

OPTYMALNE KSZTAŁTOWANIE DYSKÓW WIRUJĄCYCH Z ZASTOSOWANIEM ZASADY  
MAKSIMUM PONTRIAGINA

GWIDON S Z E F Ę R, LESZEK M I K U Ł S K I (KRAKÓW)

1. Wstęp

Zagadnienie kształtowania dysków wirujących należy do klasycznych zadań mechaniki i było przedmiotem wielu prac między innymi [2, 3, 9], a tarcze równomiernej wytrzymałości nawet wchodzą w zakres opracowań monograficznych [4, 6, 7, 8].

Istniejące do tej pory rozwiązania ignorują jednak istotny z technicznego punktu widzenia fakt ograniczenia (od góry i od dołu) grubości dysku co czyni konwencjonalne rozwiązania często nieracjonalnymi.

W pracy niniejszej rozważymy problem kształtowania optymalnego wirujących tarcz kołowych i pierścieniowych na minimum przemieszczenia oraz minimum normy intensywności naprężeń w obecności ograniczeń geometrycznych nałożonych na przekrój dysku. Do rozwiązania przedstawionych zadań zastosujemy zasadę maksimum Pontriagina. Efektem pracy będą optymalne kształty dysków oraz wykresy naprężeń i przemieszczeń.

2. Sformułowanie problemu

W biegunowym układzie współrzędnych  $\{0, r, \theta\}$  rozpatrujemy kołowo symetryczny problem tarczy zmiennej grubości  $h(r)$ , wirującej ze stałą prędkością kątową  $\omega$ , w stałym polu temperatury  $T$ . Komplet relacji, opisujących stan układu sprężystego obejmuje wówczas znane równania:

i) równowagi

$$\frac{1}{h} \frac{d}{dr} (h\sigma_r) + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\gamma}{g} \omega^2 r = 0$$

ii) nierozdzielności

$$r \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + \varepsilon_\theta - \varepsilon_r = 0$$

ii2) geometryczne

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$$

\*<sup>o</sup> Praca została wykonana w ramach problemu węzłowego 05.12 „Wytrzymałość i optymalizacja konstrukcji maszynowych i budowlanych” — koordynowanego przez IPPT PAN.

iii) fizyczne

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) + \alpha T$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) + \alpha T$$

gdzie:  $\sigma_r, \sigma_\theta$  — naprężenia,  $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$  — odkształcenia,  $\gamma$  — ciężar objętościowy,  $g$  — przyspieszenie ziemskie,  $\alpha$  — współczynnik rozszerzalności cieplnej,  $u$  — przemieszczenie radialne,  $E$  — moduł Younga,  $\nu$  — 1. Poissona.

Wprowadzając oznaczenie

$$S = rh\sigma_r,$$

a następnie rugując  $\sigma_\theta$  (za pomocą związków fizycznych i geometrycznych) otrzymujemy ostatecznie z równań równowagi i nierozdzielności układ:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \frac{dS}{dr} &= \frac{\nu}{r} S + \frac{E}{r} uh - \left( \alpha ET + \frac{\gamma}{g} \omega^2 r \right) h, \\ \frac{du}{dr} &= \frac{1-\nu^2}{E} \cdot \frac{S}{rh} - \frac{\nu}{r} u + (1+\nu) \alpha T, \end{aligned}$$

dogodny dla dalszych rozwiązań.

Analizować będziemy pełne dyski kołowe z warunkami brzegowymi

$$(2.2) \quad u(0) = 0 \quad S(R) = 0,$$

oraz pierścieniowe, z warunkami

$$(2.3) \quad S(R_1) = 0, \quad S(R_2) = 0.$$

Przystępując do sformułowania problemu optymalizacji, przyjmujemy jako zmienną decyzyjną grubość  $h(r)$ , a dla niej ograniczenia

$$(2.4) \quad \begin{aligned} H_1 &\leq h(r) \leq H_2 \\ \int_{R_1}^{R_2} 2\pi rh(r) dr &= V_0 = \text{const.} \end{aligned}$$

Rozpatrzmy dwa typy zagadnień optymalnego kształtowania;

I. na minimum przemieszczenia:

$$(2.5) \quad J(h) = u(R_2) \rightarrow \min_h,$$

II. na minimum normy (w przestrzeni  $L^2$ ) intensywności naprężeń:

$$(2.6) \quad J(h) = \int_{R_1}^{R_2} \sigma_i^2 dr \rightarrow \min_h,$$

gdzie

$$\begin{aligned} \sigma_i = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_r \sigma_\theta} &= \left[ \left( \frac{S}{rh} \right)^2 + \left( \frac{\nu S}{rh} \right)^2 + \frac{2rS}{rh} \left( \frac{Eu}{r} - E\alpha T \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{Eu}{r} \right)^2 - \frac{2E^2 u \alpha T}{r} + E^2 \alpha^2 T \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

W dalszym ciągu ograniczenie stałej objętości (2.4)<sub>2</sub> uwzględnimy poprzez wprowadzenie mnożnika Lagrange'a, rozpatrując funkcjonały

$$(2.7) \quad J(h, \lambda) = u(R_2) + \lambda \int_{R_1}^{R_2} 2\pi r h dr \quad \text{dla przypadku I,}$$

$$J(h, \lambda) = \int_{R_1}^{R_2} (\sigma_r^2 + \lambda 2\pi r h) dr \quad \text{dla przypadku II.}$$

Zbiór sterowań dopuszczalnych określimy więc ostatecznie jako

$$(2.8) \quad U_{dop} = \{h: H_1 \leq h(r) \leq H_2\}.$$

Wprowadzając dla zwartego opisu stanu (deformacji i naprężeń) wektor  $y(S, u)$  a dla prawych stron układu (3.1) wektor

$$f \left[ \frac{\nu}{r} S + \frac{E}{r} u h - \left( \alpha E T + \frac{\gamma}{g} \omega^2 r \right) h; \quad \frac{1-\nu^2}{E} \frac{S}{r h} - \frac{\nu}{r} u + (1+\nu) \alpha T \right]$$

sformułujemy następujące dwa problemy optymalizacji; dane jest:

1° równanie układu (2.1) (w notacji wektorowej)

$$\frac{dy}{dr} = f(r, y, h)$$

2° zbiór sterowań dopuszczalnych (2.8),

3° funkcje celu określone funkcjonalami Lagrange'a (2.7).

Zadanie 1:

Wyznaczyć takie  $h(r)$ , aby spełniając równanie 1° z odpowiednimi warunkami brzegowymi (2.2) lub (2.3) i ograniczenie 2° uzyskać minimum funkcjonału (2.7)<sub>1</sub>.

Zadanie 2:

Problem jak wyżej lecz dla funkcjonału (2.7)<sub>2</sub>. Do rozwiązania tak określonych zadań użyjemy zasady maksimum Pontriagina (5). W tym celu wprowadzić należy hamiltonian

$$(2.9) \quad H(y, \psi, h) \stackrel{\text{def}}{=} (\psi, f) = \sum_{i=0}^2 \psi_i f_i$$

w którym wektor sprzężony  $\psi(\psi_0, \psi_1, \psi_2)$  spełnia znane równanie

$$(2.10) \quad \frac{d\psi}{dr} = - \frac{\partial H}{\partial y}$$

z warunkami wynikającymi z warunków transwersalności, a funkcja  $f_0$  określona jest wyrażeniem podcałkowym w (2.7). Szczegółowe wyznaczenie rozwiązania optymalnego z odpowiadającym mu stanem naprężeń i deformacji omówimy oddzielnie dla każdego przypadku.

## 3. Problem I — kształtowanie na minimum przemieszczenia

Funkcjonał Lagrange'a odpowiadający wyjściowej funkcji celu (2.5) i ograniczeniu (2.4)<sub>2</sub> ma postać (2.7)<sub>1</sub>. tj.

$$(3.1) \quad J(h, \lambda) = u(R_2) + \lambda \int_{R_1}^{R_2} 2\pi r h dr \rightarrow \min_{h \in U_{\text{dop}}},$$

Hamiltonian (2.9) będzie wówczas określony wyrażeniem

$$(3.2) \quad H = \psi_0 \lambda 2\pi r h + \psi_1 \left[ \frac{\nu}{r} S + \frac{E}{r} u h - \left( \alpha E T + \frac{\gamma}{g} \omega^2 r \right) h \right] + \\ + \psi_2 \left[ \frac{1-\nu^2}{E} \frac{S}{r h} - \frac{\nu}{r} u + (1+\nu) \alpha T \right].$$

Stosownie do twierdzenia Pontriagina, dla optymalnego sterowania  $h^*(r)$  jest  $H(y^*, \psi^*, h^*) = \max_h H(y, \psi, h)$  skąd na podstawie warunku  $\frac{\partial H}{\partial h} = 0$  mamy

$$(3.3) \quad h^*(r) = \sqrt{\frac{(1-\nu^2)\psi_2(r)}{E \cdot r \left[ 2\pi r \lambda \psi_0 + \psi_1(r) \left( \frac{E}{r} u - \alpha E T - \frac{\gamma}{g} \omega^2 r \right) \right]}}$$

Przepis ten obowiązuje w przedziale, w którym  $H_1 < h < H_2$ . Układ równań sprzężonych ma zgodnie z (2.10) postać:

$$(3.4) \quad \frac{d\psi_1}{dr} = -\psi_1 \frac{\nu}{r} - \psi_2 \frac{1-\nu^2}{Er} \frac{1}{h}, \quad \psi_0(r) = -1 \\ \frac{d\psi_2}{dr} = -\psi_1 \frac{Eh}{r} + \psi_2 \frac{\nu}{r}.$$

Rozpatrzymy najpierw przypadek pierścienia, a zatem obowiązywać będą warunki brzegowe (2.3). Wektor  $\psi(\psi_1, \psi_2)$  jest prostopadły do rozmaitości

$$(3.5) \quad \Theta_0 = \{y_0 : S(R_1) = 0\}, \quad \Theta_k = \{y_k : S(R_2) = 0\}.$$

Z uwagi na minimalizację wielkości zależnej od stanu końcowego modyfikacji podlega końcowy warunek transwersalności [5]:

$$G(0, u) \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial S} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial u} = 1, \\ -\psi_0 \left( \frac{\partial G}{\partial S} \eta_1 + \frac{\partial G}{\partial u} \eta_2 \right) + \psi_1 \eta_1 + \psi_2 \eta_2 = 0,$$

przy warunku

$$B\eta_1 = 0; \quad \left( -\psi_0 \frac{\partial G}{\partial u} + \psi_2 \right) \eta_2 = 0, \quad 1 + \psi_2 = 0 \Rightarrow \psi_2(R_2) = -1.$$

A więc wartości funkcji sprzężonych wynoszą

$$(3.6) \quad \psi_2(R_1) = 0, \quad \psi_2(R_2) = -1.$$

Aby efektywnie wyznaczyć sterowanie optymalne\*  $h(r)$  (we wzorze (3.3) nieznanne są) funkcje  $\psi_1, \psi_2$  oraz  $u$ ) należy rozwiązać układ równań (2.1), (3.4) z uwzględnieniem (3.3).

Będzie zatem

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dr} &= \frac{\nu}{r} S + \left( \frac{E}{r} u - \alpha ET - \frac{\gamma}{g} \omega^2 r \right) \sqrt{\frac{(1-\nu^2)\psi_2}{Er \left[ -2\pi r \lambda + \psi_1 \left( \frac{E}{r} u - \alpha ET - \frac{\gamma}{g} \omega^2 r \right) \right]}}, \\
 \frac{du}{dr} &= \frac{1-\nu^2}{Er} \frac{S}{\sqrt{\frac{(1-\nu^2)\psi_2}{Er \left[ -2\pi r \lambda + \psi_1 \left( \frac{E}{r} u - \alpha ET - \frac{\gamma}{g} \omega^2 r \right) \right]}}} - \frac{\nu}{r} + (1+\nu)\alpha T, \\
 \frac{d\psi_2}{dr} &= -\psi_1 \frac{E}{r} \sqrt{\frac{(1-\nu^2)\psi_2}{Er \left[ -2\pi r \lambda + \psi_1 \left( \frac{E}{r} u - \alpha ET - \frac{\gamma}{g} \omega^2 r \right) \right]}} + \psi_2 \frac{\nu}{r}, \\
 \frac{d\psi_1}{dr} &= -\psi_1 \frac{\nu}{r} - \psi_2 \frac{1-\nu^2}{Er} \frac{1}{\sqrt{\frac{(1-\nu^2)\psi_2}{Er \left[ -2\pi r \lambda + \psi_1 \left( \frac{E}{r} u - \alpha ET - \frac{\gamma}{g} \omega^2 r \right) \right]}}},
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

z warunkami:

$$\begin{aligned}
 S(R_1) &= 0, & S(R_2) &= 0, \\
 \psi_2(R_1) &= 0, & \psi_2(R_2) &= -1
 \end{aligned}
 \tag{3.8}$$

Do układu (3.7) dołączyć należy równanie:

$$\int_{R_1}^{R_2} 2\pi r \sqrt{\frac{(1-\nu^2)\psi_2}{Er \left[ -2\pi r \lambda + \psi_1 \left( \frac{E}{r} u - \alpha ET - \frac{\gamma}{g} \omega^2 r \right) \right]}} dr = V_0
 \tag{3.9}$$

określające mnożnik Lagrange'a  $\lambda$ . Relacje (3.7) — (3.9) łącznie, pozwalają (przynajmniej formalnie) wyznaczyć cztery nieznanne funkcje  $S(r), u(r), \psi_1(r), \psi_2(r)$  i liczbę  $\lambda$ , a stąd sterowanie optymalne  $h(r)$ . Jest widoczne, że zadanie to można rozwiązać efektywnie jedynie na drodze numerycznej. Metoda bezpośredniego całkowania układu (3.7) wymaga znajomości wektora początkowego  $[S(R_1), u(R_1), \psi_1(R_1), \psi_2(R_2)]$ , zaś warunki (3.8) wskazują, że tylko dwie spośród tych wartości znane są zawczasu, pozostałe dwie muszą być tak dobrane by spełnić warunki na brzegu  $r = R_2$ . Mamy tu więc do czynienia z zadaniem dwugranicznym typu „2+2”. Sytuację utrudnia fakt doboru mnożnika  $\lambda$ . Algorytm rozwiązania będzie zatem następujący:

1° ustalamy najpierw przedział zmienności  $\lambda$ . W tym celu przyjmujemy  $h = H_2$  i podstawiamy do (2.1) otrzymując układ

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dr} &= \frac{\nu}{r} S + \frac{E}{r} H_2 u - \left( \alpha ET + \frac{\gamma}{g} \omega^2 r \right) H_2, \\
 \frac{du}{dr} &= \frac{1-\nu^2}{E} \frac{S}{r H_2} - \frac{\nu}{r} u + (1+\nu)\alpha T,
 \end{aligned}$$

z warunkami brzegowymi (2.3).

Podobnie rozwiązujemy układ równań sprzężonych (3.4)

$$\begin{aligned}\frac{d\psi_1}{dr} &= -\psi_1 \frac{\nu}{r} - \psi_2 \frac{1-\nu^2}{Er} \frac{1}{H_2}, \\ \frac{d\psi_2}{dr} &= -\psi_1 \frac{EH_2}{r} + \psi_2 \frac{\nu}{r},\end{aligned}$$

z warunkami

$$\psi_1(0) = 0, \quad \psi_2(R) = -1.$$

Tą drogą uzyskane funkcje  $\psi_1(R)$ ,  $\psi_2(R)$  oraz  $u(r)$  podstawiamy do związku (3.9). Aproksymując całkę sumą skończoną dostaniemy

$$\sum_{n=1}^N r_n \left\{ \frac{(1-\nu^2)\psi_2^n}{Er_n \left[ -2\pi r_n \lambda + \psi_1^n \left( \frac{E}{r_n} u_n - \alpha TE - \frac{\gamma}{g} \omega^2 r_n \right) \right]} \right\}^{\frac{1}{2}} \Delta r = \frac{V_0}{2\pi}.$$

Rozwijając lewą stronę jako funkcję zmiennej  $\lambda$  w szereg Macklaurina i ograniczając się do dwóch pierwszych wyrazów otrzymamy

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^N r_n \left[ \frac{(1-\nu^2)\psi_2^n}{Er_n \psi_1^n \left( \frac{E}{r_n} u_n - \alpha TE - \frac{\gamma}{g} \omega^2 r_n \right)} \right]^{\frac{1}{2}} \Delta r + \\ + \lambda \left\{ \sum_{n=1}^N \frac{r_n}{2} \left[ \frac{(1-\nu^2)\psi_2^n}{Er_n \psi_1^n \left( \frac{E}{r_n} u_n - \alpha TE - \frac{\gamma}{g} \omega^2 r_n \right)} \right]^{\frac{1}{2}} \times \right. \\ \left. \times \frac{(1-\nu^2)\psi_2^n 2\pi r_n}{Er_n \psi_1^n \left( \frac{E}{r_n} u_n - \alpha TE - \frac{\gamma}{g} \omega^2 r_n \right)} \Delta r \right\} = \frac{V_0}{2\pi},\end{aligned}$$

skąd ostatecznie

$$(3.10) \quad \lambda^* =$$

$$\begin{aligned}& \frac{V_0}{2\pi} - \sum_1^N r_n \left[ \frac{(1-\nu^2)\psi_2^n}{Er_n \psi_1^n \left( \frac{E}{r_n} u_n - \alpha TE - \frac{\gamma}{g} \omega^2 r_n \right)} \right]^{\frac{1}{2}} \Delta r \\ &= \frac{\left\{ \sum_{n=1}^N \frac{r_n}{2} \left[ \frac{(1-\nu^2)\psi_2^n}{Er_n \psi_1^n \left( \frac{E}{r_n} u_n - \alpha TE - \frac{\gamma}{g} \omega^2 r_n \right)} \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{(1-\nu^2)\psi_2^n 2\pi r_n}{Er_n \psi_1^n \left( \frac{E}{r_n} u_n - \alpha TE - \frac{\gamma}{g} \omega^2 r_n \right)} \Delta r \right\}}{\end{aligned}$$

W analogiczny sposób dostaniemy wartości  $\lambda^{**}$  odpowiadającą ograniczeniu  $h = H_1$ .

2° Mając przedział znamionności  $\lambda \in [\lambda^*, \lambda^{**}]$  całkujemy numerycznie układ (3.7) z warunkami (3.8) otrzymując nowe wartości  $S_n$ ,  $u_n$ ,  $\psi_1^n$ ,  $\psi_2^n$ .

3° Wyznaczamy z (3.10) nową wartość  $\lambda$  i podstawiamy ją ponownie do układu (3.7) powtarzając wielokrotnie tę procedurę.

4° Optymalny kształt przekroju tarczy opisany jest w ogólności funkcją

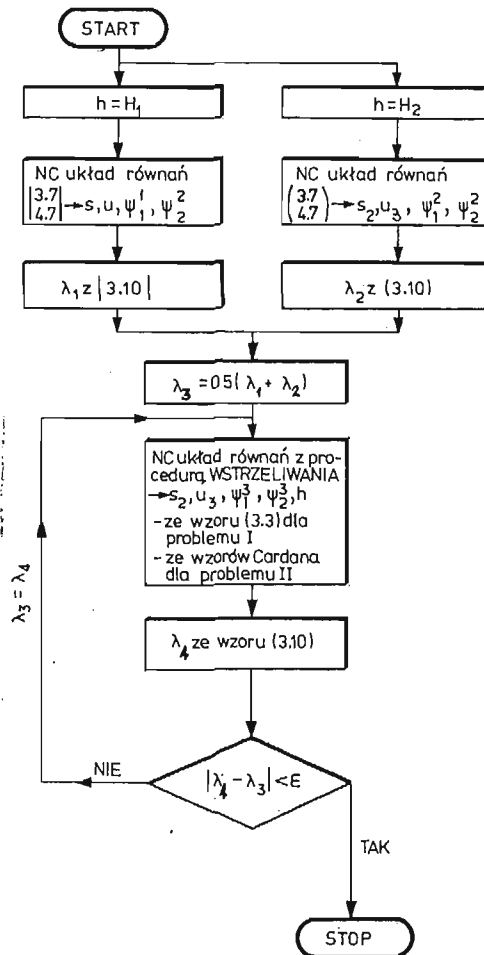
$$(3.11) \quad h^*(r) = \begin{cases} H_2 & r \in [R_1, r_1], \\ \sqrt{\frac{(1-\nu^2)\psi_2(r)}{Er \left[ -2\pi r \lambda + \psi_1(r) \left( \frac{E}{r} u - \alpha ET - \frac{\gamma}{g} \omega^2 r \right) \right]}} & r \in [r_1, r_2], \\ H_1 & r \in [r_2, R_2]. \end{cases}$$

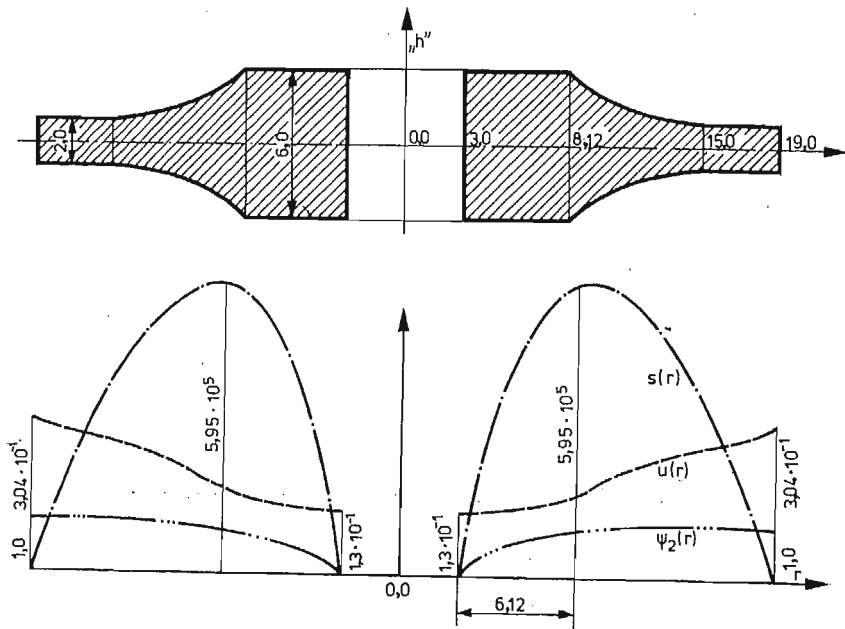
Istnienie i wartości odciętych  $r_1$  oraz  $r_2$  dają się stwierdzić w drodze realizacji omówionego algorytmu i zależą od parametrów zadania. Na każdym kroku  $r_n$  sprawdzamy wartość  $h_n$  i stwierdzamy zgodnie z (3.11), który przepis obowiązuje.

5° Proces iteracji dla ustalenia  $\lambda$  kończymy, gdy różnice pomiędzy kolejnymi rozwiązaniami dla całego układu na danym kroku (są mniejsze od przyjętej wartości błędu (np.  $10^{-3}$ )).

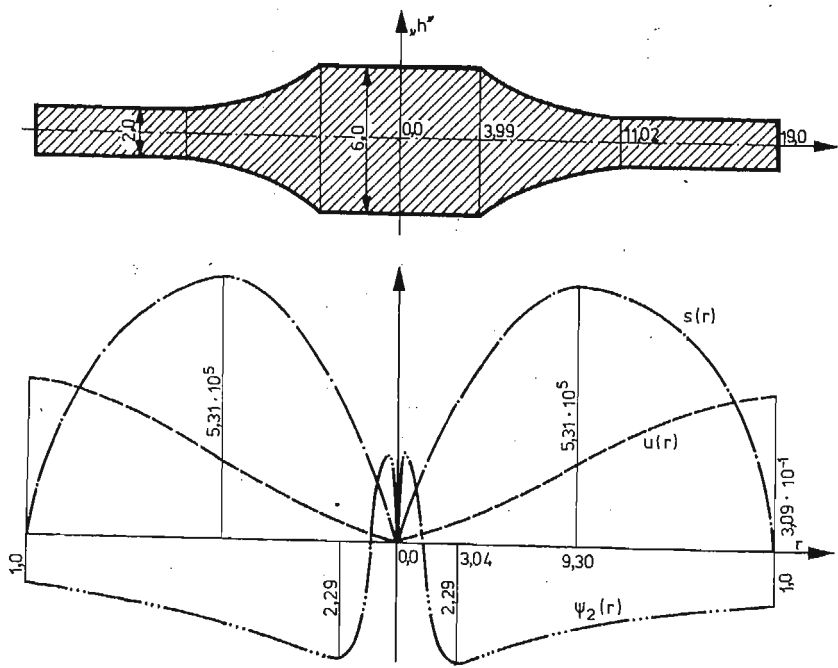
Schemat blokowy całego algorytmu optymalizacji podano na rys. 1.

SCHEMAT BLOKOWY





Rys. 2



Rys. 3



W pracy wykonano przykład liczbowy przyjmując dane:

$$\begin{aligned}
 R_1 &= 0,03 \text{ m}, & \omega &= 233,33 \frac{1}{s}, \\
 R_2 &= 0,19 \text{ m}, & T &= 500^\circ C, \\
 H_1 &= 0,01 \text{ m}, & \alpha &= 1,2 \cdot 10^5 \frac{1}{1^\circ C}, \\
 H_2 &= 0,03 \text{ m}, & \nu &= 0,3, \\
 V_0 &= 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3, \\
 E &= 2,1 \cdot 10^7 \frac{T}{m^2} & \frac{\gamma}{g} &= 7,84 \frac{T}{m^3}
 \end{aligned}$$

Wyniki uzyskane metodą Runge-Kutty z algorytmem rozwiązywania zadania dwugranicznego (procedura „wstrzeliwania”) według programu na EMC opracowanego przez OETO Politechniki Krakowskiej ilustruje rys. 2.

Równocześnie, wykonano obliczenia dla dysku pełnego ( $R_1 = 0$ ), Jedynej zmianie ulegają wówczas warunki brzegowe, które są w postaci (2.2) reszta, a więc układ (3.7) (3.9) i przepis (3.11), pozostaje bez zmian. Rezultaty dla danych jak w poprzednim przykładzie — zestawiono na rys. 3.

#### 4. Problem II — Kształtowanie na minimum normy intensywności naprężeń

Funkcja celu określona teraz związkami (2.6) przy ograniczeniu (2.4)<sub>2</sub> daje funkcjonal Lagrange'a

$$(4.1) \quad J(h, \lambda) = \int_{R_1}^{R_2} \left\{ \frac{s^2}{r^2 h^2} (1 + \nu^2) + \frac{2\nu SE}{rh} \left( \frac{u}{r} - \alpha T \right) + \left( \frac{Eu}{r} \right)^2 - \frac{2E^2 u \alpha T}{r} + \right. \\
 \left. + (E\alpha T)^2 + \lambda 2\pi r h \right\} dr \rightarrow \min_{h \in U_{\text{dop}}}$$

Skonstruowany dla tego przypadku hamiltonian

$$(4.2) \quad H = \psi_0 \left[ \frac{s^2(1 + \nu^2)}{r^2 h^2} + \frac{2\nu SE}{rh} \left( \frac{u}{r} - \alpha T \right) + \left( \frac{Eu}{r} \right)^2 - \frac{2E^2 u \alpha T}{r} + (E\alpha T)^2 + \lambda 2\pi r h \right] + \\
 + \psi_1 \left[ \frac{\nu}{r} S + \frac{Euh}{r} - \left( \alpha ET + \frac{\gamma}{g} \omega^2 r \right) h \right] + \psi_2 \left[ \frac{1 - \nu^2}{Er} \frac{S}{h} - \frac{\nu}{r} u + (1 + \nu) \alpha T \right]$$

prowadzi do równania, określającego sterowanie optymalne

$$(4.3) \quad h^3 \left[ \psi_1 \left( \frac{Eu}{r} - \alpha TE - \frac{\gamma}{g} \omega^2 r \right) - 2\pi r \lambda \right] + h \left[ \frac{2\nu S}{r} \left( \frac{Eu}{r} - E\alpha T \right) + \right. \\
 \left. - \frac{\psi_2(1 - \nu^2)}{Er} S \right] + \frac{2(1 + \nu^2)}{r^2} s^2 = 0, \quad H_1 < h < H_2.$$

Układ równań sprzężonych przybiera formę

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dr} &= \frac{2(1+\nu^2)S}{r^2 h^2} + \frac{2\nu}{rh} \left( \frac{Eu}{r} - E\alpha T \right) - \psi_1 \frac{\nu}{r} - \psi_2 \frac{1-\nu^2}{Er} \frac{1}{h} \\ \frac{d\psi_2}{dr} &= \frac{2\nu ES}{r^2 h} + \frac{2E^2 u}{r^2} - \frac{2E^2 \alpha T}{r} - \psi_1 \frac{Eh}{r} + \psi_2 \frac{\nu}{r}. \end{aligned}$$

W konsekwencji ortogonalności wektora  $\psi$  do rozmaitości (3.5) otrzymujemy wartości

$$(4.5) \quad \psi_2(R_1) = 0; \quad \psi_2(R_2) = 0$$

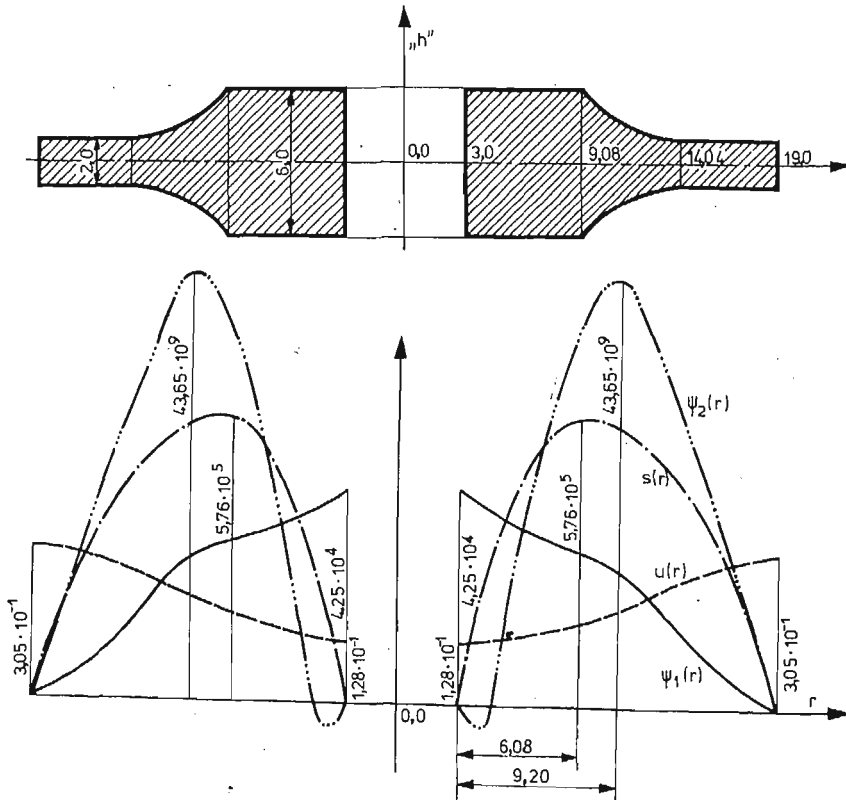
dla dysku pierścieniowego oraz

$$(4.6) \quad \psi_1(0) = 0 \quad \psi_2(R_2) = 0$$

dla tarczy pełnej.

Kompletna analiza zadania wymaga zatem rozwiązania układu:

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \frac{dS}{dr} &= \frac{\nu}{r} S + \frac{Euh}{r} - \left( \alpha ET + \frac{\gamma}{g} \omega^2 r \right) h, \\ \frac{du}{dr} &= \frac{1-\nu^2}{Er} \frac{S}{h} - \frac{\nu}{r} u + (1+\nu) \alpha T, \end{aligned}$$



Rys. 4

$$\frac{d\psi_1}{dr} = \frac{2(1+\nu^2)S}{r^2h^2} + \frac{2\nu}{rh} \left[ \frac{Eu}{r} - E\alpha T \right] - \psi_1 \frac{\nu}{r} - \psi_2 \frac{1-\nu^2}{Er} \frac{1}{h},$$

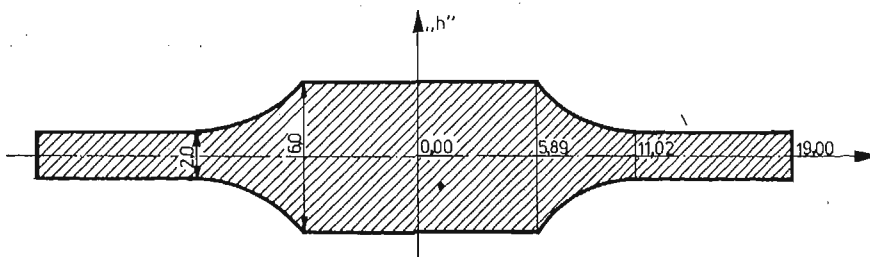
$$\frac{d\psi_2}{dr} = \frac{2\nu SE}{r^2h} + \frac{2uE^2}{r^2} - \frac{2E^2\alpha T}{r} - \psi_1 \frac{Eh}{r} + \psi_2 \frac{\nu}{r},$$

$$2\pi \int_{R_1}^{R_2} r h dr = V_0,$$

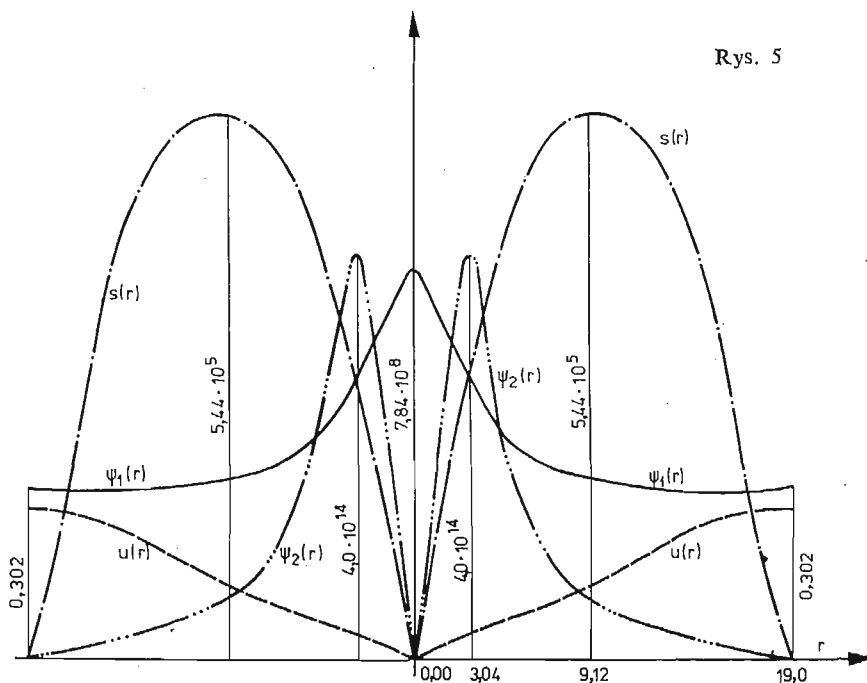
z warunkami

$$(4.8) \quad \begin{array}{ll} S(R_1) = 0, & S(R_2) = 0, \\ \psi_2(R_1) = 0, & \psi_2(R_2) = 0, \end{array} \quad \text{dla pierścienia,}$$

$$\begin{array}{ll} u(0) = 0, & S(R) = 0, \\ \psi_1(0) = 0, & \psi_2(R) = 0, \end{array} \quad \text{dla koła.}$$



Rys. 5



Układ (4.7) uzupełniony jest związkiem (4.3), który w odróżnieniu od poprzednio omawianego przypadku I — nie daje jawnej postaci optymalnego rozwiązania  $h(r)$ . Cały problem (4.3), (4.7) (4.8) wymaga więc numerycznej analizy w wyniku której otrzymujemy poszukiwane wielkości  $u(r)$ ,  $S(r)$ ,  $h(r)$ ,  $\psi_1(r)$ ,  $\psi_2(r)$ ,  $\lambda$ . Procedura wyznaczenia tych wielkości jest identyczna z omówioną poprzednio, z tym że należało je uzupełnić o algorytm rozwiązania równania (4.3). Do tego celu użyto wzorów Cardana. Wyniki liczbowe dla danych jak w przykładzie I ilustrują rys. 4 i 5.

### 5. Zakończenie

Przeprowadzona w pracy analiza dowodzi skuteczności metody. Sformułowane zadania optymalizacyjne rozwiązano efektywnie, pokazując aktywność ograniczeń. Zastosowana procedura numerycznego całkowania złożonych układów równań nieliniowych z warunkami typu „2+2” okazała się w pełni zadowalająca dla liczby 100 kroków. Obliczenia przeprowadzono na maszynie cyfrowej CYBER 72. Czas obliczeń pełnego kompletu funkcji wynosi średnio około 20 s. Warto przy okazji zwrócić uwagę na fakt, że postawione i rozwiązane w pracy zagadnienia optymalizacji odpowiadają w sformułowaniu dualnym poszukiwaniu minimum objętości przy zadanym przemieszczeniu zewnętrznego brzegu (zadanie I) lub zadanej wartości normy intensywności naprężeń (zadanie II).

Praca stanowi fragment szerszego studium nad efektywnością zastosowań zasady maksimum Pontriagina do optymalizacji elementów konstrukcji.

### Literatura cytowana w tekście

1. M. ATHANS, FALB, „Sterowanie optymalne WNT Warszawa, 1966
2. J. CHERN, W. PRAGER, „Optimal Design of Rotating Disk for Given Radial Displacement of Edge” JOTA, 6, 2, 1970.
3. A. GAJEWSKI, „Optymalne kształtowanie wytrzymałościowe w przypadku materiałów o nieliniowości fizycznej” ZN Pol. Krak. Nr 5, 1975.
4. M. HUBER, „Steromechanika Techniczna” PWN, Warszawa 1958.
5. G. LEITMANN, „Wprowadzenie do teorii sterowania optymalnego” WNT, Warszawa 1971.
6. J. LIPKA, „Wytrzymałość maszyn wirnikowych” WNT, Warszawa 1967.
7. S. PONOMERIEW, „Współczesne metody obliczeń wytrzymałościowych w budowie maszyn” PWN, Warszawa 1957.
8. J. RABOTNOW, „Połuczest elementow konstrukcji”, Nauka, Moskwa 1966.
9. M. RANTA, „On the optimum shape of a rotating disk of any isotropic material”, Inf. 7. Solids Struct. 5, 1969.

### Резюме

#### ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ПОНТРИАГИНА К ОПТИМАЛИЗАЦИИ ВРАЩАЮЩИХСЯ ДИСКОВ

В публикации занимаемся решением задачи оптимализации для диска переменной толщины. Функция распределения толщины диска (конфигурация) изменяется в пределах ограничений. В первом случае рассмотрена задача нахождения конфигурации сообщающей оптимальное значение перемещению внешнего контура диска. Во втором случае функционал качества является нормой в пространстве  $L_2$  интенсивности напряжений. Для решения задачи оптимализации использован принцип максимума Понтрягина.

## S u m m a r y

## OPTIMAL DESIGN OF ROTATING DISCS BY USING PONTRIAGIN'S PRINCIPLE

In the paper two problems of the optimal design of rotating discs have been considered. For each of these tasks the thickness of the discs was bounded. In the first case the displacement of the extremal edge was taken as the objective function. In the second case the norm in the  $L_2$  sense of the stress intensity. The circular discs as well as the ring discs were considered. The solution by using Pontriagin's principle was obtained. This approach leads to the two-point boundary problems which was solved by numerical methods. Some illustrative examples are given.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 5 lutego 1978 r.*

---