_{r1II} - b_0 b_1 \frac{\partial \sigma_{r1II}}{\partial r} - b_0 \sigma_{r2II} + b'_1 \tau_{r\theta 1II} \right] \Big|_{r=b_0}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 Z_0(2): \quad 0 &= \left[-b'_2 \sigma_{\theta 0 \text{II}} - b'_1 b_1 \frac{\partial \sigma_{\theta 0 \text{II}}}{\partial r} - b'_1 \sigma_{\theta 1 \text{II}} + \right. \\
 &\quad \left. + b_0 b_1 \frac{\partial \tau_{r\theta 1 \text{II}}}{\partial r} + b_1 \tau_{r\theta 1 \text{II}} + b_0 \tau_{r\theta 2 \text{II}} \right]_{r=b_0}, \\
 g_r(2): \quad 0 &= \left[-g_2 (\sigma_{r 0 \text{I}} - \sigma_{r 0 \text{II}}) - g_1^2 \frac{\partial (\sigma_{r 0 \text{I}} - \sigma_{r 0 \text{II}})}{\partial r} - \right. \\
 &\quad - g_0 g_2 \frac{\partial (\sigma_{r 0 \text{I}} - \sigma_{r 0 \text{II}})}{\partial r} - \frac{g_0 g_1^2}{2} \frac{\partial^2 (\sigma_{r 0 \text{I}} - \sigma_{r 0 \text{II}})}{\partial r^2} - \\
 &\quad - g_1 (\sigma_{r 1 \text{I}} - \sigma_{r 1 \text{II}}) - g_0 g_1 \frac{\partial (\sigma_{r 1 \text{I}} - \sigma_{r 1 \text{II}})}{\partial r} - g_0 (\sigma_{r 2 \text{I}} - \sigma_{r 2 \text{II}}) + \\
 &\quad \left. + g'_1 (\tau_{r\theta 1 \text{I}} - \tau_{r\theta 1 \text{II}}) \right]_{r=g_0}, \\
 g_\theta(2): \quad 0 &= \left[-g'_2 (\sigma_{\theta 0 \text{I}} - \sigma_{\theta 0 \text{II}}) - g'_1 g_1 \frac{\partial (\sigma_{\theta 0 \text{I}} - \sigma_{\theta 0 \text{II}})}{\partial r} - \right. \\
 &\quad - g_1 (\sigma_{\theta 1 \text{I}} - \sigma_{\theta 1 \text{II}}) + g_0 g_1 \frac{\partial (\tau_{r\theta 1 \text{I}} - \tau_{r\theta 1 \text{II}})}{\partial r} + \\
 &\quad \left. + g_1 (\tau_{r\theta 1 \text{I}} - \tau_{r\theta 1 \text{II}}) + (\tau_{r\theta 2 \text{I}} - \tau_{r\theta 2 \text{II}}) g_0 \right]_{r=g_0}.
 \end{aligned}
 \tag{3.7. cd.}$$

W zerowym przybliżeniu składowe stanu naprężenia odpowiadają zginaniu pręta kołowego o wymiarach a_0 i b_0 momentu M_0 , w warunkach płaskiego stanu odkształcenia. Są to następujące funkcje promienia r :

— w strefie wewnętrznej (obwodowego ściskania)

$$\begin{cases}
 \sigma_{r 0 \text{I}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \ln \frac{r}{a_0}, \\
 \sigma_{\theta 0 \text{I}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \left(\ln \frac{r}{a_0} + 1 \right) \\
 \tau_{r\theta 0 \text{I}} = 0.
 \end{cases}
 \tag{3.8}$$

— w strefie zewnętrznej (obwodowego rozciągania)

$$\begin{cases}
 \sigma_{r 0 \text{II}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \ln \frac{r}{b_0}, \\
 \sigma_{\theta 0 \text{II}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \left(\ln \frac{r}{b_0} + 1 \right), \\
 \tau_{r\theta 0 \text{II}} = 0.
 \end{cases}
 \tag{3.9}$$

Funkcje te stanowią rozwiązanie układu równań (3.2) i (3.3) dla $i = 0$, przy założeniu kolejno $\sigma_{r 0 \text{I}} > \sigma_{\theta 0 \text{I}}$ i $\sigma_{r 0 \text{II}} < \sigma_{\theta 0 \text{II}}$, z wykorzystaniem pierwszego i trzeciego z warunków (3.5). Zerowe przybliżenie promienia rozgraniczającego strefy jest równe:

$$g_0 = \sqrt{a_0 b_0},
 \tag{3.10}$$

a moment, który powoduje całkowite uplastycznienie pręta wynosi:

$$(3.11) \quad M_0 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \sigma_0 (b_0 - a_0)^2.$$

4. Rozwiązanie w kolejnych szczeblach przybliżenia

4.1. Przybliżenie pierwsze. Z warunku plastyczności (3.3) dla $i = 1$ wynika równość pierwszych poprawek naprężeń promieniowego i obwodowego w obu strefach. Dwa równania układu (3.2), dla $i = 1$, można sprowadzić do równania różniczkowego cząstkowego, drugiego rzędu na pierwszą poprawkę naprężenia stycznego $\tau_{r\theta 1}$. Przyjęcie:

$$(4.1) \quad \tau_{r\theta 1} = R(r) \cdot T(\vartheta),$$

prowadzi do rozdzielania zmiennych, a tym samym do dwóch równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu, określających funkcje $R(r)$ i $T(\theta)$. Są to następujące równania:

$$(4.2) \quad r^2 R'' + 3rR' + \lambda^2 R = 0,$$

$$(4.3) \quad T'' + \lambda^2 T = 0,$$

Równanie (4.3) ma całkę ogólną dającą się przedstawić w postaci:

$$(4.4) \quad T = D \cdot \sin \lambda \vartheta.$$

Równanie (4.2) ma następujące całki ogólne:

— dla $\lambda \neq 1$

$$(4.5) \quad R = \frac{1}{r} \left[C_1 \sin \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) + C_2 \cos \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) \right],$$

— dla $\lambda = 1$,

$$(4.6) \quad R = \frac{1}{r} \left(C'_1 \ln \frac{r}{b_0} + C'_2 \right).$$

Wobec (4.4), (4.5) i (4.6), pierwszą poprawkę naprężenia stycznego określają wzory:

— dla $\lambda \neq 1$:

$$(4.7) \quad \tau_{r\theta 1} = \frac{1}{r} \left[A_1 \sin \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) + B_1 \cos \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) \right] \sin \lambda \vartheta,$$

— dla $\lambda = 1$:

$$(4.8) \quad \tau_{r\theta 1} = \frac{1}{r} \left(A'_1 \ln \frac{r}{b_0} + B'_1 \right) \sin \vartheta.$$

Całkowanie równań równowagi dla pierwszego przybliżenia z uwzględnieniem kolejno (4.7) i (4.8), prowadzi do określenia pierwszych poprawek naprężeń obwodowego i promieniowego;

— dla $\lambda \neq 1$

$$(4.9) \quad \sigma_{r1} = \sigma_{\theta 1} = \frac{1}{r} \left[\left(A_1 - \sqrt{\lambda^2 - 1} B_1 \right) \sin \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) + \right. \\ \left. + (B_1 + \sqrt{\lambda^2 - 1} A_1) \cos \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) \right] \frac{\cos \lambda \vartheta}{\lambda} + C_1,$$

— dla $\lambda = 1$

$$(4.10) \quad \sigma_{r1} = \sigma_{\theta 1} = \frac{1}{r} \left[A'_1 \left(\ln \frac{r}{b_0} + 1 \right) + B'_1 \right] \cos \vartheta + C'_1,$$

— gdzie stałe A'_1, B'_1, A_1, B_1 należy wyznaczyć z warunków brzegowych. Są to $A'_{1I}, B'_{1I}, A'_{1II}, B'_{1II}$ — w strefie wewnętrznej $A'_{1II}, B'_{1II}, A_{1II}, B_{1II}$ — w strefie zewnętrznej; stałe C_1 i C'_1 są dowolnymi stałymi całkowania odpowiadającymi nałożeniu dodatkowego ciśnienia hydrostatycznego i w dalszym ciągu przyjęto: $C'_{1I} = C'_{1II} = C_{1I} = C_{1II} = 0$.

Dla wyznaczenia stałych całkowania należy w warunkach brzegowych uwzględnić uzyskane wyrażenia na pierwsze poprawki składowych stanu naprężenia przy założeniu kolejno $\lambda \neq 1$ wzory (4.7) (4.9) oraz $\lambda = 1$ wzory (4.8) i (4.10).

Wyznaczenie z warunków $w_p(1), z_p(1)$ i $g_p(1)$ pierwszych poprawek promieni $a_1(\vartheta), b_1(\vartheta)$ i $g_1(\vartheta)$ i porównanie z wyrażeniami na $a'_1(\vartheta), b'_1(\vartheta)$ i $g'_1(\vartheta)$, uzyskanymi z warunków $w_o(1), z_o(1)$ i $g_o(1)$ prowadzi do układu równań na stałe całkowania.

Dla $\lambda \neq 1$, układ ten ma następującą postać

$$(4.11) \quad \begin{cases} \sqrt{\lambda^2 - 1} \left[A_{1II} \cos \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{a_0}{b_0} \right) - B_{1II} \sin \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{a_0}{b_0} \right) \right] = 0, \\ \sqrt{\lambda^2 - 1} A_{1II} = 0, \\ \sqrt{\lambda^2 - 1} \left[(B_{1I} - B_{1II}) \sin \sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{g_0}{b_0} \right] + (A_{1I} - A_{1II}) \cos \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{g_0}{b_0} \right) = 0. \end{cases}$$

Uwzględnienie wzoru (3.10) i oznaczenie

$$(4.12) \quad \beta = \sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{a_0}{b_0}$$

upraszcza ten układ do następujących równań

$$(4.13) \quad \begin{cases} A_{1I} \cos \beta - B_{1I} \sin \beta = 0, \\ A_{1II} = 0, \\ (B_{1I} - B_{1II}) \sin \frac{\beta}{2} - A_{1I} \cos \frac{\beta}{2} = 0. \end{cases}$$

Układ ten ma następujące nietrywialne rozwiązania:

$$(4.14) \quad \begin{cases} \beta \neq n \frac{\pi}{2}, \\ A_{1I} = B_{1I} \operatorname{tg} \beta, \\ B_{1II} = B_{1I} \left(1 - \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \beta \right). \end{cases}$$

$$(4.15) \quad \begin{cases} \beta = -(2n+1) \frac{\pi}{2}, \\ A_{1I} = B_{1II} (-1)^n, \\ B_{1I} = 0. \end{cases}$$

$$(4.16) \quad \begin{cases} \beta = -2n\pi, \\ A_{1I} = 0. \end{cases}$$

$$(4.17) \quad \begin{cases} \beta = -(2n+1)\pi, \\ B_{1I} = B_{1II} \stackrel{\text{ozn}}{=} B_1, \\ A_{1I} = 0, \end{cases}$$

gdzie $n = 0, 1, 2 \dots$

W dalszym ciągu opracowania omówione zostanie jedynie rozwiązanie (4.17), gdyż jak się okazało warunki brzegowe w drugim szczeblu przybliżenia sprowadzają rozwiązanie (4.14), (4.15), (4.16) bądź do rozwiązania (4.17) bądź do rozwiązania trywialnego $A_{1I} = B_{1I} = B_{1II} = 0$.

Pierwsze równanie z (4.17) określa podwójny ciąg stosunków wymiarów pręta:

$$(4.18) \quad \frac{a_0}{b_0} = e^{\frac{-(2n+1)\pi}{\sqrt{\lambda^2-1}}}.$$

Wykorzystując zależności (4.17) otrzymuje się z wzorów (4.7) i (4.9) wyrażenie na pierwsze poprawki składowych stanu naprężenia

$$(4.19) \quad \begin{cases} \tau_{r\theta_{1I}} = \tau_{r\theta_{1II}} = \frac{B_1}{r} \cos\left(\sqrt{\lambda^2-1} \ln \frac{r}{b_0}\right) \sin^2 \lambda\vartheta, \\ \sigma_{r_{1I}} = \sigma_{\theta_{1I}} = \sigma_{r_{1II}} = \sigma_{\theta_{1II}} = -\frac{B_1}{r\lambda} \left[\sqrt{\lambda^2-1} \sin\left(\sqrt{\lambda^2-1} \ln \frac{r}{b_0}\right) - \right. \\ \left. - \cos\left(\sqrt{\lambda^2-1} \ln \frac{r}{b_0}\right) \right] \frac{\cos \lambda\vartheta}{\lambda}. \end{cases}$$

z warunków brzegowych pierwsze poprawki promieni jako następujące funkcje kąta ϑ :

$$(4.20) \quad \begin{cases} a_1(\vartheta) = -\frac{\sqrt{3}}{2\sigma_0} B_1 \frac{\cos \lambda\vartheta}{\lambda}, \\ b_1(\vartheta) = -\frac{\sqrt{3}}{2\sigma_0} B_1 \frac{\cos \lambda\vartheta}{\lambda}, \\ g_1(\vartheta) = 0. \end{cases}$$

Niewyznaczona stała B_1 spełnia rolę parametru, który zostanie włączony do parametru α .

Dla $\lambda = 1$, wykorzystanie warunków brzegowych prowadzi do zerowania stałych $A_{1I} = A_{1II} = 0$ (nie pojawia się problem wartości własnych). Pierwsze poprawki składowych stanu naprężenia przyjmują postać:

— w strefie obwodowego ściskania

$$(4.21) \quad \begin{cases} \tau_{r\theta_{1I}} = \frac{B'_{1I}}{r} \cdot \sin \vartheta, \\ \sigma_{r_{1I}} = \sigma_{\theta_{1I}} = \frac{B'_{1I}}{r} \cos \vartheta, \end{cases}$$

— w strefie obwodowego rozciągania

$$(4.22) \quad \begin{cases} \tau_{r\theta_{1II}} = \frac{B'_{1II}}{r} \cdot \sin \vartheta, \\ \sigma_{r_{1II}} = \sigma_{\theta_{1II}} = \frac{B'_{1II}}{r} \cdot \cos \vartheta. \end{cases}$$

Pierwsze poprawki promieni wyrażają się następującymi funkcjami kąta ϑ :

$$(4.23) \quad \begin{aligned} a_1(\vartheta) &= \frac{\sqrt{3}}{2\sigma_0} B'_{1I} \cos \vartheta, \\ b_1(\vartheta) &= \frac{-\sqrt{3}}{2\sigma_0} B'_{1II} \cos \vartheta, \\ g_1(\vartheta) &= \frac{\sqrt{3}}{4\sigma_0} (B'_{1I} - B'_{1II}) \cos \vartheta \end{aligned}$$

Należy zauważyć że wzory (4.21) i (4.22) można uzyskać z wzorów (4.19) przez podstawienie $\lambda = 1$ oraz kolejno $B_I = B'_{1I}$ lub $B_{II} = B'_{1II}$. Można zatem traktować wzory (4.19) za obowiązujące dla $\lambda = 1, 2, 3$ z dokładnością do stałej.

4.2. Przybliżenie drugie. Warunek plastyczności (3.3), dla $i = 2$ daje zależność:

$$(4.24) \quad \sigma_{r_2} - \sigma_{\theta_2} = \frac{-2\tau_{r\theta_2}}{\sigma_{r_0} - \sigma_{\theta_0}}.$$

Różnica zerowych przybliżeń naprężeń promieniowego i obwodowego jest z dokładnością do znaku, jednakowa w obu strefach. Ogólnie, warunek plastyczności (4.24) można więc zapisać wzorem:

$$(4.25) \quad \sigma_{r_2} - \sigma_{\theta_2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sigma_0} \cdot \frac{B_1^2}{r^2} \cdot \cos^2 \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) \sin^2 \lambda \vartheta,$$

— gdzie znak górny odnosi się do strefy obwodowego ściskania a dolny do strefy obwodowego rozciągania.

Równania równowagi, dla $i = 2$ po uwzględnieniu (4.25) można sprowadzić do jednego równania cząstkowego, drugiego rzędu, niejednorodnego, określającego drugą poprawkę naprężenia stycznego $\tau_{r\theta_2}$:

$$(4.26) \quad r^2 \cdot \frac{\partial^2 \tau_{r\theta_2}}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \tau_{r\theta_2}}{\partial \vartheta^2} + 3r \frac{\partial \tau_{r\theta_2}}{\partial r} = \pm \frac{B_1}{\lambda r^2} \left[1 + \cos \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) + \right. \\ \left. + 2\sqrt{\lambda^2 - 1} \sin \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) \right] \sin 2\lambda \vartheta.$$

Takie samo równanie z dokładnością do znaku prawej strony otrzymano w pracy [3] (wzór 3.26). Zatem jego rozwiązanie ze znakiem „-” przy stałej B_1 dla strefy obwodowego ściskania, a ze znakiem „+” dla strefy obwodowego rozciągania stanowią wzory (3.29), (3.30) i (3.31) pracy [3].

Stałe A_2 i B_2 należy wyznaczyć z warunków brzegowych w drugim przybliżeniu dla $\lambda \neq 1$ jako $A_{2I}, B_{2I}, A_{2II}, B_{2II}$; dla $\lambda = 1$ jako $A'_{2I}, B'_{2I}, A'_{2II}, B'_{2II}$.

Dla $\lambda \neq 1$ wykorzystanie warunków brzegowych $w_p(2), z_p(2), g_p(2), w_o(2), z_o(2), g_o(2)$ prowadzi do wniosku, że dla ustalonego wzorem (4.18) stosunku promieni $\frac{a_0}{b_0}$ stałe całkowania

$$(4.27) \quad A_{2I} = B_{2I} = A_{2II} = B_{2II} = 0.$$

Mimo zerowania się stałych całkowania drugie poprawki składowych stanu naprężenia są różne od zera i można je wyrazić z dokładnością do znaku wzorami (3.37) pracy [3] (dla strefy obwodowego rozciągania z tym samym znakiem a dla strefy obwodowego ściskania ze znakiem przeciwnym).

Drugie poprawki promieni są następującymi funkcjami kąta ϑ :

$$(4.28) \quad \begin{cases} a_2(\vartheta) = \frac{-3B_1^2}{8\sigma_0^2} \frac{1}{a_0} \sin^2 \lambda \vartheta, \\ b_2(\vartheta) = \frac{-3B_1^2}{8\sigma_0^2} \frac{1}{b_0} \sin^2 \lambda \vartheta, \\ g_2(\vartheta) = \frac{3B_1^2}{8\sigma_0^2} \frac{1}{g_0} \frac{1-\lambda^2}{\lambda^2} \cos 2\lambda \vartheta. \end{cases}$$

Dla $\lambda = 1$ wykorzystanie warunków brzegowych prowadzi do następującego układu równań na stałe całkowania:

$$(4.29) \quad \begin{cases} A'_{2I} \left[2 \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{a_0}{b_0} \right) + \sqrt{3} \cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{a_0}{b_0} \right) \right] + \\ \quad \quad \quad + B'_{2I} \left[2 \cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{a_0}{b_0} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{a_0}{b_0} \right) \right] = 0, \\ 3A'_{2II} = 0, \\ (B'_{1I} + B'_{1II})^2 + (A'_{2I} - A'_{2II}) \left[2 \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{g_0}{b_0} \right) + \sqrt{3} \cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{g_0}{b_0} \right) \right] + \\ \quad \quad \quad + (B'_{2I} - B'_{2II}) \left[2 \cos \left(\sqrt{3} \ln \frac{g_0}{b_0} \right) - \sqrt{3} \sin \left(\sqrt{3} \ln \frac{g_0}{b_0} \right) \right] = 0. \end{cases}$$

Układ (4.29) jest spełniony dla dowolnych stosunków $\frac{a_0}{b_0}$ gdy:

$$(4.30) \quad \begin{aligned} B'_{1I} &\Rightarrow -B'_{1II} \stackrel{\text{ozn}}{=} -B'_1, \\ A'_{2I} &= A'_{2II} = B'_{2I} = B'_{2II} = 0. \end{aligned}$$

Zatem podstawienie we wzorach (3.29), (3.30) i (3.31) pracy [3] kolejno $B_1 = B'_{1I}$ i $B_1 = B'_1 = B'_{1II}$, $\lambda = 1$ oraz uwzględnienie (4.30) daje wyrażenia na drugie poprawki składowych stanu naprężenia.

Drugie poprawki promieni wyrażają się następującymi funkcjami kąta ϑ :

$$(4.31) \quad \begin{cases} a_2(\vartheta) = \frac{3B_1'^2}{8\sigma_0^2} \cdot \frac{1}{a_0} \cos 2\vartheta, \\ b_2(\vartheta) = \frac{-3B_1'^2}{8\sigma_0^2} \cdot \frac{1}{b_0} \sin^2 \vartheta, \\ g_2(\vartheta) = \frac{-3B_1'^2}{8\sigma_0^2} \cdot \frac{1}{g_0} \cos^2 \vartheta. \end{cases}$$

5. Zestawienie końcowych wzorów i przykłady liczbowe.

Wykorzystując wzory (3.1) oraz wyniki uzyskane na poszczególnych szczeblach przybliżenia można wyrazić końcowe wzory określające promienie kształtowanego pręta oraz składowe stanu naprężenia.

Analiza problemu doprowadziła do dwóch jakościowo różnych rozwiązań dla $\lambda \neq 1$, co odpowiada całkowitemu uplastycznieniu pręta o ustalonym stosunku niezaburzonych promieni (wzór (4.18)), oraz dla $\lambda = 1$, co odpowiada całkowitemu uplastycznieniu pręta o dowolnych stosunkach $\frac{a_0}{b_0}$.

Dla $\lambda \neq 1$ funkcje określające promienie kształtowanego pręta z dokładnością do drugiego przybliżenia mają postać:

$$(5.1) \quad \begin{cases} a(\vartheta) = a_0 - \bar{\alpha} \frac{\cos \gamma \vartheta}{\lambda} - \frac{\bar{\alpha}^2}{2a_0} \sin^2 \lambda \vartheta + \dots, \\ b(\vartheta) = b_0 - \bar{\alpha} \frac{\cos \lambda \vartheta}{\lambda} - \frac{\bar{\alpha}^2}{2b_0} \sin^2 \lambda \vartheta + \dots, \\ g(\vartheta) = g_0 - \frac{\bar{\alpha}^2}{2g_0} \frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda^2} \cos 2\lambda \vartheta + \dots, \end{cases}$$

— gdzie $\bar{\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2\sigma_0} \cdot B_1 \cdot \alpha$ jest nowym parametrem charakteryzującym niekołowość pręta.

Składowe stanu naprężenia z dokładnością do drugiego przybliżenia określone są następującymi funkcjami kąta ϑ i promienia r :

— w strefie obwodowego ściskania (wewnętrznej):

$$(5.2) \quad \begin{cases} \sigma_{r_1} = -\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left[\left[\ln \frac{r}{a_0} + \frac{\bar{\alpha}}{\lambda r} \left[\sqrt{\lambda^2 - 1} \sin \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \cos \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) \right] \cos \lambda \vartheta + \frac{\bar{\alpha}^2}{4\lambda^2 r^2} \left\{ \left[(2\lambda^2 - 1) \sqrt{\lambda^2 - 1} \sin x \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) - (3\lambda^2 - 1) \cos \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) - 2\lambda^2 \right] \cos 2\lambda \vartheta + \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \cos \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) - \sqrt{\lambda^2 - 1} \sin \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) + \lambda^2 \right\} + \dots \right] \right], \\ \sigma_{\theta_1} = -\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left[\left[\ln \frac{r}{a_0} + 1 + \frac{\bar{\alpha}}{\lambda r} \left[\sqrt{\lambda^2 - 1} \sin \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \cos \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) \right] \right] \cos \lambda \vartheta + \right. \\ \left. + \frac{\bar{\alpha}}{4\lambda^2 r^2} \left\{ \left[(2\lambda^2 - 1) \sqrt{\lambda^2 - 1} \sin \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - (\lambda^2 - 1) \cos \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) \right] \cos 2\lambda \vartheta - \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \left[\lambda^2 + \sqrt{\lambda^2 - 1} \sin \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) + \right. \right. \right. \end{cases}$$

$$(5.2) \quad \left. \begin{aligned} & + (2\lambda^2 - 1) \cos \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) \right] + \dots \Bigg], \\ \tau_{r\theta I} = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} & \left[\left[\frac{\bar{\alpha}}{r} \cos \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) \sin \lambda\vartheta + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\bar{\alpha}^2}{4\lambda r^2} \left[\sqrt{\lambda^2 - 1} \sin \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) + 1 + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. (2\lambda^2 - 1) \cos \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) \right] \sin 2\lambda\vartheta + \dots \right] \right]. \end{aligned} \right\} \text{[cd.]}$$

W strefie obwodowego rozciągania (zewnątrznej):

$$(5.3) \quad \left. \begin{aligned} \sigma_{rII} = -\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} & \left[\left[\ln \frac{b_0}{r} + \frac{\bar{\alpha}}{\lambda r} \left[\sqrt{\lambda^2 - 1} \sin \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \cos \sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right] \right] \cos \lambda\vartheta - \right. \\ & - \frac{\bar{\alpha}^2}{4\lambda^2 r^2} \left\{ \left[(2\lambda^2 - 1) \sqrt{\lambda^2 - 1} \sin \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - (3\lambda^2 - 1) \cos \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) - 2\lambda^2 \right] \cos 2\lambda\vartheta + \right. \\ & \left. \left. + \cos \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) - (\lambda^2 - 1) \sin \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) + \lambda^2 \right\} + \dots \right], \\ \sigma_{\theta II} = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} & \left[\left[\ln \frac{r}{b_0} + 1 + \frac{\bar{\alpha}}{\lambda r} \left[\sqrt{\lambda^2 - 1} \sin \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \cos \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) \right] \right] \cos \lambda\vartheta + \right. \\ & + \frac{\bar{\alpha}^2}{4\lambda^2 r^2} \left\{ \left[(2\lambda^2 - 1) \sqrt{\lambda^2 - 1} \sin \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - (\lambda^2 - 1) \cos \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) \right] \cos 2\lambda\vartheta - \right. \\ & \left. \left. - \lambda^2 + \sqrt{\lambda^2 - 1} \sin \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + (2\lambda^2 - 1) \cos \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) \right\} + \dots \right], \\ \tau_{r\theta II} = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} & \left[\left[\frac{\bar{\alpha}}{r} \cos \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) \sin \lambda\vartheta - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\bar{\alpha}^2}{4\lambda r^2} \left[\sqrt{\lambda^2 - 1} \sin \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) + 1 + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. (2\lambda^2 - 1) \cos \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) \right] \sin 2\lambda\vartheta + \dots \right] \right]. \end{aligned} \right\}$$

Wyniki otrzymane w strefie zewnętrznej, pokrywają się z wynikami otrzymanymi w pracy [3], w której kształtowano niekołowe cylindry grubościenne poddane działaniu ciśnienia, z tym że zniszczeniu w sensie przyjętego kryterium mogą ulec dodatkowo cylindry niekołowe o stosunku:

$$\frac{a_0}{b_0} = e^{\frac{-2n\pi}{\sqrt{\lambda^2-1}}}.$$

Dla $\lambda = 1$ funkcje określające kształt pręta z dokładnością do drugiego przybliżenia mają postać:

$$(5.4) \quad \begin{cases} a(\vartheta) = a_0 - \bar{\alpha} \cos \vartheta + \frac{\bar{\alpha}^2}{2a_0} \cdot \cos 2\vartheta + \dots, \\ b(\vartheta) = b_0 - \bar{\alpha} \cos \vartheta - \frac{\bar{\alpha}^2}{2b_0} \cdot \sin^2 \vartheta + \dots, \\ g(\vartheta) = g_0 - \bar{\alpha} \cos \vartheta - \frac{\bar{\alpha}^2}{2g_0} \cdot \sin^2 \vartheta + \dots \end{cases}$$

Składowe stanu naprężenia z dokładnością do drugiego przybliżenia określone są następującymi funkcjami kąta ϑ i promienia r :

— w strefie wewnętrznej:

$$(5.5) \quad \begin{cases} \sigma_{rI} = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left[\ln \frac{r}{a_0} + \frac{\bar{\alpha}}{r} \cos \vartheta + \frac{\bar{\alpha}^2}{2r^2} (1 - 2\cos 2\vartheta) + \dots \right], \\ \sigma_{\vartheta I} = -\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left[\ln \frac{r}{a_0} + 1 + \frac{\bar{\alpha}}{r} \cos \vartheta - \frac{\bar{\alpha}^2}{2r^2} + \dots \right], \\ \tau_{r\vartheta I} = -\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left[\frac{\bar{\alpha}}{r} \sin \vartheta - \frac{\bar{\alpha}^2}{2r^2} \cdot \sin 2\vartheta + \dots \right], \end{cases}$$

— w strefie zewnętrznej

$$(5.6) \quad \begin{cases} \sigma_{rII} = -\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left[\ln \frac{r_0}{b_0} - \frac{\bar{\alpha}}{r} \cos \vartheta - \frac{\bar{\alpha}^2}{2r^2} (1 - 2\cos 2\vartheta) + \dots \right], \\ \sigma_{\vartheta II} = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left[\ln \frac{r}{b_0} + 1 + \frac{\bar{\alpha}}{r} \cos \vartheta - \frac{\bar{\alpha}^2}{2r^2} + \dots \right], \\ \tau_{r\vartheta II} = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left[\frac{\bar{\alpha}}{r} \sin \vartheta - \frac{\bar{\alpha}^2}{2r^2} \sin 2\vartheta + \dots \right]. \end{cases}$$

Przyjęcie konkretnych wartości liczbowych za $\bar{\alpha}$, b_0 , λ i a_0 (poprzez n dla $\lambda \neq 1$) określa jednoznacznie poszukiwany kształt pręta, który ulegnie całkowitemu uplastycznieniu w stadium zniszczenia, jak również naprężenia w każdym jego punkcie. Siły zewnętrzne odpowiadające tak przyjętym danym, należy wyznaczyć z warunków równowagi w końcowych przekrojach pręta określonych kątami $\vartheta = 0$ i $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ (rys. 1). Mianowicie w przekroju określonym kątem $\vartheta = 0$:

$$(5.7) \quad \begin{cases} T(0) = \int_{a(0)}^{g(0)} \tau_{r\theta I}(0) dr + \int_{g(0)}^{b(0)} \tau_{r\theta II} dr, \\ N(0) = \int_{a(0)}^{g(0)} \sigma_{\theta I}(0) dr + \int_{g(0)}^{b(0)} \sigma_{\theta II}(0) dr, \\ M(0) = \int_{a(0)}^{g(0)} \sigma_{\theta I}(0) r dr + \int_{g(0)}^{b(0)} \sigma_{\theta II}(0) r dr - \frac{a(0)+b(0)}{2} N(0), \end{cases}$$

oraz w przekroju $\vartheta = \frac{\pi}{2}$:

$$(5.8) \quad \begin{cases} T\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_{a\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{g\left(\frac{\pi}{2}\right)} \tau_{r\theta I}\left(\frac{\pi}{2}\right) dr + \int_{g\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{b\left(\frac{\pi}{2}\right)} \tau_{r\theta II}\left(\frac{\pi}{2}\right) dr, \\ N\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_{a\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{g\left(\frac{\pi}{2}\right)} \sigma_{\theta I}\left(\frac{\pi}{2}\right) dr + \int_{g\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{b\left(\frac{\pi}{2}\right)} \sigma_{\theta II}\left(\frac{\pi}{2}\right) dr, \\ M\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_{a\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{g\left(\frac{\pi}{2}\right)} \sigma_{\theta I}\left(\frac{\pi}{2}\right) r dr + \int_{g\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{b\left(\frac{\pi}{2}\right)} \sigma_{\theta II}\left(\frac{\pi}{2}\right) r dr - \frac{a\left(\frac{\pi}{2}\right)+h\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} N\left(\frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

Ograniczmy się poniżej do λ całkowitych. Dla parzystych $\lambda = 2k$, wobec zerowania się naprężeń stycznych w przekrojach $\vartheta = 0$; $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, problem sprowadza się do poszukiwania niekołowych kształtów pręta obciążonego jedynie momentem M_0 (wzór (3.11)).

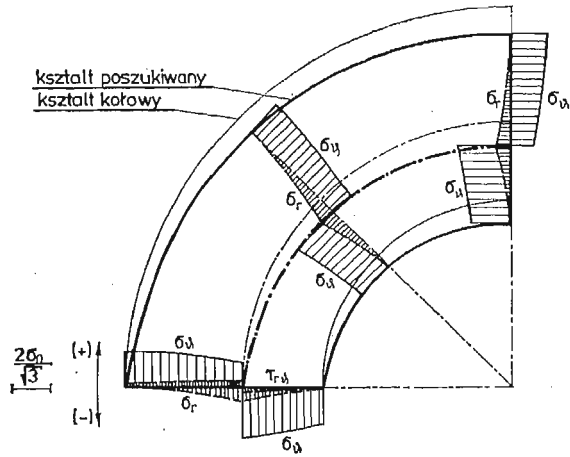
Dla nieparzystych $\lambda = 2k+1$, naprężenia styczne zerują się tylko na brzegu $\vartheta = 0$. Scałkowanie naprężeń $\tau_{r\vartheta}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ daje wzór na siłę styczną:

— dla $\lambda \neq 1$

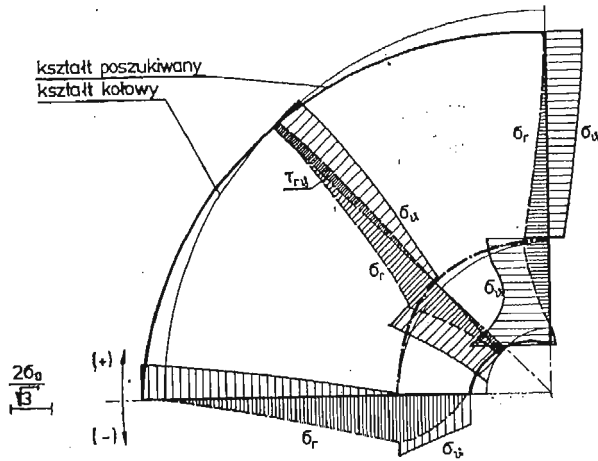
$$(5.9) \quad T\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{\bar{\alpha}(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}}{\sqrt{\lambda^2-1}} \left\{ \sin\left[\sqrt{\lambda^2-1} \ln\left(b_0 - \frac{\alpha^2}{2b_0}\right)\right] - \sin\left[\sqrt{\lambda^2-1} \ln\left(a_0 - \frac{\alpha^2}{2a_0}\right)\right] \right\}.$$

Rozwijając wyrażenie (5.9) w szereg parametrów $\bar{\alpha}$, otrzymujemy

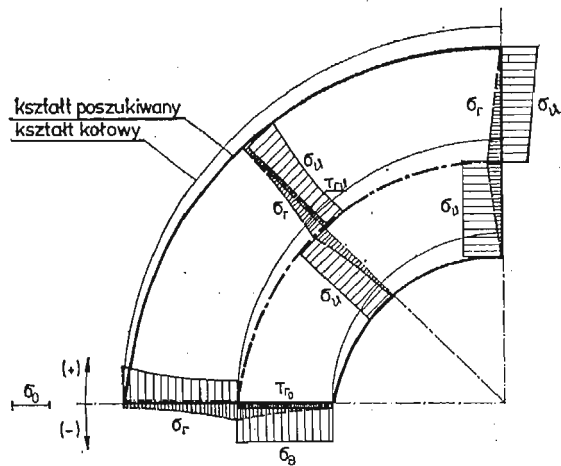
$$(5.10) \quad T\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} \bar{\alpha}}{\sqrt{\lambda^2-1}} \sin(\sqrt{\lambda^2-1} \ln b_0) - \frac{\sigma_0(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} \alpha^3}{\sqrt{3} a_0^2 b_0^2} (a_0^2 + b_0^2) \cos(\sqrt{\lambda^2-1} \ln b_0) + \dots$$



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

— dla $\lambda = 1$

$$(5.11) \quad T\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \bar{\alpha} \ln \left[\frac{\left(a_0 - \frac{\bar{\alpha}^2}{2a_0}\right) \left(b_0 - \frac{\bar{\alpha}^2}{2b_0}\right)}{\left(g_0 - \frac{\bar{\alpha}^2}{2b_0}\right)^2} \right].$$

Po rozwinięciu wyrażenia (5.11) w szereg parametru $\bar{\alpha}$, otrzymujemy:

$$(5.12) \quad T\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{(2a_0g_0 - a_0^2 - b_0^2)}{a_0^2 b_0^2} \bar{\alpha}^3 + \dots$$

Warunki równowagi pręta wymagają:

$$(5.13) \quad \begin{cases} N\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \\ N(0) = T\left(\frac{\pi}{2}\right), \\ M\left(\frac{\pi}{2}\right) = M(0) + \frac{a(0) + b(0)}{2} \cdot N(0). \end{cases}$$

Na rysunkach 2, 3, 4 podano przykładowo znalezione niekołowe kształty pręta oraz rozkład naprężeń w kilku-przekrojach przy przyjęciu różnych danych liczbowych.

6. Analiza problemu w warunkach płaskiego stanu naprężenia

Założenie płaskiego stanu naprężenia pociąga za sobą konieczność skorzystania z warunku Tresci-Guesta, gdyż warunek H—M—H nie daje na szczeblu zerowym rozwiązania ścisłego. W strefie obwodowego ściskania warunek przedstawia się wzorem:

$$(6.1) \quad \sigma_0 = -\frac{\sigma_{r1} + \sigma_{\theta1}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{r1} - \sigma_{\theta1})^2 + 4\tau_{r\theta1}^2},$$

a w strefie obwodowego rozciągania wzorem

$$(6.2) \quad \sigma_0 = \sqrt{(\sigma_{rII} - \sigma_{\theta II})^2 + 4\tau_{r\theta II}^2},$$

identycznym z dokładnością do czynnika $\frac{4}{3}$ z wzorem (2.2). Równania równowagi wewnętrznej (2.1), warunki brzegowe (2.3), (2.4), (2.5), a tym samym ich rozwinięcia (3.4) pozostają obowiązujące.

W pierwszym stopniu przybliżenie przy założeniu $\lambda = 1, 2, 3 \dots$ całkowanie równań podstawowych z wykorzystaniem warunków brzegowych prowadzi do następujących wzorów na pierwsze poprawki składowych stanu naprężenia i promieni $a_1(\vartheta)$ i $b_1(\vartheta)$

— w strefie obwodowego ściskania:

$$(6.3) \quad \begin{cases} \sigma_{r_{II}} = \frac{C_1}{r^2} \cos \vartheta, \\ \sigma_{\vartheta_{II}} = 0, \end{cases}$$

$$(6.4) \quad \begin{cases} a_1(\vartheta) = \frac{C_1}{a_0 \sigma_0} \cos \vartheta, \\ b_1(\vartheta) = -\frac{B_1}{\sigma_0} \frac{\cos \lambda \vartheta}{\lambda}. \end{cases}$$

Warunki brzegowe w drugim szczeblu przybliżenia mogą być spełnione jedynie dla $\lambda = 1$ z czego wniosek, że nie można spowodować całkowitego uplastycznienia pręta którego promień wewnętrzny zmienia się w funkcji kąta ϑ a zewnętrzny w funkcji wielokrotności tego kąta. Warunki te określają również związek między stałymi całkowania w obu strefach

$$C_1 = -B_1 a_0.$$

Wykorzystując wyniki uzyskane na poszczególnych szczeblach przybliżenia można wyrazić wzory określające promienie kształtowanego pręta, z dokładnością do drugiego przybliżenia w postaci funkcji kąta ϑ :

$$(6.5) \quad \begin{cases} a(\vartheta) = a_0 - \bar{\alpha} \cos \vartheta - \bar{\alpha}^2 \frac{1}{2b_0} \sin^2 \vartheta + \dots, \\ b(\vartheta) = b_0 - \bar{\alpha} \cos \vartheta - \bar{\alpha}^2 \frac{1}{2b_0} \sin^2 \vartheta + \dots, \\ g(\vartheta) = g_0 - \bar{\alpha} \cos \vartheta - \bar{\alpha}^2 \frac{1}{2g_0} \sin^2 \vartheta + \dots, \end{cases}$$

— gdzie $\bar{\alpha} = \frac{B'_1}{\sigma_0} \alpha$

Składowe stanu naprężenia określone są następującymi funkcjami kąta ϑ i promienia r :

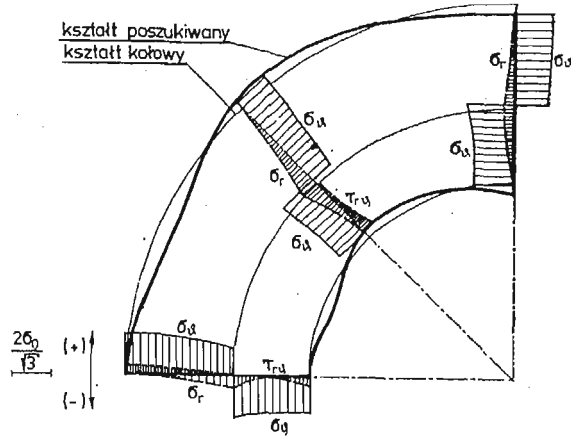
— w strefie wewnętrznej:

$$(6.6) \quad \begin{cases} \sigma_{r_I} = -\sigma_0 \left[1 - \frac{a_0}{r} + \frac{\bar{\alpha} a_0}{r^2} \cos \vartheta + \frac{\bar{\alpha}^2 a_0}{2r^3} (3 \sin^2 \vartheta - 2 \cos^2 \vartheta) + \dots \right], \\ \sigma_{\vartheta_I} = -\sigma_0 \left[1 - \frac{\bar{\alpha}^2 a_0}{r^3} \sin^2 \vartheta + \dots \right], \\ \tau_{r\vartheta_I} = -\sigma_0 \left[\frac{\bar{\alpha} a_0}{r^2} \sin \vartheta - \frac{\bar{\alpha}^2 a_0}{r^3} \sin 2\vartheta + \dots \right], \end{cases}$$

— w strefie zewnętrznej:

$$(6.7) \quad \begin{cases} \sigma_{r_{II}} = -\sigma_0 \left[\ln \frac{b_0}{r} - \frac{\bar{\alpha}}{r} \cos \vartheta + \frac{\bar{\alpha}^2}{2r^2} (2 \cos 2\vartheta - 1) + \dots \right], \\ \sigma_{\vartheta_{II}} = -\sigma_0 \left[\ln \frac{r}{b_0} + 1 + \frac{\bar{\alpha}}{r} \cos \vartheta - \frac{\bar{\alpha}^2}{2r^2} + \dots \right], \\ \tau_{r\vartheta_{II}} = \sigma_0 \left[\frac{\bar{\alpha}}{r} \sin \vartheta - \frac{\bar{\alpha}^2}{2r^2} \sin 2\vartheta + \dots \right]. \end{cases}$$

Rys. 5 podaje przykładowo kształt pręta i rozkład naprężeń znaleziony w oparciu o powyższe wzory przy następujących danych liczbowych $\lambda = 1$, $a_0 = 0,4503$, $b_0 = 1$, $\bar{\alpha} = 0,06$.



Rys. 5

Literatura cytowana w tekście

1. D. C. DRUCKER, R. T. SHIELD, *Bounds on minimum weight design*, Quart. Appl. Math., 3, 15 (1957), 269-281.
2. M. GALOS, *Plastyczne skręcanie niejednorodnych prętów o zmiennej średnicy*, Rozprawy Inżynierskie, 1, 9 (1971), 89—113.
3. Z. KORDAS, M. ŻYCZKOWSKI, *Kształtowanie niekołowych cylindrów grubościennych wykazujących pełne uplastycznienie w stadium zniszczenia*, Rozprawy Inżynierskie 3, 18 (1970), 371—390.
4. Z. KORDAS, *Problematyka działania kształtów ciał wykazujących całkowite uplastycznienie w stadium zniszczenia*, Zeszyty Naukowe Politechniki Krakowskiej, 15, 7 (1977).
5. A. ZAVELANI-ROSSI, *Minimum — weight design for twodimensional bodies*, Meccanica 4, (1968-1969), 1-8.

Резюме

ФОРМЫ СТЕРЖНЕЙ СИЛЬНО ИСКРЯВЛЕННЫХ ПОДВЕРГНУТЫХ ИЗГИБУ С РАСТЯЖЕНИЕМ И СДВИГОМ В СТАДИИ ПОЛНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ РАЗРУШЕНИИ

В представленной работе автор ищет форм стержня подвергнутого изгибу с растяжением и сдвигом, которые в предельном состоянии полностью разрушаются.

В связи с применением метода малого параметра автор ищет форм стержня, отличающихся от круга (четыре круга). В сформированном стержне можно выделить две зоны: зону сжатия по периметру и зону периметрического растяжения, в каждой из которых напряжения характеризуют σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ согласно условиям внутреннего равновесия и условию пластичности. Таким образом достигаются две группы решений. Одна из них соответствует установленным условиям не искаженных радиусов четверти круга, вторая группа является решением для произвольных условий.

Решенная проблема дополняет и расширяет возможности решения ряда проблем представленных в работе [4].

Summary

THE SHAPES OF THICK CURVED BARS SUBJECTED TO BENDING, TENSION AND SHEAR
SHOWING COMPLETE YIELD AT THE STAGE OF COLLAPSE

In the paper we investigate the shapes of bars subjected to bending, tension and shear, satisfying the yield condition at all points at the stage of collapse.

Applying the small parameter method the shapes different from circular (a quarter of a ring) are investigated. In the designed bar we can observe two zones: a zone of circumferential compression and a zone of circumferential tension. In each of them the stress state is determined by three components σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$, satisfying the internal equilibrium conditions and the yield condition. Two types of solutions are obtained: the first, corresponding to given ratios of undisturbed radii of a ring quarter, and the second corresponding to arbitrary ratios.

The solved problem completes and broadens variety of analyzed in [4].

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 stycznia 1979 roku
