MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
2, 17 (1979)

POWIERZCHNIE GRANICZNE DLA MODELU SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNEGO PRĘTA PRZY UWZGLĘDNIENIU ZMIAN GEOMETRII

KAZIMIERZ KOWALCZYK (KRAKÓW)

1. Uwagi wstępne

W sposób analityczny efekty geometryczne uwzględniał po raz pierwszy K. JEŽEK [6], przy ocenie nośności sprężysto-plastycznych słupów. W badaniach doświadczalnych C. DYRBYE i P. Lange HANSEN [3] zwrócili uwagę na wpływ tych efektów na plastyczne zachowanie się konstrukcji (łuki kołowe).

Obecnie istnieje dość znaczna liczba prac, w których autorzy analizowali wpływ nieliniowości geometrycznych. Dotyczą one różnych przypadków konstrukcji (ramy, belki, płyty, powłoki, a także tarcze i cylindry wirujące), warunków brzegowych i materiałów. Brak natomiast badań o charakterze ogólniejszym.

Stosunkowo słabo jest opracowana teoria powierzchni granicznych na szczeblu całego ciała (np. w przestrzeni obciążeń). P. G. HODGE i C. K. SUN [5] pomijając efekty geometryczne przy przyjęciu postulatu Druckera wykazali, dla ciał idealnie sztywno-plastycznych, twierdzenie o wypukłości powierzchni granicznych i prostopadłości do nich wektora plastycznego płynięcia. G. MAIER i D. C. DRUCKER w pracy [10] nie stawiali takich ograniczeń i uwzględniali zmiany w geometrii. W tym przypadku powierzchnie graniczne mogą być wklęsłe i jest to na ogół związane z utratą stateczności konstrukcji; sformułowali oni pewne warunki (macierzowe) istnienia wklęsłości powierzchni granicznych, jednoznaczności i stateczności układu.

W obecnej pracy będziemy badać sprężysto-plastyczne zachowanie się konstrukcji geometrycznie nieliniowych. Wykażemy wpływ efektów geometrycznych na kształt i wielkość powierzchni granicznych, które obejmują szerszą klasę powierzchni, zgodnie z klasyfikacją nośności konstrukcji M. ŻYCZKOWSKIEGO [15]. Dobierzemy w tym celu odpowiedni typ konstrukcji i wykorzystamy niektóre z twierdzeń MAIERA i DRUCKERA [10]. Efektywne wyniki otrzymamy numerycznie.

2. Przyjęty model konstrukcji i założenia

Badania przeprowadzimy na modelu belki wspornikowej, składającym się z części odkształcalnej i wielokrotnie dłuższej części sztywnej, obciążonym siłami o ustalonych kierunkach rys. 1. W pracy [7] przedstawiono krótką analizę tego typu modeli konstrukcji używanych w badaniach wstępnych.

Przyjęte na rysunku zwroty P_1 i P_2 będziemy uważać za dodatnie. Konsekwentnie ten sam znak otrzyma odpowiednie przemieszczenie (i odkształcenie) wywołane działaniem wyłącznie siły P_1 lub P_2 (przy założeniu zasady zesztywnienia).

Oznaczenia wielkości bezwymiarowych

$\mu = \frac{\sigma_0}{E}$, $\eta = \frac{l}{H}$, $\varphi = \frac{L}{H}$ — parametry materiałowe i konstrukcyjne; σ_0 — granica plastyczności, E — moduł Younga,

$p_1 = \frac{P_1}{F\sigma_0}$, $p_2 = \frac{3\varphi P_2}{F\sigma_0}$ — obciążenia,

$u_1 = \frac{U_1}{l}$, $u_2 = \frac{U_2}{3\varphi l}$ — przemieszczenia,

$n = \frac{N}{FE}$, $m = \frac{M}{FEH}$ — siła podłużna i moment zginający w przekroju,

$e_0 = \frac{E\varepsilon_0}{\sigma_0}$, $k = \frac{EH\varkappa}{\sigma_0} = \frac{\alpha}{\mu\eta}$ — odkształcenie warstwy środkowej i krzywizna warstwy obojętnej,

$q = P_2$, $\omega = \operatorname{arctg}\frac{P_1}{P_2}$ — zastępcze parametry obciążenia,

$s = \frac{\sigma}{\sigma_0}$ — naprężenie,

$z = \frac{Z}{H}$, z_+, z_- — współrzędne przekroju pręta („+" uplastycznienie po stronie rozciągania, „−" po stronie ściskania).

Bezwymiarowe obciążenia zdefiniowano tak, aby osiągnięcie nośności sprężystej czystego rozciągania oraz zginania wystąpiło dla $p_1 = \pm 1$ i $p_2 = \pm 1$, przy pominięciu zmian geometrii. Odpowiednie odkształcenia wynoszą wówczas $e_0 = \pm 1$ i $k = \pm 1$, natomiast n i m oraz u_1 i u_2 przyjęto ze spełnienia zasady prac wirtualnych.

Ograniczymy się do prętów krępych w części odkształcalnej i przyjmiemy linię ugięcia w postaci łuku okręgu. Wobec tego założymy, że siły wewnętrzne N i M są w tej części belki stałe, równe odpowiednio [7]

$$N = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha N(\vartheta)\,d\vartheta, \qquad M = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha M(\vartheta)\,d\vartheta \tag{2.1}$$

i pominiemy siły poprzeczne, których wpływ na wytężenia jest tu nieznaczny. Zatem rozkład naprężeń w części odkształcalnej modelu jest niezależny od ϑ. Pozwala to na stosunkowo proste przejście w badaniach od szczebla przekroju do szczebla całego ciała.

Przyjmiemy hipotezę płaskich przekrojów i liniowy rozkład odkształceń w postaci

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varkappa Z, \qquad -H \leqslant Z \leqslant H, \tag{2.2}$$

gdzie ε_0 — odkształcenie warstwy środkowej oraz krzywiznę warstwy obojętnej zginania

$$\varkappa = \frac{\alpha}{l} \tag{2.3}$$

określono z definicji małych odkształceń, po rozwinięciu w szereg.

3. Równania podstawowe — macierz sztywności geometrycznej

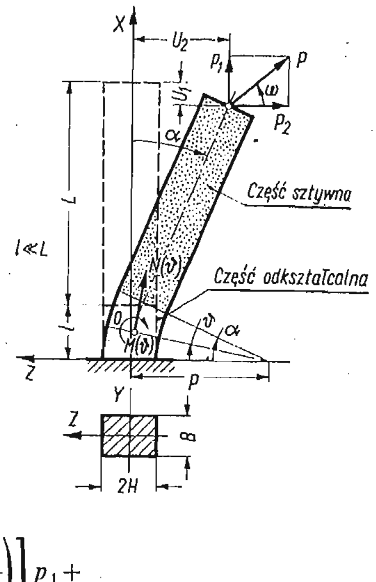
Podstawowe równania dla rozważanego układu podamy w formie rozwiniętej oraz w zapisie macierzowym. W pracy [7] przedstawiono wyprowadzenie tych równań dla ogólniejszego przypadku ze wstępną krzywizną. Ograniczymy się teraz do przytoczenia odpowiednich równań w wielkościach bezwymiarowych. Dla uproszczenia zapisu będziemy używać α zamiast k, jako jednego z parametrów odkształcenia.

Równania przemieszczeniowe

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1+\mu e_0}{\alpha}\sin\alpha - \frac{\varphi}{\eta}(1-\cos\alpha)-1, \\ u_2 &= \frac{1}{3\varphi}\left[\frac{1+\mu e_0}{\alpha}(1-\cos\alpha)+\frac{\varphi}{\eta}\sin\alpha\right]. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Po obliczeniu $N(\vartheta)$ i $M(\vartheta)$ (rys. 1) i wykorzystaniu (2.1) otrzymamy warunki równowagi

$$n = \frac{\mu\sin\alpha}{\alpha}p_1 + \frac{\mu(1-\cos\alpha)}{3\varphi\alpha}p_2,$$



Rys. 1. Przyjęty model konstrukcji — oznaczenia

$$m = -\mu\left[\varphi\sin\alpha - \frac{\eta(1+\mu e_0)}{\alpha}\left(\cos\alpha - \frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)\right]p_1 + \\ + \frac{\mu}{3\varphi}\left[\varphi\cos\alpha + \frac{\eta(1+\mu e_0)}{\alpha}\left(\sin\alpha - \frac{1-\cos\alpha}{\alpha}\right)\right]p_2. \tag{3.2}$$

Do obliczeń numerycznch szczególnie wygodne są zastępcze parametry obciążenia q i ω. Wówczas warunki (3.2) przyjmują postać

$$\begin{aligned} n &= \frac{2\mu}{3\varphi\alpha\cos\omega} q\sin\left(\omega+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}, \\ m &= \frac{\mu}{3\varphi\cos\omega} q\left\{\varphi\cos(\omega+\alpha)+\frac{\eta(1+\mu e_0)}{\alpha}\left[\sin(\omega+\alpha)-\frac{2}{\alpha}\sin\left(\omega+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Równania konstytutywne zapisane ogólnie

$$\begin{aligned} n &= n(e_0, k), \\ m &= m(e_0, k) \end{aligned} \tag{3.4}$$

można wyprowadzić w oparciu o związki fizyczne i warunki równowagi sił wewnętrznych dla poszczególnych faz pracy przekroju pręta [7].

Podamy teraz podstawowe równania w zapisie MAIERA i DRUCKERA [10], które wykorzystamy do zdefiniowania macierzy geometrycznej sztywności konstrukcji. Będą to trzy rodzaje równań, mianowicie

równanie nierozdzielności w formie przyrostowej

$$\delta \in = \mathbf{B}\delta \boldsymbol{u}, \tag{3.5}$$

gdzie $\in$ — uogólnione odkształcenia,

u — uogólnione przemieszczenia,

$\mathbf{B}$ — macierz zgodności,

równanie równowagi otrzymane z (3.5) przy wykorzystaniu zasady prac wirtualnych

$$\mathbf{B}^T\delta = \mathbf{P}, \tag{3.6}$$

gdzie σ — uogólnione siły wewnętrzne,

$\mathbf{P}$ — uogólnione obciążenia, a $\mathbf{B}^T$ oznacza transponowaną macierz $\mathbf{B}$, oraz

równanie konstytutywne w postaci przyrostowej

$$\delta\sigma = \mathbf{C}\delta \in, \tag{3.7}$$

gdzie $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$ oznacza macierz sztywności przekrojowych [13].

Przyrosty przemieszczeń możemy zapisać

$$\begin{aligned} \delta u_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial e_0}\delta e_0+\frac{\partial u_1}{\partial k}\delta k, \\ \delta u_2 &= \frac{\partial u_2}{\partial e_0}\delta e_0+\frac{\partial u_2}{\partial k}\delta k. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Po obliczeniu odpowiednich pochodnych z (3.1) i wykorzystaniu (3.5) wyznaczymy elementy macierzy $\mathbf{B}$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{11} &= \frac{1}{A_1}[\varphi\alpha^2\cos\alpha+\eta(1+\mu e_0)(\alpha\sin\alpha+\cos\alpha-1)], \\ \mathbf{B}_{12} &= \frac{3\varphi}{A_1}[\varphi\alpha^2\sin\alpha+\eta(1+\mu e_0)(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)], \\ \mathbf{B}_{21} &= -\frac{\alpha}{A_2}\sin\frac{\alpha}{2}, \\ \mathbf{B}_{22} &= \frac{3\varphi\alpha}{A_2}\cos\frac{\alpha}{2}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

gdzie oznaczono $A_1 = \mu[\varphi\alpha\sin\alpha+\eta(1+\mu e_0)(1-\cos\alpha)]$,

$$A_2 = \mu\left[\varphi\alpha\cos\frac{\alpha}{2}+\eta(1+\mu e_0)\sin\frac{\alpha}{2}\right].$$

Można następnie sprawdzić, że elementy transponowanej macierzy $\mathbf{B}^T$ w równaniu (3.6) odpowiadają współczynnikom przy n i m w odwróconych względem p_1 i p_2 warunkach równowagi (3.2). Dowodzi to poprawności uśrednienia uogólnionych sił wewnętrznych (2.1).

Przyjmiemy liniową zależność $\delta\mathbf{B}$ i $\delta\mathbf{u}$ w postaci

$$\delta\mathbf{B}^T\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{G}\delta\mathbf{u} \tag{3.10}$$

i przepiszemy równanie (3.6) w formie przyrostowej

$$\mathbf{B}^T\delta\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{G}\delta\mathbf{u} = \delta\mathbf{P}, \tag{3.11}$$

gdzie zdefiniowana równaniem (3.10) macierz $\mathbf{G}$ jest symetryczną macierzą geometrycznej sztywności konstrukcji.

W (3.10) $\delta\mathbf{B}^T$ zastąpimy przez

$$\delta\mathbf{B}^T = \frac{\partial\mathbf{B}^T}{\partial e_0}\delta e_0+\frac{\partial\mathbf{B}^T}{\partial k}\delta k \tag{3.12}$$

i podstawimy (3.5) za przyrosty odkształceń. Po porównaniu współczynników przy δu_i, po obydwu stronach każdego z równań (3.10), wyznaczymy elementy macierzy $\mathbf{G}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{G}_{11} &= \mathrm{B}_{11}\left(\frac{\partial\mathrm{B}_{11}}{\partial e_0}n+\frac{\partial\mathrm{B}_{21}}{\partial e_0}m\right)+\mathrm{B}_{21}\left(\frac{\partial\mathrm{B}_{11}}{\partial k}n+\frac{\partial\mathrm{B}_{21}}{\partial k}m\right),\\
\mathrm{G}_{12} &= \mathrm{B}_{12}\left(\frac{\partial\mathrm{B}_{11}}{\partial e_0}n+\frac{\partial\mathrm{B}_{21}}{\partial e_0}m\right)+\mathrm{B}_{22}\left(\frac{\partial\mathrm{B}_{11}}{\partial k}n+\frac{\partial\mathrm{B}_{21}}{\partial k}m\right),\\
\mathrm{G}_{21} &= \mathrm{B}_{11}\left(\frac{\partial\mathrm{B}_{12}}{\partial e_0}n+\frac{\partial\mathrm{B}_{22}}{\partial e_0}m\right)+\mathrm{B}_{21}\left(\frac{\partial\mathrm{B}_{12}}{\partial k}n+\frac{\partial\mathrm{B}_{22}}{\partial k}m\right),\\
\mathrm{G}_{22} &= \mathrm{B}_{12}\left(\frac{\partial\mathrm{B}_{12}}{\partial e_0}n+\frac{\partial\mathrm{B}_{22}}{\partial e_0}m\right)+\mathrm{B}_{22}\left(\frac{\partial\mathrm{B}_{12}}{\partial k}n+\frac{\partial\mathrm{B}_{22}}{\partial k}m\right).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Efektywne określenie wartości wyznacznika $\mathbf{G}$ wymaga jeszcze obliczenia odpowiednich pochodnych z (3.9).

Warunkiem wystarczającym statecznej pracy konstrukcji jest dodatnia półokreśloność macierzy geometrycznej sztywności [10]

$$\det\mathbf{G} \geqslant 0. \tag{3.14}$$

Nierówność (3.14) nie jest przy tym warunkiem koniecznym i nie pozwala na wyznaczenie przedziału obciążeń powodujących utratę stateczności. Dlatego (3.14) będziemy stosować jako warunek sprawdzający, używając równolegle innego warunku stateczności, który podamy w dalszej części pracy.

4. Powierzchnie graniczne w przestrzeni obciążeń

Opiszemy teraz rozgraniczenia poszczególnych faz pracy konstrukcji. Wyznaczymy odpowiednie powierzchnie, aż do wyczerpania nośności pręta lub rozpoczęcia procesów lokalnie plastycznie biernych występujących po czynnych [7]. W obecnej pracy nie przeprowadzimy szczegółowej analizy tych procesów.

Po podstawieniu odpowiednich związków konstytutywnych (3.4) do warunków równowagi (3.3) i wyrugowaniu q, otrzymamy równanie uwikłane typu

$$F(e_0, k, \omega) = 0. \tag{4.1}$$

Przy wyznaczaniu powierzchni granicznych, do równania (4.1) dołączymy stosowne warunki rozgraniczenia i przyjmiemy chwilową stałość parametru

$$\omega = \text{const}. \tag{4.2}$$

Z uwagi na symetrię rozważanego układu względem P_2, obliczenia prowadzono w przedziale

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \omega \leqslant \frac{\pi}{2}, \tag{4.3}$$

a wyniki przedstawiono graficznie w górnej połowie płaszczyzny $p_1 - p_2$.

Omówione następnie powierzchnie graniczne zachowują ważność przy dowolnych drogach obciążenia $\omega \neq$ const, pod warunkiem nie wystąpienia procesów lokalnie plastycznie biernych. Założenie (4.2) spełnia więc rolę pomocniczą i stanowi niewielkie ograniczenie ogólności badań.

Dla początkowych powierzchni neutralnych [15] (sprężystych [8]), odpowiednie warunki rozgraniczenia mają postać

$$s(\pm 1) = e_0 \pm k = \pm 1. \tag{4.4}$$

Na rys. 2 przedstawiono początkowe powierzchnie neutralne i wpływ parametrów μ, η i φ na ich kształt. Zwróćmy uwagę, że powierzchnie neutralne na części odpowiadającej dodatnim wartościom p_1 są zawsze wypukłe, natomiast na pozostałej części wklęsłe. Jest to zasadnicza różnica w stosunku do klasycznego przypadku zginania z siłą podłużną, wynikająca z uwzględnienia wpływu zmian geometrii.

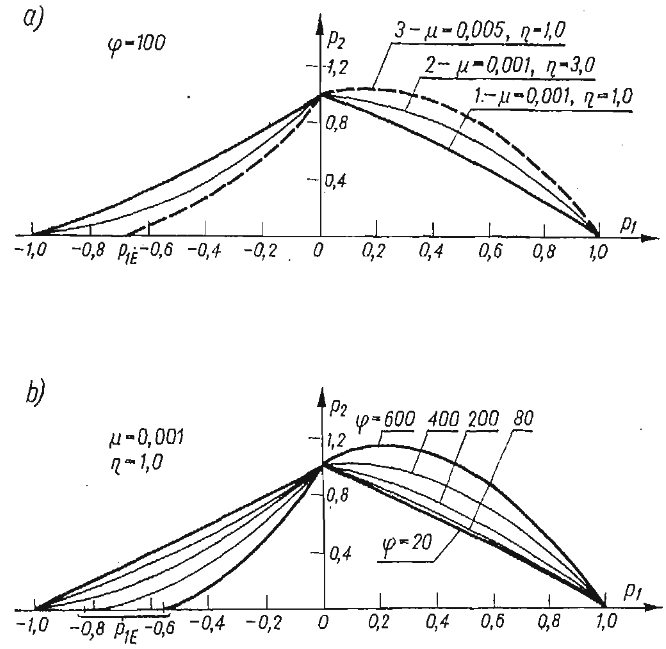
Dla dostatecznie dużych wartości μ, η, φ możliwa jest utrata stateczności konstrukcji w stanie sprężystym. Podamy wzór określający wartość odpowiedniej siły Eulera p_{1E}. Mianowicie, z dwóch rozwiązań układu równań (3.2) i (3.4), przy założeniu $p_2 = 0$ i $\alpha \to 0$, wybieramy bliższe zera

$$p_{1E} = -\frac{2}{\mu\eta\left[(3\varphi+\eta)+\sqrt{(3\varphi+\eta)^2-4}\right]}. \tag{4.5}$$

Wyboczenie wystąpi w przypadku modelu pręta o parametrach spełniających nierówności

$$\begin{aligned} 3\varphi+\eta &\geqslant 2, \\ p_{1E} &\geqslant -1 \end{aligned} \tag{4.6}$$

i dla takich wartości μ, η, φ aktualny jest wzór (4.5).



Rys. 2. Zależność kształtu początkowych powierzchni neutralnych od parametrów μ, η i φ

Dodajmy, że dla $\varphi = 0$ (model konstrukcji bez części sztywnej) i pominięciu zmiany długości osi pręta, (4.5) przechodzi w znany związek na siłę krytyczną Eulera. Różnica współczynników liczbowych $\left(3 \text{ zamiast } \frac{\pi^2}{4}\right)$ jest wynikiem niesłuszności poczynionych założeń dla smukłego pręta jednoczęściowego.

Krzywe rozgraniczenia jednostronnego i dwustronnego uplastycznienia wyznaczymy z tych samych formalnie warunków (4.4). Różnica polega na innej kolejności dobierania znaków „+" i „–". Dla obciążeń $p_1 > 0$ odpowiednia krzywa nie zamyka się (AD), natomiast dla $p_1 < 0$ pręt utraci stateczność (CE) przed osiągnięciem stanu obustronnego uplastycznienia, rys. 3a.

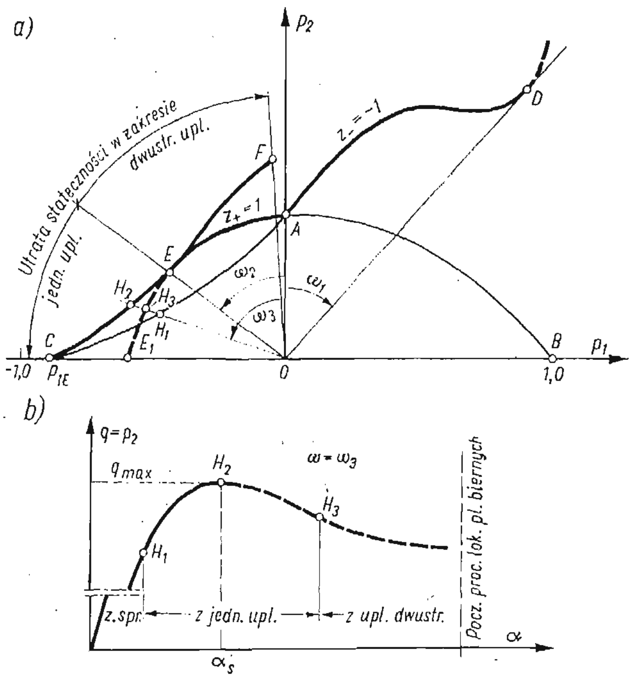
Krzywe utraty stateczności określimy z warunku

$$\frac{dq}{d\alpha} \geqslant 0, \tag{4.7}$$

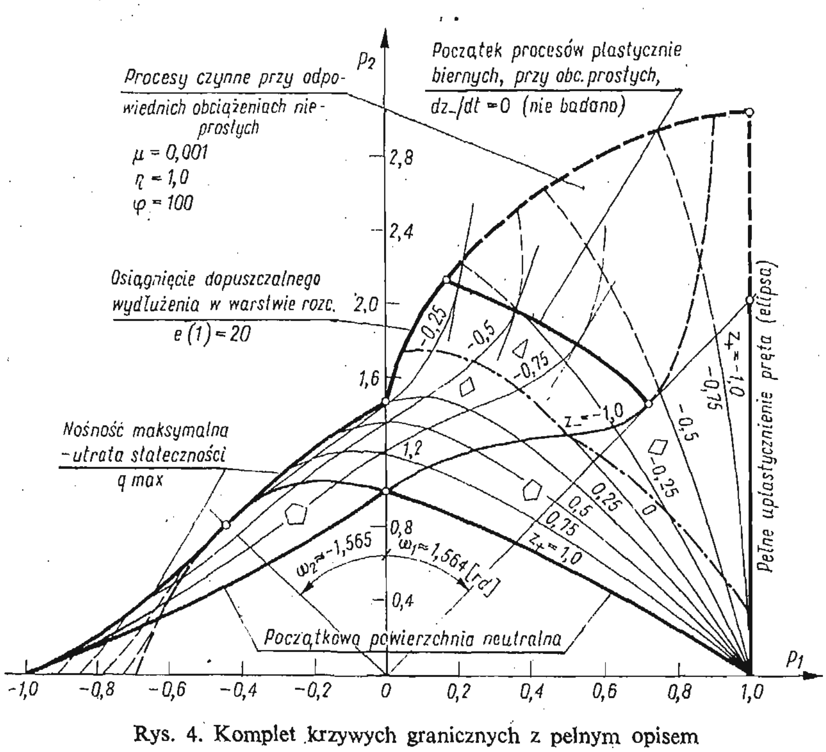
który jest aktualny jedynie dla obciążeń prostych typu (4.2); obciążenie wyznaczone z (4.7) przy spełnieniu równości będziemy nazywać nośnością maksymalną, rys. 3b.

Na nośność konstrukcji ma wpływ wiele czynników [14]. Omówione powyżej zjawiska są wynikiem wpływu efektów geometrycznych. Pierwsze badania stateczności przy uwzględnieniu zmian geometrii należą do R. HILLA [4] i E. T. ONATA [11, 12].

Należy podkreślić umowność przyjętej definicji nośności, ponieważ w niektórych przypadkach po „przeskoku" możliwe jest dalsze przenoszenie obciążenia. Również lokalne maksimum obciążenia może okazać się nieanalityczne i wówczas warunek typu (4.7) będzie niewłaściwy.



Rys. 3. Rozgraniczenie uplastycznienia jednostronnego od obustronnego i krzywe utraty stateczności oraz zależność $q(\alpha)$ przy obciążeniu prostym



Rys. 4. Komplet krzywych granicznych z pełnym opisem

Nośność rozdzielczą, odpowiadającą osiągnięciu dopuszczalnego odkształcenia w skrajnych włóknach pręta, opiszemy warunkiem

$$|e(\pm 1)| = |e_0 \pm k| \leqslant e_d. \tag{4.8}$$

Po raz pierwszy takie kryterium nośności stosowali J. DATSKO i C. T. YANG [2].

Wyczerpanie klasycznej nośności (pełne uplastycznienie pręta przez rozciąganie) wyznaczymy z warunku

$$z_+ = -1. \tag{4.9}$$

Procesy lokalnie plastycznie bierne nie pojawiają się jeżeli współrzędna z_+ będzie nierosnącą, a z_- niemalejącą funkcją czasu t. Stosowne warunki zapiszemy

$$\begin{gathered} \frac{dz_+}{dt} \leqslant 0, \\ \frac{dz_-}{dt} \geqslant 0, \end{gathered} \tag{4.10}$$

a odpowiednie krzywe początku tych procesów będziemy wyznaczać ze spełnienia równości w drugim z nich. Dodajmy, że w klasycznym przypadku zginania z siłą podłużną procesy lokalnie bierne nie pojawiają się w całym obszarze obciążeń proporcjonalnie rosnących typu (4.2).

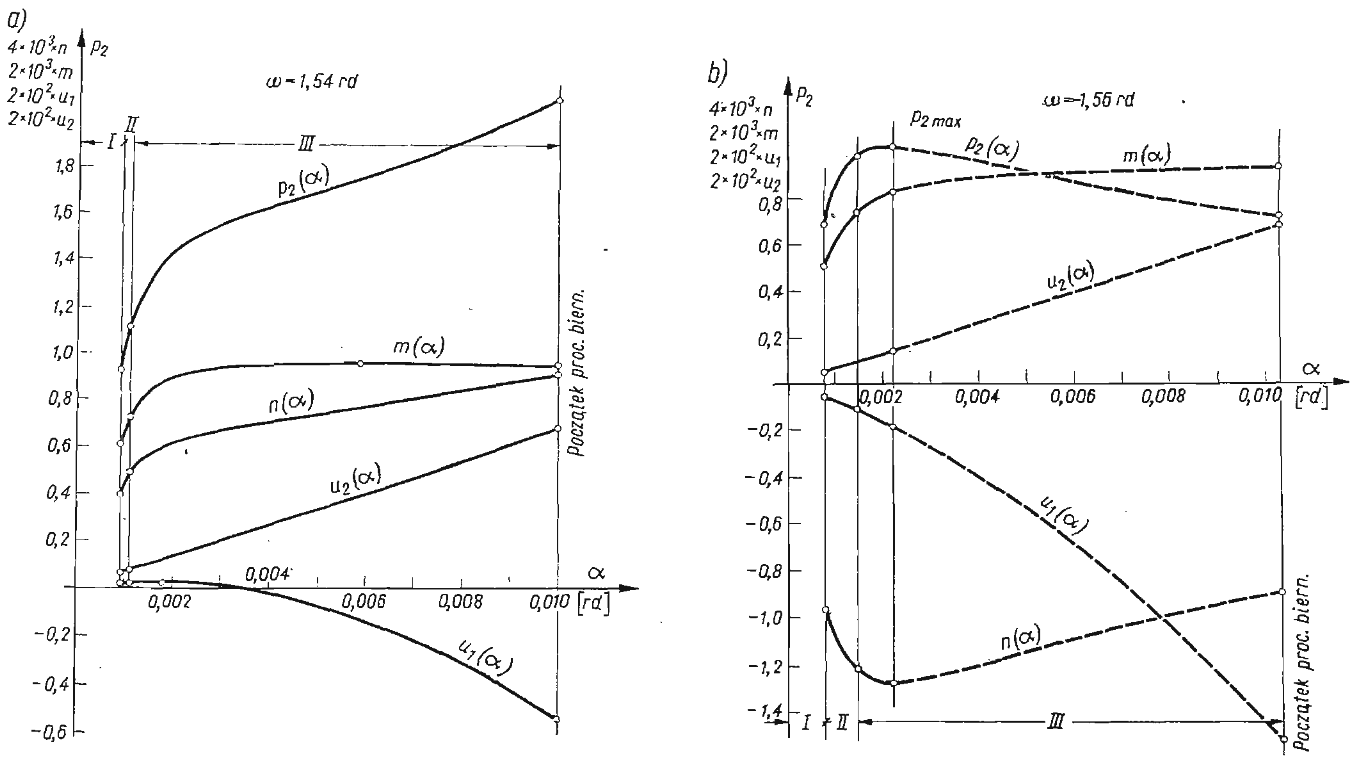
Komplet omówionych krzywych granicznych, z pełnym opisem, przedstawiono na rys. 4, na którym zaznaczono również linie stałych wartości współrzędnych uplastycznienia przekroju pręta z_+ = const i z_- = const. Pozwala to na ocenę możliwości pojawienia się procesów plastycznie biernych przy różnych drogach obciążenia.

Poza granicą początku procesów lokalnie biernych, gdzie odpowiednie krzywe opisano liniami przerywanymi, mogą zachodzić procesy czynne pod warunkiem odpowiedniego sterowania zmianami sił zewnętrznych (obciążenia nieproste).

Poszczególne obszary na rys. 4 opisano znakami, które określają kształt zmienionych powierzchni neutralnych. Będą to odpowiednio pięciokąty, czworokąty i trójkąty krzywoliniowe. Tego typu obszary analizował E. CEGIELSKI [1], przy pominięciu zmian geometrii. Wówczas modyfikowane powierzchnie mają kształt tych samych figur, lecz o bokach prostoliniowych.

Obszar obciążeń, którym w wyniku modyfikacji odpowiadają powierzchnie neutralne nieobejmujące początku układu p_1-p_2, również zależy od udziału efektów geometrycznych i może redukować się do zera dla dostatecznie dużych wartości μ, η i φ. Przy obciążeniach ω = const nie wystąpi degeneracja zmienionych powierzchni neutralnych jaką stwierdził J. A. KÖNIG [9] w przypadku geometrycznie liniowym. Modyfikacja taka (do odcinka linii prostej) może natomiast mieć miejsce dla odpowiednich obciążeń nieprostych. Szczegółowe badania zmienionych powierzchni neutralnych będą tematem oddzielnej pracy.

Na rys. 5 podano przebieg zmian niektórych parametrów w funkcji kąta ugięcia pręta. W pierwszym przypadku wykresy kończą się w miejscu rozpoczęcia procesów lokalnie biernych, natomiast w drugim wystąpi osiągnięcie nośności maksymalnej. Dalszą część wykresów, dla procesów sterowanych krzywizną pręta, opisano liniami przerywanymi.



Rys. 5. Zależność wybranych parametrów od kąta ugięcia pręta przy obciążeniach prostych

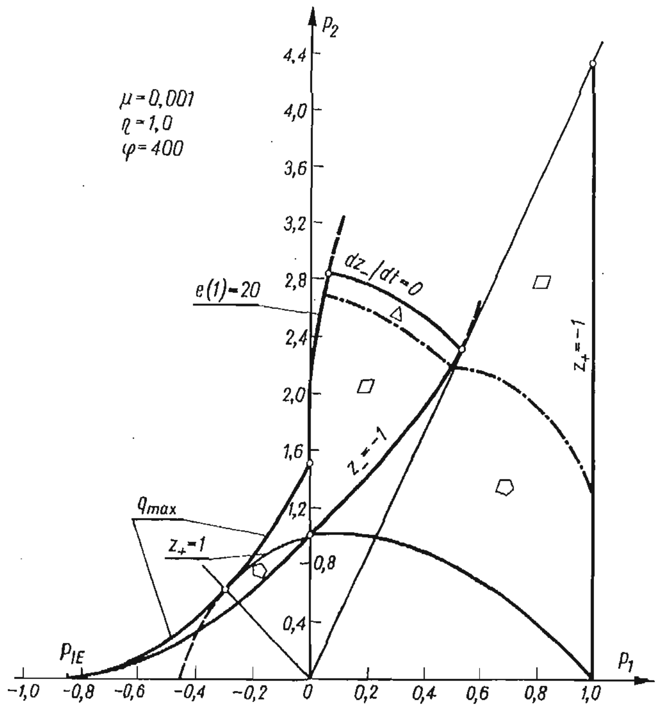
I — zakres pracy sprężystej

II — jednostronne uplastycznienie

III — obustronne uplastycznienie

W przypadku konstrukcji o większej smukłości (rys. 6) wpływ geometrycznej nieliniowości jest silniejszy. Wypukłości i wklęsłości odpowiednich krzywych są większe, a utrata stateczności występuje przy mniejszych obciążeniach, biorąc pod uwagę bezwzględne wartości. Można stwierdzić wzrost nośności po stronie dodatnich p_1 i zmniejszenie w zakresie obciążeń $p_1 < 0$.

Omówione krzywe graniczne wyznaczano numerycznie. Podobnie sprawdzano warunek stateczności Maiera i Druckera (3.14), a odpowiednie programy nie posiadają wartości poznawczych.



Rys. 6. Krzywe graniczne dla modelu pręta o dużej smukłości

5. Wnioski końcowe

Wpływ zmian geometrii zależy od parametrów konstrukcyjnych i materiałowych, a jego charakter jest stabilizujący lub destabilizujący. Pierwszy występuje przy spełnieniu (3.14) i oznacza poprawienie warunków pracy konstrukcji. Powoduje wzrost wypukłości powierzchni granicznych, pojawienie się procesów lokanie plastycznie biernych i zwiększenie nośności. Destabilizujące efekty geometryczne są przyczyną wystąpienia wklęsłych powierzchni granicznych, związanej z tym niestateczności (konstrukcyjnej) i zmniejszenia nośności.

Przytoczone uwagi wskazują potrzebę prowadzenia dalszych badań, uwzględnienia wzmocnienia plastycznego, które może zmniejszyć wpływ osłabienia geometrycznego.

Literatura cytowana w tekście

1. E. CEGIELSKI, *Modyfikowane krzywe nośności sprężystej przy zginaniu z rozciąganiem belek o przekroju prostokątnym*, Czas. Techn., Z. 4-M (1976), 24—30.
2. J. DATSKO, C. T. YANG, *Correlation of bendability of materials with their tensile properties*, Trans. ASME 4, **B 82** (1960), 309—313.
3. C. DYRBYE, P. LANGE HANSEN, *Studies on the load carrying capacities of steel structures*, Res. Lab. Build. Techn., Bull. No 3, Copenhagen 1954.
4. R. HILL, *A general theory of uniqueness and stability in elasto-plastic solids*, J. M. Phys., **6** (1958), 236—249.
5. P. G. HODGE, C. K. SUN, *General properties of yield-point load surfaces*, Trans. ASME 1, **E 35** (1968) 107—110.
6. K. JEŽEK, *Die Festigkeit von Druckstäben aus Stahl*, Springer, Wien 1937.
7. K. KOWALCZYK, *Wpływ wzmocnienia plastycznego i wstępnej krzywizny na powierzchnie graniczne dla modelu pręta geometrycznie nieliniowego*, Pr. Kom. Mech. Stos., PAN Oddz. Kraków (w druku).
8. J. A. KÖNIG, *Theory of shakedown of elastic-plastic structures*, Arch. Mech. Stos., 2, **18** (1966), 227—237.
9. J. A. KÖNIG, *A method of shake analysis of frames and arches*, Int. J. Solids and Structures, **7** (1971), 327—344.
10. G. MAIER, D. C. DRUCKER, *Effects of geometry change on essential features of inelastic behaviour*, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, **EH 4**, 99 (1973), 819—834.
11. E. T. ONAT, *The effects of non-homogeneity caused by strain-hardening on the small deformations of a rigid-plastic solid*, Proc. IUTAM Symp. Non-Homogeneity in Elasticity and Plasticity, Perg. Press 1959, 171—180.
12. E. T. ONAT, *The influence of geometry changes on the load-deformation behaviour of plastic solids*, „*Plasticity*", Proc. Sec. Symp. Naval Struct. Mech., Perg. Press 1960, 225—238.
13. А. Р. РЖАНИЦЫН, *К вопросу о мгновенной жесткости сечения*, Строит. Мех. и Расч. Сооруж. 1966/2, 7—11.
14. M. ŻYCZKOWSKI, *Obciążenia złożone w teorii plastyczności*, PWN Warszawa 1973.
15. M. ŻYCZKOWSKI, *Combined loadings in the theory of plasticity*, PWN-Noordhoff (w druku).

Резюме

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ДЛЯ МОДЕЛИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ ПРИ УЧТЕНИИ ИЗМЕНЕНИЙ ГЕОМЕТРИИ

Работа касается влияния изменений геометрии на предельные поверхности. Подобран соответствующий тип конструкции (рис. 1) и определены основные свойства этого влияния.

Стабилизационные геометрические эффекты (при исполнению условия Маиера и Друккера (3.14)) вызывают выпуклость предельных поверхностей, выступление процессов местно пластически пассивных при простых нагрузках и увеличение несущей способности.

Дестабилизационные геометрические эффекты вызывают появление вогнутых предельных поверхностей, потер устойчивости конструкции и уменьшение несущей способности.

Соответствующие поверхности вычислены нумерически.

Summary

LIMIT SURFACES FOR A MODEL OF ELASTIC-PLASTIC BAR WITH GEOMETRY CHANGES TAKEN INTO ACCOUNT

The paper is concerned with the influence of geometric effects on limit surfaces. An appropriate perfectly elastic — plastic structural model is chosen for discussion of the problem, and some features of this influence on the behaviour of the structure are demonstrated.

Stabilizing geometric effects (with Maier — Drucker's stability condition satisfied) cause an increase of the convexity of limit surfaces, locally passive processes occur in the course of simple loadings, an increase of the maximal load carrying capacity is observed.

If destabilizing geometric effects are present, the concave limit surfaces are formed; this, as a rule, leads to unstable behaviour and decreas of the maximal load carrying capacity of the structure.

INSTYTUT MECHANIKI
I PODSTAW KONSTRUKCJI MASZYN
POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 kwietnia 1978 r.