

POWŁOKI PROSTOKREŚLNE OPARTE NA OKRĘGU PRACUJĄCE W STANIE ZGIĘCIOWYM

STANISŁAW BIELAK, ANDRZEJ DUDA (OPOLE)

1. Wstęp

W pracy przedstawiono rozwiązanie powłok prostokreślnych opartych na okręgu pracujących w zgięciowym stanie naprężenia. Przyjęty model matematyczny, opisujący stan naprężenia w powłoce, oparto na liniowej teorii izotropowych jednorodnych powłok sprężystych. W pracy rozpatruje się tylko powłoki cienkie, tj. takie, w których odległości pomiędzy powierzchniami granicznymi są wielokrotnie mniejsze od wymiarów i promieni krzywizn tych powierzchni.

Obecne rozwiązania stosowane w praktyce dla powłok hiperboloidalnych (chłodnie kominowe) bazują w zasadzie na pracy w stanie błonowym. Natomiast próby rozwiązania stanu zgięciowego za pomocą innych metod nie uwzględniają rzeczywistych warunków brzegowych, co prowadzi do znacznych odchyień w porównaniu ze stanem rzeczywistym.

Największe odchylenia uwiadcniają się w przemieszczeniach. W prezentowanej pracy rozwiązanie stanu zgięciowego bazuje na szeregach hipertrygonometrycznych pozwalających uwzględniać dowolny sposób obciążenia i podparcia.

Wprowadzona parametryzacja opisuje wspólnym równaniem wektorowym hiperboloidę jednowłokową, stożek i walec a to pozwoliło na podanie algorytmu rozwiązującego trzy typy powłok. Takie ujęcie umożliwi obliczanie tych powłok na EMC za pomocą jednego programu.

Rozwiązanie ogólne układu równań oparto na pracach [1, 2] i polega ono na wprowadzeniu dwóch wymuszonych stanów, błonowego i zgięciowego sprowadzającego odpowiednie układy do kwadratur. Postępowanie takie dało w rozwiązaniu uogólnione siły przekrojowe napięcia i momenty, które są sumami złożonymi z wpływów pracy błonowej i zgięciowej. Podane rozwiązania ogólne zawierają dowolne funkcje niewiadome, zależne od sposobu zamocowania powłoki.

Funkcje te mogą być wyznaczone z warunków brzegowych, ponieważ rozwiązanie zawiera szeregi trygonometryczne pozwalające uwzględnić dowolny sposób podparcia.

2. Ogólny układ równań

2.1. Opis geometryczny. Równanie wektorowe powierzchni środkowej powłok prostokreślnych opartych na okręgu opisuje wzór:

$$(2.1) \quad \vec{r} = a_1(\cos u^2 \vec{i} + \sin u^2 \vec{j}) + u^1 [\cos(u^2 + \alpha) \vec{i} + \sin(u^2 + \alpha) \vec{j}] \times \cos \beta + u^1 \sin \beta \vec{k}.$$

Zmienne niezależne u^1, u^2 są współzależnymi krzywoliniowymi na powierzchni (rys. 1), przy czym u^1 określa położenie punktu na tworzącej, u^2 wskazuje tworzącą, na której leży punkt.

Zmienna u^1 należy do przedziału $0 \leq u^1 \leq l$, gdzie l jest długością tworzącej, natomiast u^2 jest zawarta w przedziale $0 \leq u^2 \leq 2\pi$.

Kąt α jest zawarty między rzutem tworzącym na płaszczyznę xy , a promieniem podstawy a_1 . Nachylenie tworzącej do płaszczyzny xy określa kąt β .

Jeżeli w równaniu (2.1) przyjmiemy $\alpha = 0$ i $\beta = \pi/2$ otrzymamy walec, $\alpha = 0$ i $\beta \neq \pi/2$ stożek, $\alpha \neq 0$ i $\beta \neq \pi/2$ hiperboloidę jednopowłokową.

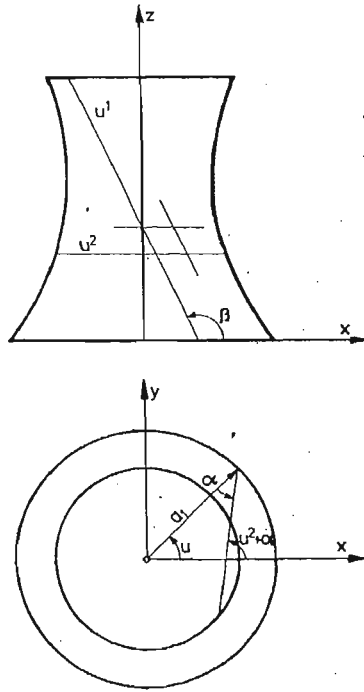
Współczynniki pierwszej i drugiej formy różniczkowej, ich wyróżniki oraz krzywizny — gaussovska i średnia wynoszą [1];

$$\begin{aligned}
 g_{11} &= 1, \\
 g_{12} &= g_{21} = a_1 \sin \alpha \cos \beta, \\
 g_{22} &= (u^1)^2 \cos^2 \beta + 2u^1 a_1 \cos \alpha \cos \beta + a_1^2, \\
 g &= (u^1)^2 \cos^2 \beta + 2u^1 a_1 \cos \alpha \cos \beta + a_1^2 (1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta), \\
 b_{11} &= 0, \\
 b_{12} &= b_{21} = \frac{1}{\sqrt{g}} g_{12} \sin \beta, \\
 b_{22} &= \frac{1}{\sqrt{g}} g_{22} \sin \beta, \\
 b &= -\frac{1}{g} (g_{12} \sin \beta)^2, \\
 K &= -\left(\frac{1}{g} g_{12} \sin \beta\right)^2, \\
 H &= \frac{g - g_{12}^2}{2g \sqrt{g}} \sin \beta,
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

Symbole Christoffela drugiego rodzaju:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{11}^1 &= 0, & \Gamma_{11}^2 &= 0, \\
 \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = -\frac{g_{12}}{2g} \frac{\partial g}{\partial u^1}, \\
 \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = -\frac{1}{g_{12}} \Gamma_{12}^1, \\
 \Gamma_{22}^1 &= \frac{g_{22}}{g_{12}} \Gamma_{12}^1, \\
 \Gamma_{22}^2 &= -\Gamma_{12}^1.
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

2.2. Związki geometryczne powłoki. Związek składowych przemieszczenia ze składowymi tensora odkształcenia błonowego przyjmuje postać:



Rys. 1

$$\begin{aligned}
 (2.4) \quad & W_{,1}^1 + g_{12} W_{,1}^2 = \gamma_{11}, \\
 & g W_{,1}^2 - 2b_{12} W^3 = 2\gamma_{12} - g_{12}\gamma_{11}, \\
 & \frac{1}{2} g_{,1} W^1 - b_{22} W^3 = \gamma_{22}.
 \end{aligned}$$

Przecinek użyty w wyrażeniach (2.4) oznacza odpowiednią pochodną względem zmiennej u^1 .

2.3. Związki fizyczne. Związki fizyczne wiążące naprężenia z odkształceniami dla wersji uproszczonej mają postać:

$$(2.5) \quad N^{ij} = N^{ij} + 6H\hat{M}^{ij}, \quad M^{ij} = \hat{M}^{ij} + \xi h^2 H \bar{N}^{ij},$$

gdzie: ξ oznacza parametr stały, a \bar{N}^{ij} i \hat{M}^{ij} są związkami:

$$\begin{aligned}
 (2.6) \quad \bar{N}^{ij} &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} [(1-\nu)\gamma^{ij} + \nu g^{ij}A], \\
 \hat{M}^{ij} &= \frac{4Eh^3}{3(1-\nu^2)} [(1-\nu)\varrho^{ij} + \nu g^{ij}B].
 \end{aligned}$$

Niezmienniki A i B występujące w (2.6) są sumami:

$$(2.7) \quad A = g^{ij}\gamma_{ij}, \quad B = g^{ij}\varrho_{ij},$$

przy czym tensor odkształcenia błonowo — zgięciowego ϱ_{ij} można zastąpić zależnością:

$$(2.8) \quad \varrho_{ij} = \frac{1}{2} W^3|_{ij}.$$

Użyta w (2.8) kreska pionowa oznacza pochodną kowariantną. Związki (2.6) napiszemy w innym ujęciu, dostosowanym do bezpośredniego wykorzystania. Z pierwszego wyrażenia (2.6) wyznaczamy składowe tensora błonowego γ_{ij} :

$$(2.9) \quad \gamma_{ij} = \frac{1}{2Eh} [(1-\nu)g_{ii}g_{jk} - \gamma g_{ij}g_{ik}\bar{N}^{jk}].$$

Wielkości \hat{M}^{ij} opisane drugim wyrażeniem (2.6) po podstawieniu (2.8) przyjmą postać:

$$(2.10) \quad M^{ij} = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu)^2} [(1-\nu)g^{ii}g^{jk}W^3|_{ik} + \gamma g^{ij}W].$$

Składowe tensora sił tnących Q^i napiszemy w oparciu o pracę [1]:

$$(2.11) \quad Q^j = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu)^2} g^{ij}W|_i.$$

Niezmiennik W występujący w (2.10) i (2.11) jest sumą:

$$(2.12) \quad W = g^{ij}W^3|_{ij}.$$

Przejście do współrzędnych fizycznych, odniesionych do bazy jednostkowej dokonujemy za pomocą wzorów:

$$(2.13) \quad \begin{aligned} N_{ij}^{\bar{}} &= \sqrt{\frac{g_{ij}}{g^{ij}}} N^{ij}, & Q_i^{\bar{}} &= \sqrt{\frac{1}{g^{ii}}} Q^i, \\ M_{ij}^{\bar{}} &= -\sqrt{\frac{gg^{11}}{g^{ii}}} M^{i2}, & M_{i2}^{\bar{}} &= \sqrt{\frac{gg^{22}}{g^{ii}}} M^{i1}, \\ W_i^{\bar{}} &= \sqrt{g_{ii}} W^i, & W_3^{\bar{}} &= W^3, \\ P_i^{\bar{}} &= \sqrt{g_{ii}} P^i, & P_3 &= P^3, \end{aligned}$$

(po ij nie sumować).

Symbol „ $\bar{\quad}$ ” oznacza współrzędną fizyczną.

3. Rozwiązanie równania różniczkowego powłok prostokreślnych opartych na okręgu

Równanie różniczkowe rozwiązujące dowolne powłoki prostokreślne dowolnie obciążone i podparte posiada kształt — patrz praca [1]:

$$(3.1) \quad g^{ij}g^{kl}g^{mn}g^{rs}\bar{N}^{22}|_{rmnklj} + \frac{\bar{\beta}^4}{g} K^2 \bar{b}^{ij}\bar{b}^{kl}\bar{N}^{22}|_{klij} = -R,$$

gdzie:

$$R = g^{ij}g^{kl}g^{mn}R^1|_{mnklj} + \frac{\bar{\beta}^4}{g} K \bar{b}^{ij}[R^2 + \frac{1}{3}P^3|_{11}]|_{ij} + \frac{1+\nu}{g} g^{ij}g^{lk}P^r|_{rklj11},$$

oraz

$$\begin{aligned}
 R^1 &= g^{2r} P^2|_r - \frac{g_{1r}}{g} P^r|_1, \\
 R^2 &= K \bar{b}^{2r} P^2|_r - \frac{b_{1r}}{g} P^r|_1, \\
 K \bar{b}^{ij} &= 2Hg^{ij} - b^{ij}, \\
 \bar{\beta}^4 &= \frac{3(1-\gamma^2)}{h^2} g.
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

Rozwiązanie równania (3.1) można przedstawić jako sumę:

$$\bar{N}^{22} = \bar{N}_o^{22} + \bar{N}_s^{22}
 \tag{3.3}$$

złożoną z całki \bar{N}_o^{22} , nazwanej całką ogólną i całki \bar{N}_s^{22} nazwanej całką szczególną.

Całka szczególna \bar{N}_s^{22} jest rozwiązaniem stanu bezmomentowego i może być wyznaczona przez całkowanie bezpośrednie.

Całka ogólna \bar{N}_o^{22} rozwiązująca stan zgięciowy, może być przedstawiona jako suma odpowiednio dobranego szeregu hipertrygonometrycznego, zapisanego w ujęciu tensorowym. Zapis tensorowy będzie szczególnie korzystny dla przeprowadzenia wszystkich operacji matematycznych związanych z obliczeniami.

Wprowadźmy następujące wielkości mające charakter tensorowy ze względu na sumowanie.

Argumenty funkcji trygonometrycznych
hiperbolicznej:

$$Z_H^k = \bar{\beta} m_H^k u^i,
 \tag{3.4}$$

kołowej:

$$Z_k^l = \bar{\beta} n^l u^j.
 \tag{3.5}$$

Funkcje trygonometryczne
Hiperboliczne:

$$H^i = \begin{cases} \text{sh} & \text{dla } i = 1, \\ \text{ch} & \text{dla } i = 2, \end{cases}
 \tag{3.6}$$

pochodna funkcji H^i :

$$\bar{H}^i = \begin{cases} \text{ch} & \text{dla } i = 1, \\ \text{sh} & \text{dla } i = 2, \end{cases}
 \tag{3.6'}$$

kołowe:

$$K^j = \begin{cases} \sin & \text{dla } j = 1, \\ \cos & \text{dla } j = 2, \end{cases}
 \tag{3.7}$$

pochodna funkcji K^j :

$$\bar{K}^j = \begin{cases} \cos & \text{dla } j = 1, \\ \sin & \text{dla } j = 2, \end{cases}
 \tag{3.7'}$$

Wielkości trygonometryczne

hiperboliczne:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} A_{mn}^{ik} &= H^i Z_H^k, \\ \bar{A}_{mn}^{ik} &= \bar{H}^i \bar{Z}_H^k, \end{aligned}$$

kołowe

$$(3.9) \quad \begin{aligned} B_{mn}^{il} &= K^l Z_k^i, \\ \bar{B}_{mn}^{il} &= \bar{K}^l \bar{Z}_k^i, \end{aligned}$$

Po wprowadzeniu tych wielkości całce ogólnej $N_o^{2,2}$ można nadać kształt:

$$(3.10) \quad \bar{N}_o^{2,2} = \sum_{m,n=1} C_{rklj}^{mn} A_{mn}^{ik} B_{mn}^{il}$$

Wskaźniki i, j, k, l mają charakter tensorowy i przyjmują wartości 1, 2, natomiast m, n są liczbami naturalnymi. Wielkości C_{rklj}^{mn} wyznacza się z warunków brzegowych.

W wyrażeniu (3.10) nie znamy wielkości m_i^k, n_j^l . Możemy je wyznaczyć rozwiązując równanie algebraiczne ósmego stopnia, uzyskane ze spełnienia tożsamościowego równania (3.1), które przyjmuje postać:

$$(3.11) \quad g^{ij} g^{kl} g^{mn} g^{rs} \bar{N}_o^{2,2} |_{rsmnklj} + \frac{\bar{\beta}^4}{g} K^2 \bar{b}^{ij} \bar{b}^{kl} \bar{N}_o^{2,2} |_{klj} = 0.$$

Po wykonaniu działań polegających na różniczkowaniu szeregów otrzymamy następujący układ równań:

$$\bar{\beta}^8 [(D^2 - E^2)^2 - 4D^2 E^2 + \kappa^2 g (D_1^2 - E_1^2)] = 0,$$

Równanie różniczkowe (3, 11) jest równaniem o pochodnych kowariantnych (oznaczonych pionową kreską „|”) ze zmiennymi współczynnikami zależnymi tylko od współczynników pierwszej formy różniczkowej g_{ij} . Również poszukiwane wielkości m_i^k, n_j^l będą funkcjami współczynników g_{ij} . Dzięki temu w procesie różniczkowania kowariantnego będą się one zachowywały tak jak wielkości stałe. Zilustrujemy to prostym przykładem rozwiązania następującego równania różniczkowego, o pochodnych kowariantnych:

$$g^{ij} N |_{ij} + \alpha N = 0,$$

gdzie α jest funkcją g_{ij} .

Przyjmując rozwiązanie ilustrujące postaci

$$N = \sin n_i u^i,$$

w którym n_i będą funkcjami współczynników pierwszej formy różniczkowej g_{ij} , otrzymamy po zróżniczkowaniu kowariantnym i spełnieniu równania wyjściowego następujące równanie:

$$[g^{ij} n_i n_j - \alpha] N = 0,$$

dające algebraiczne równanie rozwiązujące postaci

$$g^{ij} n_i n_j - \alpha = 0.$$

Uwaga: Rozwijając funkcję $\sin n_i u^i$ w szereg otrzymamy:

$$N = \sin n_i u^i = n_i u^i - \frac{(n_i u^i)^3}{3!} + \frac{(n_i u^i)^5}{5!} - \dots$$

Po zróżniczkowaniu kowariantnym względem zmiennej u^k będzie

$$N|_k = n_k \left[1 - \frac{(n_i u^i)^2}{2!} + \frac{(n_i u^i)^4}{4!} - \dots \right],$$

bo n_k jest funkcją g_{ij} , czyli;

$$N|_k = n_k \cos n_i u^i.$$

Ponowne zróżniczkowanie względem zmiennej u^l daje

$$N|_{kl} = -n_k n_l \sin n_i u^i.$$

Rozwiązanie ogólne równania (3.11) uzyskamy tworząc odpowiednią sumę szeregu hipertrygonometrycznego postaci (3.10).

$$(3.12) \quad \bar{\beta}^8 [4DE(D^2 - E^2) + 2\kappa^2 g D_1 E_1] = 0,$$

gdzie:

$$(3.13) \quad \begin{aligned} D &= g g^{ij} D_{ij}, & E &= g g^{ij} E_{ij}, \\ D_1 &= k_j^i \frac{b}{\kappa} b^{ij} D_{ij}, & E_1 &= k_j^i \frac{b}{\kappa} b^{ij} E_{ij}, \\ k_j^i &= \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j, \\ -1 & \text{dla } i \neq j, \end{cases} \\ D_{ij} &= m_i^k m_j^k - n_i^k n_j^k, & E_{ij} &= m_i^k n_j^k + m_j^k n_i^k, \end{aligned}$$

Z układu (3.12) możemy wyznaczyć niewiadome wielkości m_i^k, n_j^k . Przyjmując $D = 0$ i $E = \varepsilon$ dochodzimy do układu dwóch równań z czterema niewiadomymi:

$$(3.14) \quad \begin{aligned} g g^{ij} (m_i^k m_j^k - n_i^k n_j^k) &= 0, \\ g g^{ij} (m_i^k n_j^k + m_j^k n_i^k) &= \varepsilon, \end{aligned}$$

gdzie: $\varepsilon = \pm \sin \beta$

Dwie z tych niewiadomych mogą być dowolnie przyjęte, a wtedy pozostałe dwie wyznaczymy z równań (3.14). Rozwiązanie układu równań (3.14) można podać w postaci:

$$\begin{aligned} m_1^k &= \frac{\sqrt{gb}}{g g^{11}} \left\{ \frac{g_{12}}{\sqrt{g}} \frac{m_2}{b} + \varepsilon^k \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{g_{11}^{11}}{b^2} \right)^2 \left(1 - \frac{4m_2 n_2}{g g^{11}} \right) + 1} \right] - \left(\frac{m_2}{b} \right)^2} \right\}, \\ m_2^k &= m_2, \\ n_1^l &= \frac{\sqrt{gb}}{g g^{11}} \left\{ \frac{g_{12}}{\sqrt{g}} \frac{n_2}{b} + \varepsilon^l \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{g_{11}^{11}}{b^2} \right)^2 \left(1 - \frac{4m_2 n_2}{g g^{11}} \right) + 1} \right] - \left(\frac{n_2}{b} \right)^2} \right\}, \\ n_2^l &= n_2, \end{aligned}$$

gdzie:

$$(3.16) \quad \begin{aligned} b^2 &= (m_2)^2 + (n_2)^2 \\ \varepsilon^k &= \begin{cases} 1 & \text{dla } k = 1 \\ -1 & \text{dla } k = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

4. Rozwiązanie stanu zgięciowego

Wszystkie wielkości opisujące stan zgięciowy, zarówno siły jak i przemieszczenia, są sumami odpowiednich szeregów hipertrygonometrycznych. Szeregów tych są cztery rodzaje, a rozwiązania są ich kombinacjami.

Oznaczając występujące w równaniach sumy odpowiednimi symbolami, uzyskamy możliwość wprowadzenia do opisu konwencji sumowania tensorowego.

Niech symbole S^i i \bar{S}^i określają sumy:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} S^1 &= C_{klij}^{mn} A_{mn}^{ik} B_{mn}^{jl}, & S^2 &= C_{klij}^{mn} \bar{A}_{mn}^{ik} \bar{B}_{mn}^{jl}, \\ \bar{S}^2 &= C_{klij}^{mn} \bar{A}_{mn}^{ik} B_{mn}^{jl}, & \bar{S}^1 &= C_{klij}^{mn} A_{mn}^{ik} \bar{B}_{mn}^{jl}. \end{aligned}$$

Wówczas siły \bar{N}_0^{ij} będą opisane wyrażeniem:

$$(4.2) \quad \bar{N}_0^{ij} = \sum_{m,n} F_k^{ij} S^k$$

Wielkości F_k^{ij} uzyskamy z odpowiednich równań równowagi [1]. Możemy je podać w postaci:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} F_r^{12} &= \begin{cases} F_1^{12} = -\frac{m_1^k m_2 + n_1^k n_2}{(m_1^k)^2 + (n_1^k)^2} \\ F_2^{12} = \frac{n_1^k m_2 - m_1^k n_2}{(m_1^k)^2 + (n_1^k)^2} \end{cases} \\ F_r^{11} &= \begin{cases} F_1^{11} = (F_1^{12})^2 - (F_2^{12})^2, \\ F_2^{11} = 2F_1^{12}F_2^{12}, \end{cases} \\ F_r^{22} &= \begin{cases} F_1^{22} = 1, \\ F_2^{22} = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Po wykorzystaniu związku przemieszczenia \hat{W}^3 z siłami \bar{N}_0^{ij} postaci:

$$(4.4) \quad \hat{W}^3 = -\frac{g}{2Eh\epsilon^2} b_{ij} \bar{N}_0^{ij}$$

możemy momenty \hat{M}^{ij} określone równaniami (2.10) opisać następującymi wyrażeniami:

$$(4.5) \quad \hat{M}^{ij} = \frac{g}{\beta 2\epsilon^2} [(1-\nu)(\delta_i^k G^{rs} + e_i^k L^{rs}) + \nu g e^{ij} e_i^k] F_k S^i$$

gdzie: G^{rs} i L^{rs} są określone wzorami:

$$(4.5) \quad G^{rs} = g g^{ir} g^{js} (m_r^k m_s^k - n_r^k n_s^k), \quad L^{rs} = g g^{ir} g^{js} (m_r^k n_s^k + n_r^k m_s^k),$$

oraz

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases} \quad e_j^i = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = 1 \\ 0 & \text{dla } i = j \\ -1 & \text{dla } i = 2 \end{cases}$$

Siły tnące opisane równaniami (2.11), dla stanu zgięciowego po odpowiednim zróżniczkowaniu kowariantnym wyrażenia (4.4) wynoszą:

$$(4.6) \quad \hat{Q}^j = -\frac{g}{\beta \epsilon} g^{ij} (\delta_r^s n_i^s - e_r^s m_i^k) F_s \bar{S}^r,$$

gdzie:

$$(4.7) \quad F_k = b_{ij} F_k^{ij}.$$

Przemieszczenia \hat{W}^i wyznaczymy z równań (2.4):

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \hat{W}^1 &= \frac{1}{2Eh} \sum_{m,n} A_i \bar{S}^i, \\ \hat{W}^2 &= \frac{1}{2Eh} \sum_{m,n} B_i \bar{S}^i, \\ \hat{W}^3 &= \frac{-g}{2Eh\delta^2} \sum_{m,n} F_i S^i. \end{aligned}$$

Wielkości A_i, B_i występujące w (4.8) są równe:

$$(4.9) \quad \begin{aligned} A_1 &= \frac{M_1 m_1 + M_2 n_1}{\beta [(m_1^k)^2 + (n_1^k)^2]}, & A_2 &= \frac{M_2 m_1 - M_2 n_1}{\beta [(m_1^k)^2 + (n_1^k)^2]}, \\ B_1 &= \frac{-B_{ij} [m_i^k F_1^{ij} + n_i^k F_2^{ij}]}{\beta [(m_1^k)^2 + (n_1^k)^2]}, & B_2 &= \frac{-B_{ij} [m_i^k F_2^{ij} - n_i^k F_1^{ij}]}{\beta [(m_1^k)^2 + (n_1^k)^2]}, \\ M_r &= A_{ij} F_r^{ij} - \beta (\delta_r^k m_2^k + e_r^k n_2^k) B_k, \\ A_{ij} &= (1-\nu) g_{ij} - \frac{2gH}{\delta^2} b_{ij}, & B_{ij} &= (1+\nu) g_{1i} g_{1j} - A_{ij} - \nu g_{ij} \end{aligned}$$

5. Zestawienie wzorów obliczeniowych

Wyrażenia opisujące pracę powłoki są sumami złożonymi z całek szczególnych odpowiadających stanowi błonowemu i całek ogólnych dających pracę zgięciową.

5.1. Stan błonowy

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \bar{N}_s^{11} &= -\frac{1}{\sqrt{g}} \left[\int \sqrt{g} P^1 du^1 + \frac{1}{2\sin\beta} \int g' P^3 du^1 + C_1 \right], \\ \bar{N}_s^{12} &= -\frac{g_{12}}{g_{22}} \bar{N}_s^{11} + \frac{1}{\sqrt{g} g_{22}} \left[-\int \sqrt{g} g_{12} P^1 du^1 + \frac{1}{\sin\beta} \int g P^3 du^1 + C_2 \right], \\ \bar{N}_s^{22} &= -\frac{1}{g_{22}} \left[2g_{12} \bar{N}_s^{12} + \frac{\sqrt{g}}{\sin\beta} P^3 \right]. \end{aligned}$$

Przemieszczenia

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \bar{W}^1 &= \int \left\{ \left[\frac{g_{22}}{g} \gamma_{11} + 2 \frac{g_{12}}{g} \left(\frac{g_{12}}{g_{22}} \bar{\gamma}_{22} - \bar{\gamma}_{11} \right) \right] \exp \int \frac{g_{12}^2}{g g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} du^1 \right\} du^1 + C_3(u^2), \\ \bar{W}^2 &= \frac{1}{g_{12}} \left[\int \bar{\gamma}_{11} du^1 - \bar{W}^1 \right] + C_4(u^2), \\ \bar{W}^3 &= \frac{1}{b_{22}} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u} \bar{W}^1 - \gamma_{22} \right]. \end{aligned}$$

Odształcenia $\bar{\gamma}_{ij}$ występujące w (5.2) wyznaczymy ze wzorów (2.9).

5.2. Stan zgięciowy

Siły

$$(5.3) \quad \bar{N}_0^{ij} = \sum_{m,n} F_k^{ij} S^k,$$

$$\hat{Q}^j = -\frac{g}{\beta \varepsilon} g^{ij} (\delta_r^s n_i^r - e_r^s m_i^k) F_s \bar{S}^r.$$

Momenty zginające

$$(5.4) \quad \hat{M}^{ij} = \frac{g}{\beta^2 \varepsilon^2} [(1-\nu) (\delta_l^k G^{rs} + e_l^k L^{rs}) + \nu \varepsilon g^{ij} e_l^k] F_k S^l.$$

Przemieszczenia

$$(5.5) \quad \hat{W}^1 = \frac{1}{2Eh} \sum_{mn} A_i \bar{S}^i, \quad \hat{W}^2 = \frac{1}{2Eh} \sum_{mn} B_i \bar{S}^i, \quad \hat{W}^3 = \frac{-g}{2Eh\varepsilon^2} \sum_{mn} F_i S^i.$$

Wielkości pomocnicze F_k^{ij} , G^{rs} , L^{rs} , F_k , A_k , B_k określają wzory: (4.3), (4.5'), (4.7), (4.9).

5.3. Stan łączny

Wielkości tensorowe

Siły

$$(5.6) \quad N^{ij} = \bar{N}_s^{ij} + \bar{N}_0^{ij} + 6HM\hat{M}^{ij},$$

$$Q^j = \hat{Q}^j + \xi h^2 (HN\bar{N}^j)_|_l,$$

Momenty

$$(5.7) \quad M^{ij} = M^{ij} + \xi h^2 HN\bar{N}^{ij}.$$

Przemieszczenia

$$(5.8) \quad W^i = \bar{W}^i + \hat{W}^i, \quad W^3 = \bar{W}^3 + \hat{W}^3$$

Wielkości fizyczne uzyskamy ze wzorów (2.13).

Literatura cytowana w tekście

1. St. BIELAK, *Powłoki prostokątne*, Zeszyty Naukowe WSI Opole, Budownictwo 3 (1976).
2. St. BIELAK, *Ogólna teoria powłok prostokątnych pracujących w stanie zgięciowym*, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Budownictwo, 33 (1973).

Резюме

ИЗГИБ ЛИНЕЙЧАТЫХ ОБОЛОЧЕК ОПЕРТЫХ НА ОКРУЖНОСТИ

В работе дано решение проблемы линейчатых оболочек опирающихся на окружности, работающих в изгибающем напряжённом состоянии. Принята математическая модель, описывающая состояние напряжения в оболочке основана на линейной теории изотропных однородных упругих оболочек. Введена параметризация описывает общим векторным уравнением однополостный гиперболоид, конус и цилиндр, а это позволило определить алгоритм решающий задачи трех типов оболочек.

В настоящей работе решение изгибающего состояния опирается на гипертригонометрических рядах, позволяющих учитывать любой способ нагрузки и подпоры.

S u m m a r y

BENDING STATE OF RULED SURFACE SHELLS BASED ON A CIRCLE

We discuss the bending theory of the ruled surface shells such as cylinder, cone and one sheet hyperbola based on a circle. The mathematical model is based on the assumption that the shells material is isotropic and linear.

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 lipca 1978 roku.
