

## PEWNE PROBLEMY KSZTAŁTOWANIA POWŁOK OSIOWO-SYMETRYCZNYCH W STANIE BŁONOWYM

JACEK KRUŻELECKI (KRAKÓW)

### 1. Powłoki równomiernej wytrzymałości w sensie węższym i w sensie szerszym

Eliminacja stanu giętnego w powłokach, o ile jest to możliwe ze względu na sposób obciążenia i podparcia, stanowi już pewien stopień optymalizacji. Prowadzi ona bowiem do równomiernego wyętwienia przekroju powłoki, a przy dodatkowym warunku wyrównania wyętwienia w poszczególnych punktach powierzchni środkowej do tzw. powłok równomiernej wytrzymałości. Szczegółowy przegląd prac dotyczący optymalizacji powłok podał M. Życzkowski [27].

Pierwsze prace zakładały najprostszą formę wyrównania naprężeń

$$(1.1) \quad \sigma_{\phi} = \sigma_{\theta} \pm \sigma_0,$$

którą nazwano tutaj „warunkiem równomiernej wytrzymałości w sensie węższym”. W wielu przypadkach zastosowanie warunku (1.1) jest nieuzasadnionym uproszczeniem problemu i związek ten winien być zastąpiony przez ogólniejszy

$$(1.2) \quad \sigma_{red} = f(\sigma_{\phi}, \sigma_{\theta}) = \sigma_0,$$

gdzie  $\sigma_{red}$  oznacza naprężenie zredukowane wg przyjętej hipotezy,  $\sigma_0$  — naprężenie dopuszczalne,  $\sigma_{\phi}$  i  $\sigma_{\theta}$  odpowiednio naprężenia południkowe i obwodowe. Warunek (1.2) będzie nazwany tutaj „warunkiem równomiernej wytrzymałości w sensie szerszym”. Warto zauważyć, że podczas gdy warunek (1.1) i dwa równania równowagi określają jednoznacznie np. powłokę obrotowo-symetryczną zarówno co do grubości ścianki jak i kształtu powierzchni środkowej, to warunek szerszy (1.2) nie jest warunkiem wystarczającym optymalności ponieważ pozostawia jedną z funkcji dowolną. Pozostały „stopień swobody” pozwala na zastosowanie dodatkowej optymalizacji np. z warunku minimum objętości.

W stanie błonowym rozkład naprężeń w powłoce jest statycznie wyznaczalny. Oznacza to, iż prawo fizyczne efektywnie nie interweniuje i powłoka optymalna w zakresie sprężystym jest również optymalna z uwagi na nośność graniczną czy też czas zniszczenia przy kruchym pękaniu wg teorii Kaczanowa obliczony w zależności od rodzaju materiału (Hayhurst, Leckie [10], [18]) bądź to w oparciu o kryterium maksymalnych naprężeń rozciągających lub też przy użyciu hipotezy Hubera-Misesa-Hencky'ego (HMH). Z tą ostatnią związane jest również energetyczne kryterium zniszczenia (tzw. bariera dysypacji energii) wprowadzone przez Z. Bychawskiego i W. Olszaka [5], następnie rozwinięte

przez H. Kopeckiego i J. Walczaka [15] w zastosowaniu do tarcz wirujących. Tak więc optymalne powłoki równomiernej wytrzymałości mogą być traktowane również jako optymalne z uwagi na czas krytyczny — żywotność konstrukcji.

Przed sformułowaniem celu obecnej pracy omówimy krótko historię zagadnienia.

Jako pierwszy, bo już w roku 1908, M. Milanković [21] kształtował powłokę w stanie błonowym obciążoną ciężarem własnym i ciśnieniem cieczy. Zastosował on warunek (1.1). Wyniki liczbowe dla przypadku działania tylko ciężaru własnego podał G. Megareus [20]. W oparciu o ten sam warunek K. Federhofer [7] określił tzw. zbiorniki kroplokształtne, a ten sam autor wraz z J. Krebitzem [9] podał pewną metodę numerycznego całkowania uzyskanych równań. Stronę konstrukcyjną zbiorników kroplokształtnych rozważają T. Pöschl [22], E. Kottenmeier [17] i C. Bramski [2], [3]. Przypadek stałego ciśnienia rozważał F. Tölke [25], natomiast przegląd rozwiązań uzyskanych przez II wojnę światową dla powłok równomiernej wytrzymałości w sensie węższym podaje K. Federhofer [8].

Warunek typu (1.2) mianowicie warunek Treski-Guesta zastosował C. B. Biezeno [1]. Poszukiwał on optymalnego ukształtowania powierzchni środkowej dna kotła przy zawężeniu się do stałej grubości ścianki.

Zbliżoną problematykę poruszają prace R. A. Struble'a [24] i E. H. Browna [4]. Omówione powyżej prace dotyczą doboru optymalnej powierzchni środkowej przy stałej grubości ścianki. Równolegle rozwija się problematyka doboru grubości ścianki przy określonej powierzchni środkowej. Pierwszą jest tu praca H. Zieglera [26], której określił optymalną zmianę grubości kopuły sferycznej pod ciężarem własnym przy warunku równomiernej wytrzymałości Treski-Guesta w sensie szerszym.

W. Issler [13], [14] przeprowadził ogólną analizę istnienia rozwiązania takiego zagadnienia i zastosował warunek Hubera-Misesa dla różnych powierzchni obrotowych drugiego stopnia. P. Csonka [6] poszukiwał optymalnej grubości hiperboloidalnej wieży chłodniczej.

Z punktu widzenia optymalizacji najbardziej interesujące są prace dotyczące jednoczesnego doboru optymalnej grubości i powierzchni środkowej. Jednakże większość dotychczasowych prac ogranicza się do optymalizacji parametrycznej. G. A. Hoffinan [11], [12] dobiera optymalną grubość dna kotła i optymalne parametry powierzchni środkowej kolejno w oparciu o warunek T-G i HMM.

Podobne podejście zastosował w [23] W. S. Read, dobierając grubość i optymalne parametry pewnej powierzchni czwartego stopnia.

Podejście wariacyjne zastosował S. Łukasiewicz [19] do optymalizacji powłok poddanych obciążeniom skupionym przy warunku Treski-Guesta. Przy zastosowaniu warunku HMM, T-G lub Beltramiego, C. N. Kostem [16] zajmował się optymalizacją, z uwagi na minimum ciężaru, powłoki obciążonej ciśnieniem hydrostatycznym. Jako zmienną niezależną autor przyjął długość łuku  $s$  mierzoną wzdłuż południka powłoki. Występujące w równaniach równowagi zmienne  $r$ ,  $z$ ,  $\phi$  (rys. 1) są zatem funkcjami  $s$ . Jedyńnię jedną z tych wielkości można przyjąć jako niezależną; pozostałe dwie związane są z wybraną równaniami różniczkowymi wynikającymi z geometrii powłoki. C. N. Kostem traktuje te wielkości jako niezależne nie uwzględniając związków geometrycznych. Dodatkowo przyjęty warunek T-G w postaci  $\sigma_\phi - \sigma_\theta = \sigma_0$  nie może być spełniony w całym obszarze powłoki. Jakkolwiek autor przytacza graficzne opracowanie wyników numerycznych to poprawność sformułowania problemu w tej pracy budzi wątpliwości.

## 2. Cel obecnej pracy

Kształtowanie powłok w stanie błonowym przy spełnieniu warunków wytrzymałościowych w postaci równości prowadzi do pojęcia powłok równomiernej wytrzymałości. W literaturze, za powłoki optymalne uważane są zarówno konstrukcje określone przez równanie (1.1), jak i powłoki kształtowane w oparciu o rachunek wariacyjny przy zastosowaniu warunku wytrzymałościowego typu (1.2).

Obecna praca stawia sobie za cel analizę kilku zagadnień z zakresu optymalnego kształtowania powłok osiowo-symetrycznych, a mianowicie:

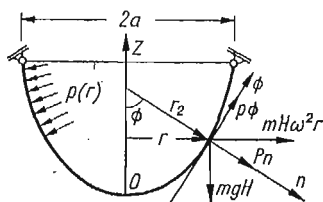
- 1) uporządkowanie klasyfikacji warunków wytrzymałościowych wykorzystywanych do kształtowania i wyraźne wyodrębnienie powłok optymalnych spośród szerszej klasy powłok równomiernej wytrzymałości nie będących na ogół konstrukcjami optymalnymi,
- 2) sformułowanie wariacyjne problemu optymalnego kształtowania powłok osiowo-symetrycznych przy dość ogólnym sposobie obciążenia reprezentowanym przez siły masowe (ciężar własny, wirowanie) i obciążenia powierzchniowe (ciśnienie),
- 3) podanie analityczno-numerycznej metody całkowania równań Eulera-Lagrange'a (wobec występowania w nich pewnych osobliwości) w przypadku ogólnym rozważonego obciążenia oraz podanie przykładów kształtów powłok optymalnych przy różnych kombinacjach obciążeń,
- 4) zbadanie problemu przy jakich obciążeniach zewnętrznych (powierzchniowych) powłoka spełniająca równanie Eulera-Lagrange'a zredukuje się do powłoki równomiernej wytrzymałości w sensie węższym (1.1) i czy taka konstrukcja może spełniać wszystkie wymagane warunki optymalności,
- 5) określenie rozkładu przemieszczeń w badanych powłokach przy dodatkowym założeniu sprężystości materiału.

## 3. Sformułowanie problemu powłok optymalnych

Rozważmy osiowo-symetryczną powłokę obciążoną ciśnieniem wewnętrznym lub zewnętrznym  $p(r)$ , ciężarem własnym oraz wirowaniem ze stałą prędkością kątową  $\omega$ . Powłoka wsparta jest na pierścieniu o zadanym promieniu  $a$ , rys. 1.

Sformułujemy problem optymalizacji powłoki jako klasyczne zagadnienie rachunku wariacyjnego. Tak więc poszukiwać będziemy minimum funkcjonału — objętość powłoki

$$(3.1) \quad V = 2\pi \int_0^a \frac{rH}{\cos \phi} dr = \min.$$



Rys. 1

przy warunkach pobocznych, w postaci dwu równań równowagi

$$(3.2) \quad H[\sigma_\phi r \dot{\phi} \cos \phi + \sigma_\theta \sin \phi - r(mg \cos \phi + \omega^2 mr \sin \phi)] - rp(r) = 0,$$

$$(3.3) \quad H(\sigma_\phi - \sigma_\theta) + r(\dot{H}\sigma_\phi + H\dot{\sigma}_\phi) + Hr(\omega^2 mr - mg \operatorname{tg} \phi) = 0$$

oraz warunku HMM równomiernej wytrzymałości w sensie szerszym

$$(3.4) \quad \sigma_\phi^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_\phi \sigma_\theta - \sigma_0^2 = 0$$

gdzie  $\frac{d}{dr} = (\cdot)$ ,  $H$ ,  $m$ ,  $g$  oznaczają odpowiednio: grubość ścianki powłoki, masę właściwą, przyspieszenie ziemskie.

Równania (3.1), (3.2), (3.3) zostały wyprowadzone w najwygodniejszym dla takiego zadania układzie współrzędnych  $(r, \phi)$ , który pozwala w porównaniu z układem współrzędnych najczęściej stosowanym  $(r, z)$ , zredukować równania rzędu drugiego do równań pierwszego rzędu ( $\dot{z} = \operatorname{tg} \phi$ ).

Wprowadzając następujące wielkości bezwymiarowe  $\varrho = \frac{r}{a}$ ,  $h = \frac{H}{a}$ ,  $v = \frac{V}{2\pi a^3}$ ,  $\bar{p}(\varrho) = \frac{p(\varrho)}{\sigma_0}$ ,  $\bar{\gamma} = \frac{mga}{\sigma_0}$ ,  $w = \frac{\omega^2 ma^2}{\sigma_0}$ ,  $s_\phi = \frac{\sigma_\phi}{\sigma_0}$ ,  $s_\theta = \frac{\sigma_\theta}{\sigma_0}$  oznaczające kolejno zmienną niezależną, grubość ścianki, objętość, ciśnienie, ciężar właściwy, kwadrat prędkości kątowej, naprężenia południkowe i obwodowe równania (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) zapiszemy w postaci

$$(3.5) \quad G_0 = v = \int_0^1 \frac{\varrho h}{\cos \phi} d\varrho,$$

$$(3.6) \quad G_1 = h[s_\phi \varrho \dot{\phi} \cos \phi + s_\theta \sin \phi - \varrho(\bar{\gamma} \cos \phi + w \varrho \sin \phi)] - \varrho \bar{p}(\varrho) = 0,$$

$$(3.7) \quad G_2 = h(s_\phi - s_\theta) + (h\dot{s}_\phi + h\dot{s}_\theta) + h\varrho(w\varrho - \bar{\gamma} \operatorname{tg} \phi) = 0,$$

$$(3.8) \quad G_3 = s_\phi^2 + s_\theta^2 - s_\phi s_\theta - 1 = 0.$$

Zagadnienie to rozwiążemy stosując metodę mnożników Lagrange'a. Nowy funkcjonał zapiszemy w formie

$$(3.9) \quad J = \int_0^1 \left( G_0 + \sum_{i=1}^3 \lambda_i G_i \right) d\varrho = \int_0^1 F^* d\varrho,$$

gdzie  $\lambda_i(\varrho)$  — mnożniki Lagrange'a, a odpowiednie równania Eulera-Lagrange'a przyjmują postać

$$(3.10) \quad \frac{\partial F^*}{\partial x_i} - \frac{d}{d\varrho} \frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}_i} = C_i,$$

gdzie  $x_i = \phi, h, s_\phi, s_\theta$ .

By wyjaśnić pojawienie się w (3.10) stałych  $C_i$  rozpatrzmy funkcjonał

$$(3.11) \quad J = \int F(x, \dot{x}, \ddot{x}) dx$$

w którym występuje zmienna niezależna i pochodne poszukiwanej funkcji. Odpowiednie

równanie Eulera-Lagrange'a po formalnym jednokrotnym scałkowaniu przyjmuje postać

$$(3.12) \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{z}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \dot{z}} = c.$$

Podstawiając do (3.11)  $\dot{z} = y$  otrzymujemy funkcjonał

$$(3.13) \quad J = \int F(x, y, \dot{y}) dx,$$

który powinien prowadzić do tej samej ekstremali.

Zapominając o różniczkowanym związku między  $y$  i  $z$  otrzymalibyśmy ekstremalę, której równanie nie da się sprowadzić do formuły (3.12) (stała  $c$  równa się zero). Łatwo to można sprawdzić na przykładzie prostego zadania o poszukiwaniu najkrótszego łuku łączącego dwa punkty. Ostatecznie więc równanie ekstremali otrzymane z (3.13) powinno mieć postać

$$(3.14) \quad \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = c.$$

Stałą  $c$  występującą w (3.12) i (3.14) należy wyznaczyć bądź to z warunków brzegowych, albo też z odpowiedniego warunku transwersalności. Ogólnie powiedzieć można, bez przeprowadzenia dowodu, iż dla funkcjonału typu (3.11) stała  $c$  jest różna od zera i winna być wyznaczona z warunków brzegowych gdy ich ilość równa jest 3 lub 4 w zależności od rzędu równania (3.12). W przypadku gdy ilość warunków brzegowych jest mniejsza lub równa 2, wówczas stałą  $c$  wyznaczmy z warunku transwersalności

$$(3.15) \quad \left. \frac{\partial F}{\partial \dot{z}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \dot{z}} \right|_{x=x_1} = 0$$

i wynosi ona zero,  $c = 0$ .

Powracając do rozpatrywanego zagadnienia dla  $x_1 = h, s_\phi, s_\theta$  otrzymujemy  $C_2 = C_3 = C_4 = 0$ . Mając na uwadze różniczkowy związek między  $z$  a  $\phi$  ( $\dot{z} = \text{tg} \phi$ ) dla  $x_1 = \phi$  w równaniu (3.10) pozostawiamy stałą  $C_1$  i równanie to będzie całką pierwszą. Stałą  $C_1$  wyznaczmy z warunku transwersalności (3.15) otrzymując  $C_1 = 0$ . Ostatecznie więc w rozważanym problemie wszystkie stałe  $C_i$  równe są zero,  $C_i = 0$ .

Po zastosowaniu równań (3.10) do (3.9), uporządkowaniu i eliminacji  $\lambda_3$  otrzymujemy następujący układ równań

$$(3.16) \quad \lambda_2 \bar{\gamma} + \dot{\lambda}_1 s_\phi \cos^3 \phi - \sin \phi = 0,$$

$$(3.17) \quad \lambda_2 [\varrho(w\varrho - \bar{\gamma} \text{tg} \phi) - s_\phi] - \dot{\lambda}_2 \varrho s_\phi + \lambda_1 [s_\phi \varrho \dot{\phi} \cos \phi + \\ + s_\theta \sin \phi - \varrho(\bar{\gamma} \cos \phi + w\varrho \sin \phi)] + \varrho / \cos \phi = 0,$$

$$(3.18) \quad \lambda_2 (2s_\phi - s_\theta) - \dot{\lambda}_2 \varrho (2s_\theta - s_\phi) + \lambda_1 [\varrho \dot{\phi} \cos \phi (2s_\theta - s_\phi) - \sin \phi (2s_\phi - s_\theta)] = 0,$$

które są podstawowymi związkami dla obu rozważanych przypadków.

#### 4. Całkowanie równań Eulera-Lagrange'a w przypadku ogólnym

Dla zadanej wartości i rozkładu ciśnienia  $\bar{p}(\varrho)$  równania (3.16), (3.17), (3.18) wraz z równaniami równowagi (3.6), (3.7) oraz warunkiem równomiernej wytrzymałości (3.8) stanowią wystarczający układ, z którego wyznaczyć można nieznanne funkcje kształtu

$\phi = \phi(\varrho)$ ,  $h = h(\varrho)$ , rozkład naprężeń  $s_\phi = s_\phi(\varrho)$ ,  $s_\Theta = s_\Theta(\varrho)$  oraz  $\lambda_1(\varrho)$  i  $\lambda_2(\varrho)$ . Powłoka określona w ten sposób będzie konstrukcją równomiernej wytrzymałości w sensie szerszym o najmniejszym ciężarze.

Funkcje  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  nie mają w rozważanym zagadnieniu wyraźnej interpretacji fizycznej i najczęściej dąży się do ich eliminacji. W obecnej pracy zdecydowano się jednak na metodę bezpośredniego całkowania. W tym celu otrzymany układ równań przekształcimy do postaci wygodnej w obranej metodzie

$$(4.1) \quad \dot{\phi} = \frac{1}{s_\phi \cos \phi} \left[ \frac{\bar{p}(\varrho)}{h} - s_\Theta \frac{\sin \phi}{\varrho} + \bar{\gamma} \cos \phi + w\varrho \sin \phi \right],$$

$$(4.2) \quad \dot{h}_\phi = h[s_\Theta - s_\phi - \varrho(w\varrho - \bar{\gamma} \operatorname{tg} \phi)],$$

$$(4.3) \quad h = n_\phi / s_\phi,$$

$$(4.4) \quad \dot{\lambda}_1 = \frac{\sin \phi - \bar{\gamma} \lambda_2}{s_\phi \cos^3 \phi},$$

$$(4.5) \quad \dot{\lambda}_2 = \frac{1}{s_\phi \cos \phi} + \lambda_1 \frac{\bar{p}(\varrho)}{h} + \frac{\lambda_2}{\varrho s_\phi} [\varrho(w\varrho - \bar{\gamma} \operatorname{tg} \phi) - s_\Theta],$$

$$(4.6) \quad \lambda_1 \left[ \varrho(\bar{\gamma} \cos \phi + w\varrho \sin \phi) - \sin \phi \left( s_\Theta + \frac{2s_\phi - s_\Theta}{2s_\Theta - s_\phi} s_\phi \right) \right] - \\ - \varrho - \lambda_2 \left[ \varrho(w\varrho - \bar{\gamma} \operatorname{tg} \phi) + \frac{2s_\phi - s_\Theta}{2s_\Theta - s_\phi} s_\phi - s_\Theta \right] = 0$$

gdzie  $n_\phi$  oznacza siłę południkową. Kryterium wytrzymałościowe pozostaje bez zmian.

Powyższy układ równań wykazuje osobliwości w punkcie  $\varrho = 0$ . By zbadać te osobliwości rozwinięto wszystkie funkcje w szeregi potęgowe w otoczeniu  $\varrho = 0$ . Okazało się, iż proste szeregi

$$(4.7) \quad s_\phi = 1 + c_1 \varrho^2 + \dots, \quad \text{lub} \quad s_\phi = -1 + c_1 \varrho^2 + \dots,$$

$$(4.8) \quad s_\Theta = 1 + c_2 \varrho^2 + \dots, \quad \text{lub} \quad s_\Theta = -1 + c_2 \varrho^2 + \dots,$$

$$(4.9) \quad h = h_0 + h_2 \varrho^2 + \dots,$$

$$(4.10) \quad \phi = \phi_1 \varrho + \phi_3 \varrho^3 + \dots,$$

$$(4.11) \quad \lambda_1 = \lambda_{10} + \lambda_{12} \varrho^2 + \dots,$$

$$(4.12) \quad \lambda_2 = \lambda_{21} \varrho + \lambda_{23} \varrho^3 + \dots,$$

$$(4.13) \quad \bar{p}(\varrho) = p_0 + p_2 \varrho^2 + \dots,$$

opisują te osobliwości, gdzie  $p_0$  i  $p_2$  znane współczynniki obciążenia. Przy rozwinięciach uwzględniono fakt, że naprężenie w zależności od sposobu obciążenia mogą być rozciągające lub ściskające.

Podstawiając (4.7 - 4.13) do związków (4.1 - 4.6) oraz do kryterium wytrzymałościowego (3.8) otrzymujemy układ 8 równań algebraicznych na 10 nieznanymi współczynnikami szeregów (różnica między liczbą niewiadomych współczynników a liczbą otrzymanych równań jest niezależna od zastosowanej ilości wyrazów szeregów i wynosi dwa). Dwa współ-

czynniki, które zasadniczo mogą być wybrane dowolnie, pozostają wstępnie nieokreślone. Okazuje się, iż najkorzystniej będzie pozostawić nieokreślone  $\phi_1$  i  $\lambda_{10}$ ; wówczas pozostałe wyrażają się następująco:

$$(4.14) \quad c_1 = -c_2 = \frac{1}{2} \left( w \mp 3\phi_1^2 - 3\phi_1 \bar{\gamma} \mp \frac{1}{2} \bar{\gamma}^2 \right),$$

$$(4.15) \quad h_0 = \mp \frac{p_0}{2\phi_1 \pm \bar{\gamma}},$$

$$(4.16) \quad h_2 = -\frac{p_0}{2(2\phi_1 \pm \bar{\gamma})} (4c_1 + w - \bar{\gamma}\phi_1),$$

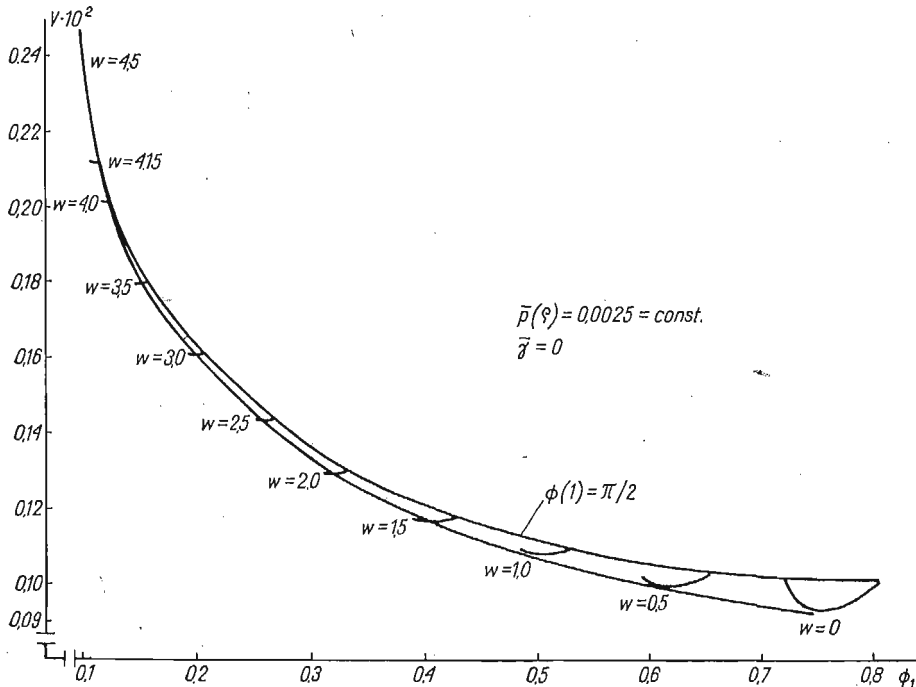
$$(4.17) \quad \phi_3 = \frac{1}{4} \left[ \frac{p_2}{p_0} (2\phi_1 \pm \bar{\gamma}) \mp \frac{1}{2} (2\phi_1 \pm \bar{\gamma}) (4c_1 + w - \bar{\gamma}\phi_1) + \frac{3}{2} \phi_1^3 \pm \phi_1 \left( \bar{\gamma} \frac{\phi_1}{2} - w \right) \right],$$

$$(4.18) \quad \lambda_{12} = \mp \frac{1}{2} \left\{ \phi_1 - \frac{1}{2} \bar{\gamma} [\lambda_{10} (2\phi_1 \pm \bar{\gamma}) \mp 1] \right\},$$

$$(4.19) \quad \lambda_{21} = \frac{1}{2} [\lambda_{10} (2\phi_1 \pm \bar{\gamma}) \mp 1],$$

$$(4.20) \quad \lambda_{23} = \frac{1}{2} \lambda_{10} \left( 2\phi_3 - \frac{1}{3} \phi_1^3 \pm 6\phi_1 c_1 \right) \mp \frac{3}{2} c_1 [\lambda_{10} (2\phi_1 \pm \bar{\gamma}) \mp 1],$$

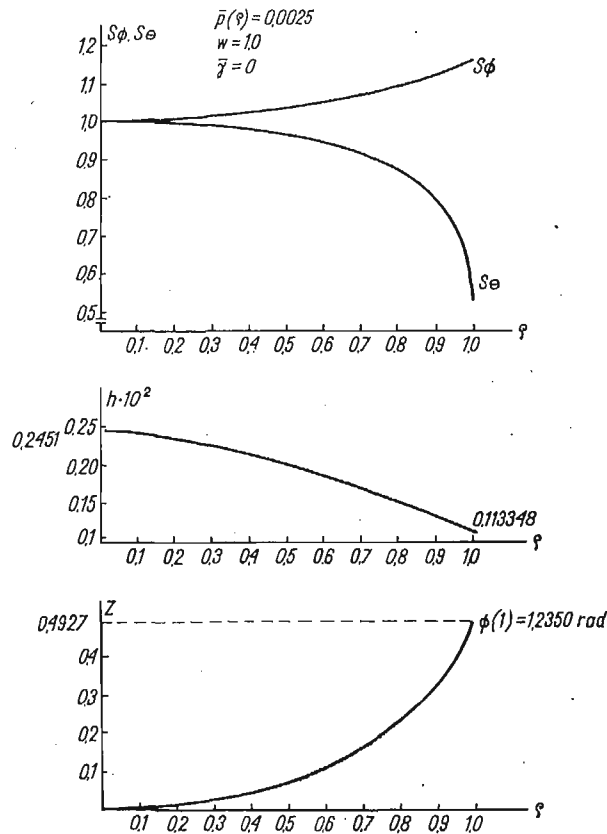
gdzie znak górny związany jest z przypadkiem naprężeń ujemnych.  $\lambda_{10}$  nie występuje w związkach (4.14 - 4.17) i nie ma wpływu na kształt powłoki optymalnej. Wniosek ten



Rys. 2

został również potwierdzony na drodze obliczeń numerycznych. Natomiast  $\phi_1$  (krzywizna powłoki dla  $\varrho = 0$ ) winno być wyznaczone z warunku optymalności  $v = \min$ . (dodatkowa optymalizacja po wolnym parametrze).

Z numerycznego punktu widzenia problem będzie rozwiązany jako zadanie początkowe. Tak więc dla przedziału  $0 \leq \varrho \leq 0.01$  zastosowano szeregi potęgowe (4.7 - 4.13). Następnie równania (4.1 - 4.5) rozwiązywano metodą Runge-Kutta 4 rzędu dla zmiennych wartości



Rys. 3

parametru  $\phi_1$ . Na każdym kroku całkowania rozwiązywano układ dwu równań algebraicznych (3.8) i (4.6) wyznaczając tym samym naprężenia  $s_\phi$  i  $s_\theta$ . Optymalną wartość parametru  $\phi_1$  dla każdej dopuszczalnej kombinacji obciążeń określono z warunku minimum objętości powłoki każdorazowo obliczając całką (3.5).

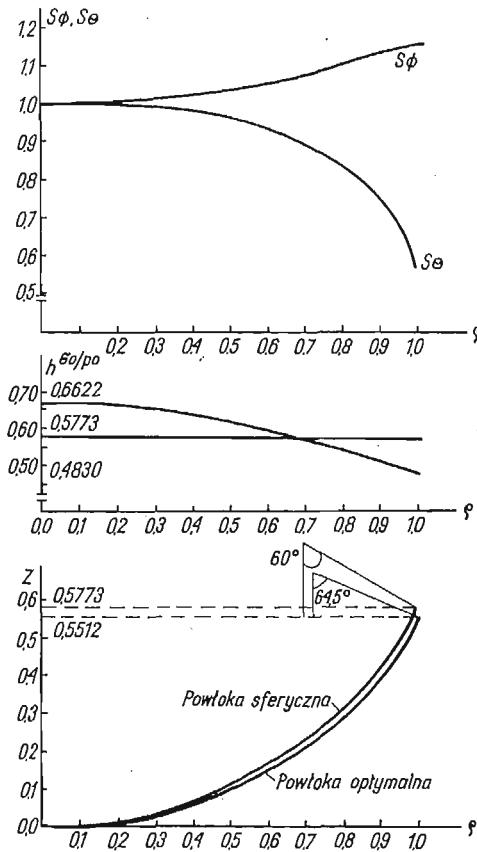
Okazuje się, iż parametr  $\phi_1$  nie może być dowolnie duży i ograniczony jest warunkiem

$$(4.21) \quad \phi(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Na rys. 2 pokazano krzywą optymalnych wartości parametru  $\phi_1$  oraz krzywą wynikającą z warunku (4.21) dla zmiennych wartości bezwymiarowej prędkości kątowej w przy  $\bar{\gamma} = 0$  i ustalonym ciśnieniu  $\bar{p}(\varrho) = 0.0025 = \text{const}$ . (zmiana wartości ciśnienia  $\bar{p}$  nie



powoduje zmiany wartości parametru  $\phi_1$ ). Dla przedziału prędkości  $0 \leq w < 4.15$  optymalna wartość parametru  $\phi_1$  pozwala osiągnąć minimum analityczne funkcjonau. Dla prędkości  $w \geq 4.15$  obie krzywe „zlewają się” i optymalne  $\phi_1$  zdeterminowane jest warunkiem (4.21). Oznacza to, iż parametr  $\phi_1$  dobierany jest na brzegu dopuszczalnego przedziału. Podobne wykresy sporządzić można dla innych kombinacji obciążeń włączających przypadki naprężeń ujemnych, jednakże wnioski pozostają niezmienione.



Rys. 4

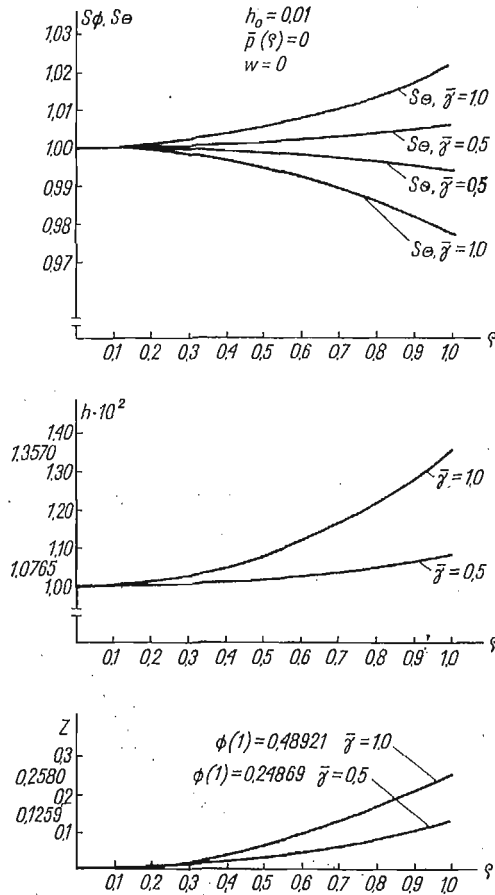
Rys. 3 przedstawia przykład powłoki optymalnej ( $w = 1.0, \bar{\gamma} = 0, \bar{p} = 0.0025$ ). Pokazano rozkład grubości ścianki oraz rozkłady naprężeń  $s_\phi$  i  $s_\theta$ . Optymalna wartość parametru  $\phi_1 = 0.505$ .

Ciekawym przykładem jest również powłoka obciążona tylko stałym ciśnieniem  $p_0$ . Okazuje się, że powłoka sferyczna o optymalnym kącie rozwarcia  $\phi_0 = \pi/3$  (stałe naprężenia  $s_\phi = s_\theta = 1$ , stała grubość ścianki) uważana do tego czasu za optymalną nie jest konstrukcją najłżejszą. Można znaleźć powłokę lżejszą, która jest optymalna, posiada zmienną grubość ścianki i zmienny rozkład naprężeń. Zysk na ciężarze, w stosunku do optymalnej powłoki sferycznej, wynosi około  $z \approx 3,8\%$ .

Rys. 4 przedstawia optymalną powłokę sferyczną oraz optymalną powłokę równo-

miernej wytrzymałości w sensie szerszym. Pokazano również odpowiednie rozkłady grubości ścianek i naprężeń dla obu powłok.

Jako dalszy przypadek obciążenia rozważymy powłokę poddaną działaniu jedynie ciężaru własnego  $\bar{\gamma}$  ( $w = p = 0$ ). Ze związku (4.15) wynika, że  $\phi_1$ , nie jest tu dowolne i wynosi  $\phi_1 = \bar{\gamma}/2$  (warunek spełnienia równania równowagi (2.6) dla  $q = 0$ ). Początkowa



Rys. 5

grubość ścianki  $h_0$  pozostaje dowolna i nie ma wpływu jakościowego na kształt powłoki optymalnej.

Na rys. 5 pokazano kształt powierzchni środkowej, zmiany grubości ścianek i rozkłady naprężeń dla dwu wybranych wartości bezwymiarowego ciężaru właściwego:  $\bar{\gamma} = 0,5$ ,  $\bar{\gamma} = 1,0$ .

##### 5. Powłoki równomiernej wytrzymałości w sensie węższym spełniające równania Eulera — Lagrange'a

Jak to wspomniano poprzednio powłoki równomiernej wytrzymałości w sensie węższym są określone jednoznacznie przez równania równowagi i kryterium wytrzymałościowe, ale w ogólności nie są one optymalne. Z drugiej strony warunek równomiernej wytrzyma-

łości w sensie szerszym jest niewystarczającym warunkiem optymalności i winien być uzupełniony równaniami Eulera-Lagrange'a.

Interesującym problemem teoretycznym jest zagadnienie kiedy powłoka optymalna może być przetransformowana do powłoki równomiernej wytrzymałości w sensie węższym (1.1) i czy taka konstrukcja pozostanie nadal optymalną. Transformacja taka może mieć miejsce przy pewnych obciążeniach zewnętrznych; tak więc poszukiwać będziemy odpowiedniej funkcji  $\bar{p}(\varrho)$ . W rozważanym przypadku  $\bar{p}(\varrho)$  będzie dodatkową nieznaną funkcją, natomiast rozkład naprężeń założymy w formie

$$(5.1) \quad s_\phi = s_\vartheta = 1 \text{ lub } s_\phi = s_\vartheta = -1.$$

Podstawiając (5.1) do (3.6), (3.7), (3.16), (3.17), (3.18) otrzymujemy układ równań, który określa nieznanne funkcje:  $\phi(\varrho)$ ,  $h(\varrho)$ ,  $\bar{p}(\varrho)$  oraz  $\lambda_1(\varrho)$  i  $\lambda_2(\varrho)$ . Układ ten przekształcimy do postaci nadającej się do numerycznego całkowania. W tym celu równania (2.17) i (2.18) odejmujemy stronami otrzymując równanie algebraiczne, które następnie różniczkujemy. Wykorzystując do eliminacji  $\dot{\lambda}_1$  i  $\dot{\lambda}_2$  równania (3.18) i (3.16) otrzymujemy

$$(5.2) \quad \dot{\phi} = \frac{\cos^2 \phi}{\varrho^2(\lambda_2 \bar{\gamma} - \sin \phi)} \left\{ \mp (\lambda_1 \sin \phi - \lambda_2) [2 \pm \varrho(w\varrho - \bar{\gamma} \operatorname{tg} \phi)] + \frac{\varrho}{\cos \phi} + \right. \\ \left. + \varrho \frac{\sin \phi - \lambda_2 \bar{\gamma}}{\cos^3 \phi} [2 \sin \phi \pm \varrho(\bar{\gamma} \cos \phi + w\varrho \sin \phi)] - \right. \\ \left. - \lambda_1 \varrho(\bar{\gamma} \cos \phi + 2w\varrho \sin \phi) + \lambda_2 \varrho(2w\varrho - \bar{\gamma} \operatorname{tg} \phi) \right\}.$$

Równanie różniczkowe określające grubość powłoki uzyskane ze związku (3.7) przybiera postać

$$(5.3) \quad \dot{h} = \pm h(w\varrho - \bar{\gamma} \operatorname{tg} \phi),$$

natomiast  $\dot{\lambda}_1$  i  $\dot{\lambda}_2$  obliczamy z równań (3.16) i (3.18)

$$(5.4) \quad \dot{\lambda}_1 = \mp \frac{\sin \phi - \lambda_2 \bar{\gamma}}{\cos^3 \phi},$$

$$(5.5) \quad \dot{\lambda}_2 = \frac{1}{\varrho} [\varrho \dot{\phi} \cos \phi - \sin \phi] + \lambda_2.$$

Pozostałe równanie równowagi (3.7) posłuży do określenia poszukiwanego rozkładu ciśnienia

$$(5.6) \quad \bar{p}(\varrho) = \mp \frac{h}{\varrho} [\varrho \dot{\phi} \cos \phi + \sin \phi \pm \varrho(\bar{\gamma} \cos \phi + w\varrho \sin \phi)].$$

Uzyskany układ równań wykazuje osobliwości dla  $\varrho = 0$ , które zbadano rozwijając wszystkie występujące tutaj funkcje w szeregi potęgowe. Jednakże, w porównaniu z poprzednim przypadkiem ze względu na specyfikę otrzymanego układu równań ( $\lambda_{23}$  i  $\phi_3$  wyrażają się przez siebie i nie ma możliwości efektywnego ich określenia), przy rozwinięciach funkcji  $\phi$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ , należy wziąć pod uwagę o jeden wyraz szeregu więcej:

$$(5.7) \quad \phi = \phi_1 \varrho + \phi_3 \varrho^3 + \phi_5 \varrho^5 + \dots,$$

$$(5.8) \quad h = h_0 + h_2 \varrho^2 + \dots,$$

$$(5.9) \quad \lambda_1 = \lambda_{10} + \lambda_{12}\varrho^2 + \lambda_{14}\varrho^4 + \dots,$$

$$(5.10) \quad \lambda_2 = \lambda_{21}\varrho + \lambda_{23}\varrho^3 + \lambda_{25}\varrho^5 + \dots,$$

$$(5.11) \quad \bar{p} = p_0 + p_2\varrho^2 + \dots,$$

Podstawiając (5.7 - 5.11) do równań (5.2 - 5.6) uzyskamy, w porównaniu z poprzednim przypadkiem, o dwa równania więcej. Pozwolą one na obliczenie  $\phi_3$  i  $\phi_{23}$ . Ostatecznie ograniczymy się do efektywnego wyznaczenia współczynników dwóch wyrazów każdego z szeregów.

Po odpowiednich przekształceniach otrzymujemy

$$(5.12) \quad \phi_3 = \frac{1}{24(2\phi_1 \pm \bar{\gamma})} (-19\phi_1^3 \mp 14\bar{\gamma}\phi_1^2 - \frac{3}{2}\bar{\gamma}^2\phi_1 \mp 12\phi_1 w - 6w\bar{\gamma}),$$

$$(5.13) \quad p_0 = \mp h_0(2\phi_1 \pm \bar{\gamma}),$$

$$(5.14) \quad p_2 = h_0 \left[ \mp 4\phi_3 \pm \frac{2}{3}\phi_1^3 + \phi_1 \left( \bar{\gamma} \frac{\phi_1}{2} - w \right) - \frac{1}{2}(2\phi_1 \pm \bar{\gamma})(w - \phi_1 \bar{\gamma}) \right],$$

$$(5.15) \quad h_2 = \pm \frac{1}{2} h_0(w - \bar{\gamma}\phi_1),$$

$$(5.16) \quad \lambda_{12} = \mp \frac{1}{2} \left\{ \phi_1 - \frac{1}{2}\bar{\gamma}[\lambda_{10}(2\phi_1 \pm \bar{\gamma}) \mp 1] \right\},$$

$$(5.17) \quad \lambda_{21} = \frac{1}{2} [\lambda_{10}(2\phi_1 \pm \bar{\gamma}) \mp 1],$$

$$(5.18) \quad \lambda_{23} = \frac{1}{2} \lambda_{10} \left( 2\phi_3 - \frac{1}{3}\phi_1^3 \right).$$

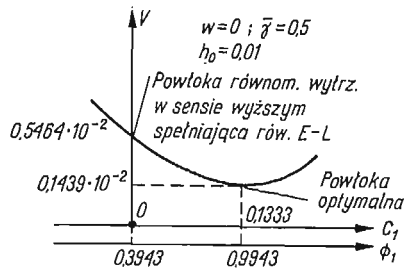
Tak jak i poprzednio  $\lambda_{10}$  pozostaje tutaj niewyznaczone i nie ma wpływu na kształt powłoki równomiernej wytrzymałości w sensie węższym, natomiast  $\phi_1$  nie jest dowolne, zdeterminowane jest tutaj warunkiem stałości naprężeń. Podstawiając do (4.14)  $c_1 = c_2 = 0$  otrzymujemy

$$(5.19) \quad \phi_1 = \frac{3\bar{\gamma} + \sqrt{3\bar{\gamma}^2 - 12w}}{6} \quad \text{lub}$$

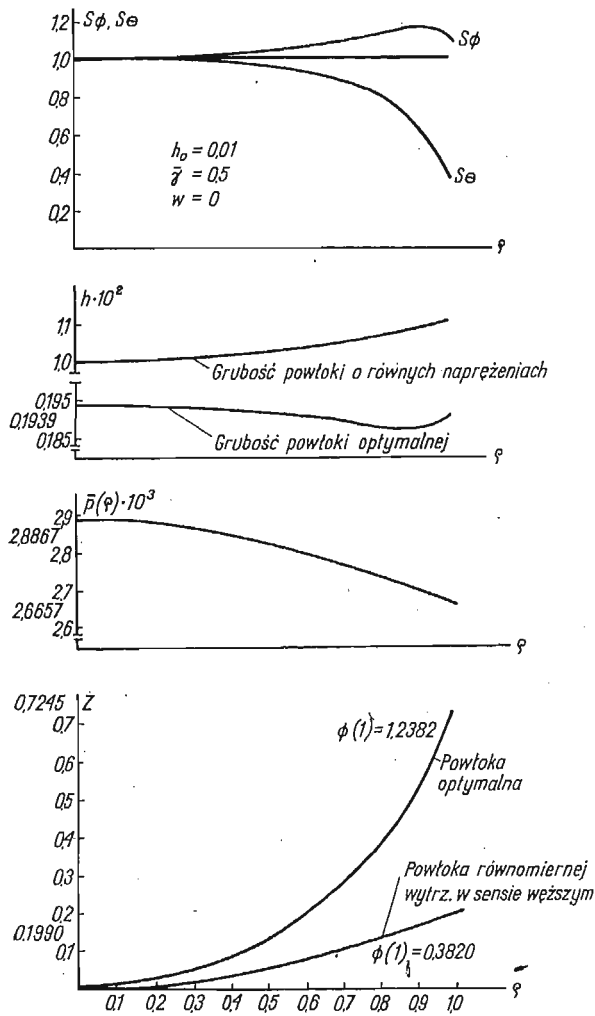
$$(5.20) \quad \phi_1 = \frac{-3\bar{\gamma} + \sqrt{3\bar{\gamma}^2 + 12w}}{6}.$$

Związek (5.19) odnosi się do przypadku naprężeń rozciągających przy czym obciążenia masowe muszą spełniać nierówność  $\bar{\gamma} > 2\sqrt{w}$ . Okazuje się również, iż pełna powłoka równomiernej wytrzymałości w sensie węższym spełniająca równania Eulera-Lagrange'a obciążona tylko „wirowaniem”  $w$  i odpowiednim ciśnieniem  $\bar{p}(\varrho)$  nie może istnieć. Możliwa jest w tym przypadku jedynie konstrukcja z otworem, która nie będzie tutaj dyskutowana.

Związek (5.20) słuszny jest dla naprężeń ujemnych przy czym albo  $\bar{\gamma} < 0$  (oznacza to, że ciężar własny wywołuje naprężenia ściskające; powłoka ma pozycję odwrotną niż pokazano to na rys. 1) lub też  $w > \frac{1}{2}\bar{\gamma}^2$ .



Rys. 6



Rys. 7

Grubość ścianki  $h_0$  dla  $\varrho = 0$  dobiera się dowolnie i jednocześnie poprzez równanie (5.13) determinuje ono wartość początkową ciśnienia  $p_0$ .

Metoda całkowania otrzymanych równań (5.2 - 5.5) jest taka jak poprzednio. Dla  $0 \leq \varrho \leq 0.01$  zastosowano szeregi (5.7 - 5.11), następnie metodą Runge-Kutta jednocześnie z równania (5.6) obliczając poszukiwane ciśnienie  $\bar{p}(\varrho)$ . Okazało się, iż dla wszystkich możliwych kombinacji obciążeń powłoka równomiernej wytrzymałości w sensie węższym spełniająca równania Eulera-Lagrange'a nie jest konstrukcją optymalną. Zawsze można znaleźć dobierając odpowiednio  $\phi_1$  z warunku transversalności, pewną inną powłokę spośród powłok równomiernej wytrzymałości w sensie szerszym, która jest powłoką optymalną wykazując mniejszy ciężar od tamtej.

Rys. 6 przedstawia zależność między objętością powłoki  $v$  i współczynnikiem  $c_1$  określającym zmiany naprężeń lub parametrem  $\phi_1$  dla szczególnego przypadku obciążenia  $w = 0$ ,  $\bar{\gamma} = 0.5$  oraz  $h_0 = 0.01$ . Pokazany typ zależności powtarza się dla wszystkich kombinacji obciążeń.

Na rys. 7 pokazano powłokę równomiernej wytrzymałości w sensie węższym oraz powłokę optymalną, odpowiednie zmiany grubości ścianek i rozkłady naprężeń. Obie powłoki obciążone są w ten sam sposób, mianowicie:  $w = 0$ ,  $\bar{\gamma} = 0.5$  oraz pokazanym na rys. 7 rozkładem ciśnienia  $\bar{p}(\varrho)$ .

Powłoki równomiernej wytrzymałości w sensie węższym są zatem konstrukcjami o większym ciężarze niż odpowiednie optymalne powłoki równomiernej wytrzymałości w sensie szerszym obliczone w oparciu o warunek HMM. Warto jednak na koniec zaznaczyć, że wniosek ten może ulec zmianie w przypadku zastosowania innego warunku wyłączenia np. hipotezy Treski-Guesta.

## 6. Przemieszczenie w powłokach równomiernej wytrzymałości

Kształty powłok i rozkłady naprężeń zostały uprzednio określone bez analizy stanu przemieszczeń. Rozkład przemieszczeń obliczony w oparciu o teorię błonową nie może wykazywać w żadnym punkcie powłoki osobliwości (zmierzania do nieskończoności). Pojawienie się bowiem takich osobliwości świadczyć by mogło o istnieniu w pewnych obszarach powłoki stanów giętych co osłabiłoby wartość uzyskanych rozwiązań.

Wykażemy tutaj, iż przemieszczenia w rozważanych powłokach nie wykazują osobliwości — są skończone. Za punkt wyjścia przyjmujemy związki geometryczne

$$(6.1) \quad \varepsilon_\phi = \left( \frac{\partial u_\phi}{\partial \varrho} + \frac{\partial \phi}{\partial \varrho} u_n \right) \cos \phi,$$

$$(6.2) \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{\varrho} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \Theta} + u_\phi \cos \phi + u_n \sin \phi \right),$$

$$(6.3) \quad \gamma_{\phi\theta} = \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \varrho} - \frac{u_\theta}{\varrho} \right) \cos \phi + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial u_\phi}{\partial \Theta},$$

gdzie  $u_\theta$ ,  $u_\phi$ ,  $u_n$  są bezwymiarowymi pomieszczeniami odpowiednio w kierunkach obwodowym, południkowym i normalnym do powierzchni środkowej powłoki.

Ze względu na osiową symetrię  $u_\theta = 0$  i  $\frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} = 0$ , stąd z równania (6.3) otrzymujemy  $\gamma_{\phi\theta} = 0$ .

Związki (6.1) i (6.2) pozwolą na obliczenie przemieszczeń  $u_\phi$ ,  $u_n$ . Po eliminacji  $u_n$  z (6.1) otrzymujemy równanie różniczkowe rzędu pierwszego na poszukiwaną funkcję  $u_\phi$

$$(6.4) \quad \frac{du_\phi}{d\varrho} - u_\phi \frac{d\phi}{d\varrho} \operatorname{ctg} \phi = \frac{\varepsilon_\phi}{\cos \phi} - \frac{\varepsilon_\theta \varrho}{\sin \phi} \frac{d\phi}{d\varrho}.$$

Całka ogólna równania jednorodnego wynosi

$$(6.5) \quad u_\phi = f \sin \phi.$$

Stosując metodę uzmienniania stałej  $f = f(\varrho)$  otrzymujemy

$$(6.6) \quad \frac{df}{d\varrho} = \frac{\varepsilon_\phi}{\cos \phi \sin \phi} - \frac{\varepsilon_\theta \varrho}{\sin^2 \phi} \frac{d\phi}{d\varrho}.$$

Stan naprężeń, a zatem i stan odkształceń określony jest na drodze numerycznej, tak więc podanie rozwiązania zamkniętego w całym obszarze powłoki nie jest możliwe.

Pewnych osobliwości w rozkładzie przemieszczeń spodziewać się można w okolicach podparcia powłoki lub też w otoczeniu punktu  $\varrho = 0$ . Założyliśmy wcześniej, iż podpory zapewniają stan błonowy (odpowiednie przemieszczenia), stąd interesującym nas obszarem będzie wierzchołek powłoki i w jego otoczeniu podamy rozkład przemieszczeń.

Korzystając z szeregów (4.7) i (4.6) oraz prawa Hooke'a (ograniczamy się do powłok sprężystych) otrzymujemy rozkłady odkształceń

$$(6.7) \quad \varepsilon_\phi = \frac{\sigma_0}{E} (1-\nu) + \frac{\sigma_0}{E} c_1 (1+\nu) \varrho^2 + \dots$$

$$(6.8) \quad \varepsilon_\theta = \frac{\sigma_0}{E} (1-\nu) - \frac{\sigma_0}{E} c_1 (1+\nu) \varrho^2 + \dots$$

Wykorzystując (6.7), (6.8) i (4.10) oraz uwzględniając dwa wyrazy szeregu, po jednokrotnym scałkowaniu (6.6) otrzymujemy

$$(6.9) \quad f = \left[ \frac{\sigma_0}{E} (1-\nu) \frac{\phi_1}{2} - 2 \frac{\phi_3}{\phi_1^2} + \frac{\sigma_0}{E} \frac{c_1}{\phi_1} (1+\nu) \right] \varrho^2 + \dots + C.$$

Równanie (6.9) wraz z (6.5) określa rozkład przemieszczeń południkowych  $u_\phi$  w otoczeniu punktu  $\varrho = 0$ . Łatwo sprawdzić, że przemieszczenia  $u_\phi$  jak i  $u_n$  są skończone w punkcie  $\varrho = 0$ , zatem nie istnieje w tym ani żadnym innym punkcie stan giętny powłoki. Wniosek ten dotyczy powłok optymalnych równomiernej wytrzymałości w sensie szerszym jak i powłok równomiernej wytrzymałości w sensie węższym.

## 7. Uwagi końcowe

Praca została zasadniczo poświęcona analizie kilku zagadnień z zakresu optymalnego kształtowania powłok osiowo symetrycznych w stanie błonowym.

Uporządkowano występującą w literaturze klasyfikację warunków wytrzymałościowych dzieląc je na dwie zasadnicze grupy, określone równaniami (1.1) i (1.2) oraz pokazano

różnice wynikające z zastosowania tych warunków. Zwrócono uwagę na konieczność wyodrębnienia powłok optymalnych równomiernej wytrzymałości spośród szerszej klasy powłok równomiernej wytrzymałości.

Problem optymalizacji powłok poddanych obciążeniom masowym i powierzchniowym sformułowano jako klasyczne zagadnienie rachunku wariacyjnego oraz zaproponowano metodę szeregów potęgowych, pozwalającą na uzyskanie rozwiązań w otoczeniu punktu osobliwego  $q = 0$ . Stwierdzono również, że powłoka optymalna kształtowana w oparciu o warunek równomiernej wytrzymałości HMH przy pewnych obciążeniach zewnętrznych, (których poszukiwano) może stać się powłoką równomiernej wytrzymałości w sensie węższym (1.1), jednakże konstrukcja taka nie spełnia wszystkich wymaganych warunków optymalności (a mianowicie warunków transversalności) i wykazuje większy ciężar od tamtej. Ostatni wniosek może ulec zmianie w przypadku zastosowania innego warunku wyężenia.

Wykazano też, że przemieszczenia w rozważanych powłokach nie wykazują osobliwości (są skończone).

Na zakończenie warto podkreślić fakt, że w stanie błonowym powłoki optymalne w zakresie sprężystym są również optymalne z uwagi na nośność graniczną, czy też czas zniszczenia przy kruchym pękaniu według teorii Kaczanowa — Hayhursta — Leckie'go.

#### Literatura cytowana w tekście

1. C. B. BIEZENO, *Bijdrage tot de berekening van ketelfronten, de Ingenieur*, 37 (1922), 781.
2. C. BRAMSKI, *Niektóre problemy obliczeń stalowych zbiorników kropłokształtnych*, XII Konf. PZITB — PAN, Krynica 1967, 349 - 357.
3. C. BRAMSKI, *Obrotowo-symetryczne zbiorniki kropłokształtne*, Zeszyty Naukowe Politechniki Białostockiej, 8, 1967.
4. E. H. BROWN, *The minimum weight design of closed shells of revolution*, Quart. J. Mech. and Appl. Math., 15 (1962), 1, 109 - 128.
5. Z. BYCHAWSKI, W. OLSZAK, *Creep failure of nonlinear rotational shells*, „8<sup>th</sup> Congress International Association for Bridge and Structural Engineering”, Publ. by Secretariat of JABSE in Zurich, New York 1968.
6. P. CSONKA, *Hyperboloid shaped cooling tower with a mantle — wall of equal strength*, Acta Techn. Acad. Sci. Hung., 44 (1963), 1 - 2, 215 - 221.
7. K. FEDERHOFER, *Über die Form des Wölbmantelbeckens*, Eisenbau 4, (1913), Heft 10.
8. K. FEDERHOFER, *Über Schalen gleicher Festigkeit*, Bauingenieur, 20, (1939), 366.
9. K. FEDERHOFER, J. KREBITZ, *Über die strenge Ermittlung der Form einer allseitig gleich gespannten Rotationsmembrane*, Eisenbau, 5 (1914), Helf 6.
10. D. R. HAYHURST, *Creep rupture under multi-axial states of stress*, J. Mech. Phys. Solids., vol. 20 (1972), 381 - 390.
11. G. A. HOFFMAN, *Minimum-weight proportions pressure vessel heads*, Trans. ASME E 29, 4 (1962), 662 - 668.
12. G. A. HOFFMAN, *Optimal proportions of pressure vessel heads*, J. Aerospace Sci., 29 (1962), 12, 1471 - 1475.
13. W. ISSLER, *Eine Kuppel gleicher Festigkeit*, Z. angew. Math., 10 (1959), 6.
14. W. ISSLER, *Membranschalen gleicher Festigkeit*, Ingen-Archiv., 33 (1969), 5, 330 - 345.
15. H. KOPECKI, J. WALCZAK, *The energy dissipation barrier as a criterion of creep failure of rotating discs*, Arch. Bud. Maszyn, 4 (1976), 23, 455 - 460.
16. C. N. KOSTEM, *Tensile optimum weight membrane containers*, IASS Pacific Symposium, October 17 - 23, 1971, Tokyo and Kyoto.



17. E. KOTTENMEIER, *Der Stahlbehälterbau*, Stahlbau, 3 (1930), 17, 49, 73.
18. F. A. LECKIE, D. R. HAYHURST, *Creep rupture of structures*, Proc. Roy. Soc. London, A 340, No 1622 (1974), 323 - 347.
19. S. ŁUKASIEWICZ, *Obciążenia skupione w płytach, tarczach i powłokach*, IPPT-PAN, PWN Warszawa, 1976.
20. G. MEGAREUS, *Die Kuppel gleicher Festigkeit*, Bauingenieur, 20 (1939), 232.
21. M. MILANKOVIĆ, *O membranama jednakog otpora*, Rad. Jugoslovenske Akademija, Zagreb, 175, (1908), 140 - 152.
22. T. PÖSCHL, *Technische Daten über tropfenförmige Mineralölbehälter*, Bauingenieur, 8 (1927).
23. W. S. READ, *Cassian domes for pressure vessels design*, Paper Amer. Soc. Mech. Eng., (1962), N, Ar-54.
24. R. A. STRUBLE, *Biezeno pressure vessel heads*, J. Appl. Mech. 23 (1956), 642 - 645.
25. F. TÖLKE, *Über Rotationsschalen gleicher Festigkeit für konstanten — Innen und Aussendruck*, Z. angew. Math. Mech., 19 (1939), 338.
26. H. ZIEGLER, *Kuppeln gleicher Festigkeit*, Ing.-Archiv, 26 (1958), 5, 378—382.
27. M. ŻYCZKOWSKI, *Optymalne kształtowanie wytrzymałościowe powłok, w pracy zbiorowej „Konstrukcje powłokowe”*, IPPT-PAN, PWN Warszawa, 1978.

## С о д е р ж а н и е

НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ ОПТИМАЛЬНОГО ФОРМИРОВАНИЯ  
ОСЕВОСИММЕТРИЧЕСКИХ БЕЗМОМЕНТНЫХ ОБОЛОЧЕК

Проблемой настоящей работы является оптимальное формирование осево-симметрических безмоментных оболочек, с довольно общими системами нагружений презентированными массовыми силами (собственный вес, вращение), а также внешнее нагружение (давление). В качестве функции цели принят объем оболочки; задача решалась при использовании классического вариационного исчисления...

Поиски решений велись в разряде оболочек равномерной прочности, выделяя два основные типы условий прочности „условия равномерной прочности в более узком смысле” (1.1), а также „условия равномерной прочности в более широком смысле” (1.2).

Опираясь на условие типа (1.2), а именно условие ГМГ приведены формы оболочек оптимальных при различных комбинациях нагружений. Исследована также проблема оболочки равномерной прочности в более узком смысле (1.1) — как конструкция оптимальная. С этой целью велись поиски внешних нагружений при которых оболочка выполняющая уравнения Эйлера-Лагранжа редуцируется к оболочке равномерной прочности в более узком смысле (1.1). Оказалось, что оболочка такого типа не выполняет всех требуемых условий оптимальности.

## S u m m a r y

SOME PROBLEMS OF OPTIMAL DESIGN OF THE AXIALLY SYMMETRICAL SHELLS IN  
MEMBRANE STATE

The paper deals with the optimal design of axially symmetrical shells in membrane state loaded by general system of loadings represented by body forces (own weight, rotation) and by external loading — pressure. As a criterion of design the minimal volume of the shell has been assumed. The problem has been formulated as a classical problem of calculus of variations.

The possible solution shawe to be found in the class of uniform strength shells. Two basic types of strength conditions have been distinguished: „condition of the uniform strength in narrower sense” (1.1) and the more general one „condition of the uniform strength in broader” (1.2).

With the aid of the HMH conditions (broader sense) the shape of the optimal shells under different system of loadings have been given.

The question, if the shell of uniform strength in narrower sense is optimal one has been examined. In order to answer this we looked for external loading which transforms the shell satisfying the Euler-Lagrange equations into the shell of the uniform strength in narrower sense (1.1). It turns out that such a shell does not satisfy all demanded conditions of optimality.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA  
INSTYTUT MECHANIKI  
I PODSTAW KONSTRUKCJI  
MASZYN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 23. lutego 1978 r.*

---