

SKRĘCANIE PRYZMATYCZNYCH PRĘTÓW JAKO CIAŁ Z WEWNĘTRZNYMI WIĘZAMI¹. I.

KRYSTYNA MAZUR-ŚNIADY (WROCLAW)

Przedstawione w niniejszej pracy liniowe techniczne teorie skręcania pryzmatycznych prętów wyprowadzone zostały na podstawie mechaniki analitycznej kontinuum materialnego [1].

Jest to oryginalny sposób podejścia do zagadnienia skręcania, nie spotykany w dotychczasowej literaturze problemu bazującej na klasycznej teorii sprężystości uzupełnionej pewnymi dodatkowymi hipotezami.

Dzięki zastosowaniu mechaniki analitycznej kontinuum materialnego przedstawione w pracy techniczne teorie skręcania są wewnętrznie niesprzeczne, podejście do nich jest jednolite, pozwalające na przejście od teorii ogólnej do szczególnych poprzez narzucenie na ruch pręta dodatkowych więzów. Pojęcie więzów pozwala przyjąć zupełnie dowolne warunki brzegowe, jak np. unieruchomienie całego przekroju podporowego oraz pozwala na konstruowanie dowolnych teorii w sposób pewny. Zastosowanie mechaniki analitycznej kontinuum materialnego pozwala na ocenę zakresu stosowalności każdej z otrzymanych teorii poprzez porównanie obliczonych dla zadanego pręta sił reakcji więzów z danymi obciążeniami zewnętrznymi.

W pierwszym rozdziale pracy przedstawia się podstawy mechaniki analitycznej kontinuum materialnego [1].

W drugim rozdziale pracy konstruuje się ogólną teorię skręcania pryzmatycznych prętów opartą na założeniu nieodkształcalności rzutów przekrojów poprzecznych pręta na płaszczyzny normalne do osi pręta. Równania omawianej teorii wyprowadza się bez narzucania ograniczeń na funkcję obrazującą spaczenie przekroju, a więc inaczej niż w literaturze, gdzie od razu tworzone szczególne teorie, w zależności od rodzaju pręta i charakteru obciążenia.

W trzecim rozdziale otrzymuje się teorię skrępowanego skręcania prętów cienkościennych o otwartych przekrojach poprzez narzucenie na ruch pręta opisany przez więzy przedstawione w rozdziale drugim dodatkowych więzów, polegających na pominięciu kątów odkształcenia postaciowego na powierzchni środkowej pręta (znane założenie Vlasova [2]).

Inne szczególne teorie skręcania oraz przykład zostaną przedstawione w drugiej części pracy o tym samym tytule.

¹⁾ Panu Profesorowi Czesławowi Woźniakowi serdeczne podziękowania za cenne wskazówki udzielone przy wykonywaniu niniejszej pracy składa autorka.

gdzie $\mathbf{n}_R = (n_j)$ jest wektorem jednostkowym zewnętrznie normalnym do powierzchni $S_R = \cup \partial B_R$, nawias podwójny prostokątny oznacza skok zawartej w nim wielkości przy przejściu przez powierzchnię S_R w kierunku wektora $-\mathbf{n}_R$, przy czym (1.5)_{2, 3} są spełnione tylko na gładkich płatach powierzchni S_R .

Zasadę prac przygotowanych można (przy założeniu odpowiedniej regularności składowych T_R) po zastosowaniu twierdzenia o divergencji zapisać w postaci zasady idealności więzów:

$$(1.6) \quad \int_{B_R} \varrho_R \mathbf{r} \cdot \delta \boldsymbol{\chi} dV_R + \int_{S_R} \mathbf{s}_R \cdot \delta \boldsymbol{\chi} d\partial_R = 0, \quad \text{dla każdego } \delta \boldsymbol{\chi} \text{ i } t,$$

Prawa zachowania wyprowadzone w punkcie 4 pracy [1] są, podobnie jak zasada idealności więzów, twierdzeniami mechaniki analitycznej kontinuum, w której jako aksjomat przyjęto zasadę prac przygotowanych (1.4). Inne, równoważne podejście podane jest w punkcie 16 pracy [1].

Można wyróżnić trzy rodzaje równań definicyjnych więzów ([1]):

1. Równania definicyjne więzów fizycznych, wyrażające te własności materiału ciała, które nie są opisywane równaniami konstytutywnymi, a także opisujące warunki podparcia ciała.
2. Równania definicyjne więzów modelowych, wyrażające pewne hipotezy odnośnie do ruchu lub odkształcenia ciała w danym problemie.
3. Równania definicyjne więzów mające tylko pomocniczy charakter, tj. nie ograniczające w istocie ruchu ciała.

Każdemu równaniu definicyjnemu więzów odpowiada pewien mnożnik Lagrange'a λ^v lub μ^q . Jak wykazano w pracy [3], mnożniki Lagrange'a odpowiadające pomocniczym równaniom definicyjnym więzów można wyrugować z równań ruchu i warunków brzegowych, wyrażając je liniowo poprzez pozostałe mnożniki Lagrange'a. Siły reakcji więzów można przedstawić w postaci

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}'(\boldsymbol{\chi}, \mathfrak{Q}, \boldsymbol{\lambda}') + \mathbf{r}''(\boldsymbol{\chi}, \mathfrak{Q}, \boldsymbol{\lambda}''), \\ \mathbf{s}_R &= \mathbf{s}'_R(\boldsymbol{\chi}, \mathfrak{Q}; \boldsymbol{\lambda}', \boldsymbol{\mu}') + \mathbf{s}''_R(\boldsymbol{\chi}, \mathfrak{Q}; \boldsymbol{\lambda}'', \boldsymbol{\mu}''), \end{aligned}$$

w której \mathbf{r}' , \mathbf{s}' , \mathbf{r}'' i \mathbf{s}'' są pewnymi operatorami liniowymi względem mnożników Lagrange'a $\boldsymbol{\lambda}' = (\lambda^v)$, $v = 1, \dots, r'$, $\boldsymbol{\mu}' = (\mu^q)$, $q = 1, \dots, s'$ odpowiadającym tylko więzom fizycznym oraz mnożników $\boldsymbol{\lambda}'' = (\lambda^v)$, $v = r'+1, \dots, r''$, $\boldsymbol{\mu}'' = (\mu^q)$, $q = s'+1, \dots, s''$, odpowiadającym tylko więzom modelowym. Jeżeli rozkład (1.7) jest jednoznaczny, wtedy układ sił $\mathbf{r}'(X, t)$, $\mathbf{s}'_R(X, t)$ nazywa się układem sił reakcji utrzymujących więzy fizyczne, natomiast układ sił $\mathbf{r}''(X, t)$, $\mathbf{s}''_R(X, t)$ układem sił reakcji utrzymujących więzy modelowe.

Ponieważ więzy modelowe w rzeczywistości nie występują w rozpatrywanym ciele (są to jedynie hipotezy dotyczące przewidywanej deformacji ciała), dlatego utrzymujący je układ sił reakcji należy interpretować jako pewien „fikcyjny” układ sił, który należy dodatkowo przyłożyć do ciała, aby deformowało się zgodnie z postulowanymi więzami modelowymi. Układ tych sił (\mathbf{r}'' , \mathbf{s}''_R) nie działa w rzeczywistości na ciała, jeżeli jednak jest on pomijalnie mały wobec układu sił ($\mathbf{r}' + \mathbf{b}$, $\mathbf{s}'_R + \mathbf{p}_R$) działających w rzeczywistości na ciała

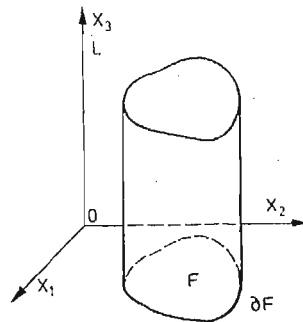
(np. jest rzędu wielkości sił, które pomijamy zestawiając obciążenia danego elementu konstrukcyjnego), to więzy modelowe zostały wprowadzone w sposób właściwy dla danego zagadnienia. Wynika stąd następujące kryterium fizycznej poprawności więzów modelowych ([1] s. 250 - 252)

$$(1.8) \quad \|(r'', s_R')\| \leq \delta \|(b + r', p_R + s_R')\|$$

gdzie $\| \dots \|$ jest normą w przestrzeni wszystkich sił działających na ciało, odpowiednio przyjętą dla danego zagadnienia oraz δ , $0 < \delta \leq 1$, jest daną a priori dopuszczalną odchyłką, charakteryzującą zakres stosowalności więzów modelowych.

2. Ogólna teoria skręcania prętów prostych

Przedmiotem rozważań jest pręt, zajmujący w konfiguracji odniesienia obszar $F \times P$, gdzie F jest jednospójnym obszarem na płaszczyźnie OX_1X_2 , ograniczonym krzywą odciwkami gładką, a P jest odcinkiem $\langle 0, L \rangle$ osi X_3 kartezjańskiego prostokątnego układu współrzędnych (rys. 2.1).



Rys. 2.1

Gęstość masy pręta oznaczmy przez $\rho_R = \rho_R(\mathbf{X})$, pole zewnętrznych obciążeń masowych $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, zaś pole zewnętrznych obciążeń powierzchniowych $\mathbf{p}_R = (p_1, p_2, p_3)$.

Równania ogólnej teorii skręcania prostych pryzmatycznych prętów wyprowadzone na podstawie mechaniki analitycznej kontinuum materialnego [1] przedstawiono w [4].

Teoria oparta jest na założeniu nieodkształcalności rzutów przekrojów poprzecznych pręta na płaszczyzny prostopadłe do osi pręta, co uzyskuje się narzucając na funkcję deformacji $\chi(\mathbf{X}, t)$ następujące więzy

$$(2.1) \quad \chi^{m,\alpha} \chi_{m,\beta} = \delta_{\alpha\beta},$$

gdzie wskaźniki greckie przebiegają ciąg 1, 2, wskaźniki łacińskie ciąg 1, 2, 3,

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & \text{dla } \alpha \neq \beta, \\ 1 & \text{dla } \alpha = \beta, \end{cases}$$

$$(\)_{,k} = \frac{\partial(\)}{\partial X_k},$$

a umowa sumacyjna dotyczy zarówno greckich jak i łacińskich wskaźników.

Łatwo zauważyć, że w ramach teorii liniowej więzy (2.1) są całkowalne względem χ . Wyrażając funkcję deformacji za pomocą wektora przemieszczenia $u = \chi - X$, otrzymuje się po linearyzacji układ równań (2.1) w postaci

$$(2.2) \quad \begin{aligned} u_{1,1} &= 0, \\ u_{1,2} + u_{2,1} &= 0, \\ u_{2,2} &= 0 \end{aligned}$$

dającej się scałkować

$$(2.3) \quad \begin{aligned} u_1 &= \psi_1 - \varphi X_2, \\ u_2 &= \psi_2 + \varphi X_1, \\ u_3 &= \zeta, \end{aligned}$$

gdzie $\varphi = \varphi(X_3, t)$, $\psi_1 = \psi_1(X_3, t)$, $\psi_2 = \psi_2(X_3, t)$, $\zeta = \zeta(X_1, X_2, X_3, t)$ są dowolnymi, niezależnymi, różniczkowalnymi funkcjami wszystkich argumentów, pełniącymi rolę współrzędnych uogólnionych. Funkcja φ jest kątem obrotu, ψ_α przesunięciami rzutu przekroju pręta na płaszczyznę OX_1X_2 , ζ stanowi funkcję spaczenia przekroju.

Należy podkreślić, że równania omawianej ogólnej teorii są wyprowadzane bez narzucania ograniczeń na funkcję deplanacji, a więc inaczej niż w literaturze, gdzie od razu konstruuje się szczególne teorie w zależności od rodzaju pręta i charakteru obciążenia.

Dla prostego pryzmatycznego pręta zasadę idealności więzów (1.6) można zapisać w postaci

$$(2.4) \quad \int_1^L \left[\int_{\partial F} s_R \cdot \delta \chi d(\partial F) + \int_F \varrho_R r \cdot \delta \chi dF \right] dX_3 + \left| \int_F s_R \cdot \delta \chi dF \right|_{\substack{X_3=0 \\ X_3=L}} = 0,$$

gdzie $\varrho_R r \equiv \varrho_R(\ddot{\chi} - b) - \text{Div } T_R$ są masowymi siłami reakcji więzów, $s_R = T_R n_R - p_R$ są brzegowymi siłami reakcji więzów, $n_R = (n_j)$ jest wektorem jednostkowym zewnętrznym normalnym do powierzchni brzegowej,

$$(\dot{\quad}) = \frac{\partial(\quad)}{\partial t}.$$

T_R jest pierwszym tensorem extra naprężenia Pioli-Kirchhoffa i wyraża reakcję materiału ciała na stan odkształcenia (1.3). Z warunku (2.4) po podstawieniu składowych przemieszczeń wirtualnych

$$\begin{aligned} \delta \chi_1 &= -\delta \varphi X_2 + \delta \psi_1, \\ \delta \chi_2 &= \delta \varphi X_1 + \delta \psi_2, \\ \delta \chi_3 &= \delta \zeta \end{aligned}$$

i zastosowaniu lematu du Bois-Reymonda otrzymuje się następujące równania ruchu:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} T^{3j} + \varrho_R b_3 &= \varrho_R \ddot{\chi}_3, \\ \varrho_{\alpha,3} + \int_{\partial F} p_\alpha d(\partial F) + \int_F \varrho_R b_\alpha dF &= \int_F \varrho_R \ddot{\chi}_\alpha dF, \\ M_{3,3} + \int_{\partial F} (p_2 X_1 - p_1 X_2) d(\partial F) + \int_F \varrho_R (b_2 X_1 - b_1 X_2) dF &= \\ &= \int_F \varrho_R (\ddot{\chi}_2 X_1 - \ddot{\chi}_1 X_2) dF, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.6) \quad \begin{aligned} Q_\alpha &\equiv \int_F T^{3\alpha} dF, \\ M_3 &\equiv \int_F (T^{23}X_1 - T^{13}X_2) dF, \end{aligned}$$

oraz następujące dynamiczne warunki brzegowe

$$(2.7) \quad \begin{aligned} T^{3\alpha}n_\alpha - p_3 &= 0 \quad \text{dla} \quad X_1, X_2 \in \partial F, \\ T^{33}n_3 - p_3 &= 0 \quad \text{dla} \quad X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L, \\ Q_\alpha n_3 - \int_F p_\alpha dF &= 0 \quad \text{dla} \quad X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L, \\ M_3 n_3 - \int_F (p_2 X_1 - p_1 X_2) dF &= 0 \quad \text{dla} \quad X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L. \end{aligned}$$

Ogranicza się rozważania do jednorodnych materiałów liniowo-sprężystych dla których płaszczyzny $X_3 = \text{const}$ (przekroje poprzeczne pręta) są płaszczyznami symetrii sprężystej. Równania konstytutywne (1.3) można zatem zapisać w postaci

$$(2.8) \quad \begin{aligned} T_{ij} &= C^{ijkl} \varepsilon_{kl}, \\ \varepsilon_{kl} &\equiv \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}) \end{aligned}$$

gdzie (C^{ijkl}) jest tensorem modułów sprężystości, przy czym, $C^{1123} = C^{1131} = C^{2223} = C^{2231} = C^{3323} = C^{3331} = C^{2312} = C^{3112} = 0$, zaś pozostałe 13 współczynników jest różnych od zera.

W rezultacie, po uwzględnieniu (2.3) otrzymuje się (2.8) w postaci

$$(2.9) \quad \begin{aligned} T^{\alpha\beta} &= T^{\beta\alpha} = C^{\alpha\beta 33} \zeta_{,3}, \\ T^{\alpha 3} &= T^{3\alpha} = C^{\alpha 313} (\zeta_{,1} + \psi_{1,3} - \varphi_{,3} X_2) + C^{\alpha 323} (\zeta_{,2} + \psi_{2,3} + \varphi_{,3} X_1), \\ T^{33} &= C^{3333} \zeta_{,3}. \end{aligned}$$

Podstawiając (2.9) do (2.5) otrzymuje się następujący układ równań — jedno różniczkowe i trzy różniczkowo-całkowe dla czterech współrzędnych uogólnionych

$$(2.10) \quad \begin{aligned} &C^{1313} \zeta_{,11} + 2C^{1323} \zeta_{,12} + C^{2323} \zeta_{,22} + C^{3333} \zeta_{,33} + \zeta_{,R} b_3 = \varrho_R \ddot{\zeta} \\ &C^{1313} \int_F \zeta_{,13} dF + C^{1323} \int_F \zeta_{,23} dF + C^{1313} F \psi_{1,33} + C^{1323} F \psi_{2,33} + \\ &\quad + (-C^{1313} S_1 + C^{1323} S_2) \varphi_{,33} + \int_{\partial F} p_1 d(\partial F) + \varrho_R \int_F b_1 dF = \varrho_R (F \ddot{\psi}_1 - S_1 \ddot{\varphi}), \\ &C^{1323} \int_F \zeta_{,13} dF + C^{2323} \int_F \zeta_{,23} dF + C^{1323} F \psi_{1,33} + C^{2323} F \psi_{2,33} + \\ &\quad + (-C^{1323} S_1 + C^{2323} S_2) \varphi_{,33} + \int_{\partial F} p_2 d(\partial F) + \varrho_R \int_F b_2 dF = \varrho_R (F \ddot{\psi}_2 + S_2 \ddot{\varphi}), \\ &-C^{1313} \int_F \zeta_{,13} X_2 dF + C^{1323} \int_F (\zeta_{,13} X_1 - \zeta_{,23} X_2) dF + C^{2323} \int_F \zeta_{,23} X_1 dF + \end{aligned}$$

$$(2.10) \quad \begin{aligned} & + (-C^{1313}S_1 + C^{1323}S_2)\psi_{1,33} + (-C^{1323}S_1 + C^{2323}S_2)\psi_{2,33} + \\ & + (C^{1313}J_1 - 2C^{1323}J_{12} + C^{2323}J_2)\varphi_{,33} + \int_{\partial F} (p_2X_1 - p_1X_2)d(\partial F) + \\ & + \varrho_R \int_F (b_2X_1 - b_1X_2)dF = \varrho_R(-S_1\ddot{\psi}_1 + S_2\ddot{\psi}_2 + J_0\ddot{\varphi}), \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.11) \quad \begin{aligned} S_1 & \equiv \int_F X_2 dF, \\ S_2 & \equiv \int_F X_1 dF, \\ J_1 & \equiv \int_F X_2^2 dF, \\ J_2 & \equiv \int_F X_1^2 dF, \\ J_{12} & \equiv \int_F X_1 X_2 dF, \\ J_0 & \equiv J_1 + J_2. \end{aligned}$$

Otrzymane w podobny sposób dynamiczne warunki brzegowe mają postać:

$$(2.12) \quad \begin{aligned} & C^{\alpha 313}n_\alpha \zeta_{,1} + C^{\alpha 323}n_\alpha \zeta_{,2} + C^{\alpha 313}n_\alpha \psi_{1,3} + C^{\alpha 323}n_\alpha \psi_{2,3} + \\ & + (C^{\alpha 323}n_\alpha X_1 - C^{\alpha 313}n_\alpha X_2)\varphi_{,3} - p_3 = 0 \quad \text{dla } X_1, X_2 \in \partial F, \\ & C^{3333}\zeta_{,3} - n_3 p_3 = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L, \\ & C^{1313} \int_F \zeta_{,1} dF + C^{1323} \int_F \zeta_{,2} dF + C^{1313} F \psi_{1,3} + C^{1323} F \psi_{2,3} + \\ & + (-C^{1313}S_1 + C^{1323}S_2)\varphi_{,3} - n_3 \int_F p_1 dF = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L, \\ & C^{1323} \int_F \zeta_{,1} dF + C^{2323} \int_F \zeta_{,2} dF + C^{1323} F \psi_{1,3} + C^{2323} F \psi_{2,3} + \\ & + (-C^{1323}S_1 + C^{2323}S_2)\varphi_{,3} - n_3 \int_F p_2 dF = 0 \quad \text{dla } X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L, \\ & -C^{1313} \int_F \zeta_{,1} X_2 dF + C^{1323} \int_F (\zeta_{,1} X_1 - \zeta_{,2} X_2) dF + C^{2323} \int_F \zeta_{,2} X_1 dF + \\ & + (-C^{1313}S_1 + C^{1323}S_2)\varphi_{1,3} + (-C^{1323}S_1 + C^{2323}S_2)\psi_{2,3} - \\ & - n_3 \int_F (p_2 X_1 - p_1 X_2) dF = 0. \end{aligned}$$

Po wyznaczeniu wielkości φ , ψ_α , ζ z równań ruchu (2.10), dynamicznych warunków brzegowych (2.12) oraz odpowiednich warunków początkowych można wyznaczyć składowe stanu przemieszczenia $u_k(X, t)$ z (2.3), składowe stanu naprężenia $T^{kl}(X, t)$ z (2.9)

oraz składowe sił reakcji więzów ze wzorów

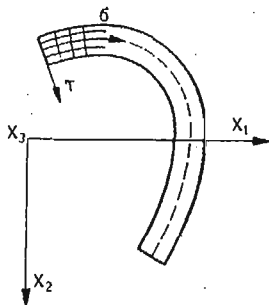
$$\begin{aligned}
 q_R r_1 &= -T^{1j}{}_{,j} - q_R b_1 + q_R (\ddot{\psi}_1 - \ddot{\varphi} X_2), \\
 q_R r_2 &= -T^{2j}{}_{,j} - q_R b_2 + q_R (\ddot{\psi}_2 + \ddot{\varphi} X_1), \\
 (2.13) \quad q_R r_3 &= -T^{3j}{}_{,j} - q_R b_3 + q_R \ddot{\zeta}, \\
 s_{Rj} &= T^{j\alpha} n_\alpha - p_j \quad \text{dla} \quad X_1, X_2 \in \partial F, X_3 \in (0, L), \\
 s_{Rj} &= T^{j3} n_3 - p_j \quad \text{dla} \quad X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L.
 \end{aligned}$$

Więzy (2.1) są więzami modelowymi. Porównanie sił reakcji tych więzów (2.13) z obciążeniami zewnętrznymi za pomocą (1.8) pozwala oszacować błąd otrzymanego rozwiązania w stosunku do rozwiązania ścisłego.

3. Skręcanie prętów cienkościennych o otwartych przekrojach

W niniejszym rozdziale wyprowadza się na podstawie mechaniki analitycznej kontinuum materialnego [1] równania liniowej teorii skrępowanego skręcania prętów cienkościennych [4], przyjmując założenia V. Z. VLASOWA [2].

Przedmiot rozważań stanowi cienkościenny pręt o dowolnym otwartym przekroju poprzecznym (rys. 3.1), o gęstości masy $q_R(X)$, obciążony polem zewnętrznych obciążeń masowych $b = (b_1, b_2, b_3)$ oraz polem zewnętrznych obciążeń powierzchniowych $p_R = (p_1, p_2, p_3)$.



Rys. 3.1

Na ruch pręta narzuca się oprócz więzów (2.1), dodatkowe więzy wewnętrzne, polegające na pominięciu kątów odkształcenia postaciowego na powierzchni środkowej pręta cienkościennego (tj. na powierzchni $\tau = 0$) zawartych między śladami płaszczyzn parametrycznych $X_3 = \text{const}$ i $\sigma = \text{const}$.

W ramach teorii infinytezymalnej hipotezę tę można przedstawić w postaci

$$(3.1) \quad \frac{\partial u_\sigma}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial \sigma} = 0.$$

Całkując powyższą równość względem współrzędnej σ oraz uwzględniając (2.3) otrzymuje się:

$$(3.2) \quad u_3 = \zeta = \zeta_0 - \psi_{1,3} X_1 - \psi_{2,3} X_2 - \varphi_{,3} \omega,$$

gdzie $\zeta_0 = \zeta_0(x_0, \cdot)$ jest nową współrzędną uogólnioną a

$$(3.3) \quad \omega = \omega(\sigma, \tau) = \int_0^\sigma \left[X_1 \frac{\partial X_2}{\partial \sigma} - X_2 \frac{\partial X_1}{\partial \sigma} \right]_{\tau=0} d\sigma + \tau \left[X_2 \frac{\partial X_2}{\partial \sigma} + X_1 \frac{\partial X_1}{\partial \sigma} \right]_{\tau=0}$$

jest współrzędną wycinkową.

W ten sposób zagadnienie teorii prętów cienkościennych sprowadza się do zagadnienia ciała z więzami wewnętrznymi, przedstawionymi przy pomocy czterech niezależnych współrzędnych uogólnionych $\varphi, \psi_1, \psi_2, \zeta_0$ będących funkcjami współrzędnej X_3 i czasu t .

W wyniku narzucenia dodatkowych więzów powstają dodatkowe siły reakcji więzów, które wprowadza się do równań ruchu (2.5)

$$(3.4) \quad \begin{aligned} T^{3j} + \varrho_R b_3 + r_\zeta &= \varrho_R \ddot{\chi}_3, \\ Q_{\alpha,3} + \int_{\partial F} p_\alpha d(\partial F) + \int_F \varrho_R b_\alpha dF + r_{\psi_\alpha} &= \int_F \varrho_R \ddot{\chi}_\alpha dF, \\ M_{3,3} + \int_{\partial F} (p_2 X_1 - p_1 X_2) d(\partial F) + \int_F \varrho_R (b_2 X_1 - b_1 X_2) dF + \\ &+ r_\varphi = \int_F \varrho_R (\ddot{\chi}_2 X_1 - \ddot{\chi}_1 X_2) dF, \end{aligned}$$

oraz do warunków brzegowych (2.7)

$$(3.5) \quad \begin{aligned} T^{3\alpha} n_\alpha - p_3 &= S_\zeta \quad \text{dla } X_1, X_2 \in \partial F, \\ T^{33} n_3 - p_3 &= S_\zeta \quad \text{dla } X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L, \\ Q_{\alpha} n_3 - \int_F p_\alpha dF &= S_{\psi_\alpha} \quad \text{dla } X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L, \\ M_{3} n_3 - \int_F (p_2 X_1 - p_1 X_2) dF &= S_\varphi \quad \text{dla } X_3 = 0 \text{ i } X_3 = L. \end{aligned}$$

Wykorzystując zasadę idealności (1.6) dla więzów dodatkowych

$$(3.6) \quad \int_0^L \left(\int_{\partial F} S_\zeta \delta \zeta d(\partial F) + \int_F r_\zeta \delta \zeta dF + r_{\psi_1} \delta \psi_1 + r_{\psi_2} \delta \psi_2 + r_\varphi \delta \varphi \right) dX_3 + \\ + \left| \int_F S_\zeta \delta \zeta dF + s_{\psi_1} \delta \psi_1 + s_{\psi_2} \delta \psi_2 + s_\varphi \delta \varphi \right|_{X_3=0 \text{ i } X_3=L} = 0,$$

podstawiając za $\delta \zeta = \delta \zeta_0 - X_1 \delta \psi_{1,3} - X_2 \delta \psi_{2,3} - \omega \delta \varphi_3$, oraz stosując lemat du Bois-Reymonda otrzymuje się następujące równania ruchu

$$(3.7) \quad \begin{aligned} Q_{,3} + \int_{\partial F} p_3 d(\partial F) + \int_F \varrho_R b_3 &= \int_F \varrho_R \ddot{\chi}_3 dF, \\ M_{\alpha,33} + \int_{\partial F} (p_{3,3} X_\alpha + p_\alpha) d(\partial F) + \int_F [(\varrho_R b_3)_{,3} X_\alpha + \varrho_R b_\alpha] dF &= \\ &= \int_F [(\varrho_R \ddot{\chi}_3)_{,3} X_\alpha + \varrho_R \ddot{\chi}_\alpha] dF, \\ M_{,3} + M_{\omega,33} + \int_{\partial F} (p_{3,3} \omega - p_1 X_2 + p_2 X_1) d(\partial F) + \end{aligned}$$

$$(3.7) \quad + \int_F [(\varrho_R b_3)_{,3} \omega - \varrho_R (b_1 X_2 - b_2 X_1)] dF = \int_F [(\varrho_R \ddot{\chi}_3)_{,3} \omega + \\ \text{[cd]} \quad + \varrho_R (-\ddot{\chi}_1 X_2 + \ddot{\chi}_2 X_1)] dF,$$

oraz równania konstytutywne dla uogólnionych sił

$$(3.8) \quad Q \equiv \int_F T^{33} dF, \\ M_\alpha \equiv \int_F T^{33} X_\alpha dF, \quad \alpha = 1, 2, \\ M \equiv \int_F [T^{23}(X_1 - \omega_{,2}) - T^{13}(X_2 + \omega_{,1})] dF, \\ M_\omega \equiv \int_F T^{33} \omega dF.$$

W analogiczny sposób otrzymuje się dynamiczne warunki brzegowe, które obowiązują na skrajnych przekrojach ($X_3 = 0$ i $X_3 = L$)

$$(3.9) \quad Q_\alpha n_3 - \int_F p_3 dF = 0, \\ M_\alpha n_3 - \int_F p_3 X_\alpha dF = 0, \\ M_\omega n_3 - \int_F p_3 \omega dF = 0, \\ M_{\alpha,3} + \int_F \varrho_R b_3 X_\alpha dF + \int_{\partial F} p_3 X_\alpha d(\partial F) - n_3 \int_F p_\alpha dF - \int_F \varrho_R \ddot{\chi}_3 X_\alpha dF = 0, \\ M_{\omega,3} + M + \int_F \varrho_R b_3 \omega dF + \int_{\partial F} p_3 \omega d(\partial F) - n_3 \int_F (p_2 X_1 - p_1 X_2) dF - \\ - \int_F \varrho_R \ddot{\chi}_3 \omega dF = 0.$$

Ogranicza się rozważania do jednorodnych materiałów liniowo-sprężystych, dla których płaszczyzny $X_3 = \text{const}$ (przekroje pręta) są płaszczyznami symetrii sprężystej (2.9), co po uwzględnieniu (3.2) daje konstytutywne równania materiału w postaci

$$(3.10) \quad T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha} = C^{\alpha\beta 33} (\zeta_{0,3} - \psi_{1,33} X_1 - \psi_{2,33} X_2 - \varphi_{,33} \omega), \\ T^{\alpha 3} = T^{3\alpha} = [C^{\alpha 313} (-X_2 - \omega_{,1}) + C^{\alpha 323} (X_1 - \omega_{,2})] \varphi_{,3}, \\ T^{33} = C^{3333} (\zeta_{0,3} - \psi_{1,33} X_1 - \psi_{2,33} X_2 - \varphi_{,33} \omega).$$

Po podstawieniu (3.10) do (3.8) otrzymuje się uogólnione siły w postaci

$$(3.11) \quad Q \equiv C^{3333} (\zeta_{0,3} F - \varphi_{,33} S_\omega), \\ M_1 \equiv C^{3333} (-\psi_{1,33} J_{12} - \psi_{2,33} J_1 - \varphi_{,33} S_{\omega 1}), \\ M_2 \equiv C^{3333} (-\psi_{1,33} J_2 - \psi_{2,33} J_{12} - \varphi_{,33} S_{\omega 2}), \\ M \equiv \varphi_{,3} \left[C^{1313} \int_F (X_2 + \omega_{,1})^2 dF - 2C^{1323} \int_F (X_2 + \omega_{,1}) (X_1 - \omega_{,2}) dF + \right. \\ \left. + C^{2323} \int_F (X_1 - \omega_{,2})^2 dF \right], \\ M_\omega = C^{3332} (\zeta_{0,3} S_\omega - \psi_{1,33} S_{\omega 2} - \psi_{2,33} S_{\omega 1} - \varphi_{,33} J_\omega),$$

gdzie

$$\begin{aligned} S_{\omega} &\equiv \int_F \omega dF, \\ S_{\omega_1} &\equiv \int_F \omega X_2 dF, \\ S_{\omega_2} &\equiv \int_F \omega X_1 dF, \\ J_{\omega} &\equiv \int_E \omega^2 dF, \end{aligned}$$

natomiast równania ruchu (3.7) w postaci układu czterech sprzężonych równań różniczkowych

$$\begin{aligned} &C^{3333}(F\zeta_{0,33}^* - S_2\psi_{1,333} - S_1\psi_{2,333} - S_{\omega}\varphi_{,333}) + \int_{\partial F} p_3 d(\partial F) + \\ &\quad + \varrho_R \int_F b_3 dF = \varrho_R(F\ddot{\zeta}_{0,3} - S_2\ddot{\psi}_{1,3} - S_1\ddot{\psi}_{2,3} - S_{\omega}\ddot{\varphi}_{,3}), \\ &C^{3333}(S_2\zeta_{0,333} - J_2\psi_{1,3333} - J_{12}\psi_{2,3333} - S_{\omega_2}\varphi_{,3333} + \\ &\quad + \int_{\partial F} (p_{3,3}X_1 + p_1)d(\partial F) + \varrho_R \int_F (b_{3,3}X_1 + b_1)dF = \varrho_R(S_2\ddot{\zeta}_{0,3} - J_2\ddot{\psi}_{1,33} - \\ &\quad - J_{12}\ddot{\psi}_{2,33} - S_{\omega_2}\ddot{\varphi}_{,33} - S_1\ddot{\varphi}_{,3} + F\ddot{\psi}_1), \\ &C^{3333}(S_1\zeta_{0,333} - J_{12}\psi_{1,3333} - J_1\psi_{2,3333} - S_{\omega_1}\varphi_{,333}) + \\ &\quad + \int_{\partial F} (p_{3,3}X_2 + p_2)d(\partial F) + \varrho_R \int_F (b_{3,3}X_2 + b_2)dF = \varrho_R(S_1\ddot{\zeta}_{0,3} - J_{12} \\ &\quad \ddot{\psi}_{1,3} - J_1\ddot{\psi}_{2,33} - S_{\omega_1}\ddot{\varphi}_{,33} + S_2\ddot{\varphi}_{,3} + F\ddot{\psi}_2), \\ &C^{3333}(S_{\omega}\zeta_{0,333} - S_{\omega_2}\psi_{1,3333} - S_{\omega_1}\psi_{2,3333} - J_{\omega}\varphi_{,3333}) + \\ &\quad + GJ_D\varphi_{,33} + \int_{\partial F} (p_{3,3}\omega + p_2X_1 - p_1X_2)d(\partial F) + \\ &\quad + \varrho_R \int_F (b_{3,3}\omega + b_2X_1 - b_1X_2)dF = \varrho_R(S_{\omega}\ddot{\zeta}_{0,3} - S_{\omega_2}\ddot{\psi}_{1,33} - \\ &\quad - S_{\omega_1}\ddot{\psi}_{2,33} - J_{\omega}\ddot{\varphi}_{,33} + J_0\ddot{\varphi}_{,3} - S_1\ddot{\psi}_1 + S_2\ddot{\psi}_2), \end{aligned} \tag{3.12}$$

gdzie

$$\begin{aligned} &GJ_D \equiv C^{1313} \int_F (X_2 + \omega_{,1})^2 dF - 2C^{1323} \int_F (X_1 - \omega_{,2})(X_2 + \omega_{,1}) dF + \\ &\quad + C^{2323} \int_F (X_1 - \omega_{,2})^2 dF. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Warunki brzegowe (3.9) dla przekrojów $X_3 = 0$ i $X_3 = L$, po uwzględnieniu (3.11) przyjmują postać

$$\begin{aligned}
C^{3333}(F\zeta_{0,3} - S_2\psi_{1,33} - S_1\psi_{2,33} - S_\omega\varphi_{,33}) - n_3 \int_F p_3 dF &= 0, \\
C^{3333}(S_2\zeta_{0,3} - J_2\psi_{1,33} - J_{12}\psi_{2,33} - S_{\omega 2}\varphi_{,33}) - n_3 \int_F p_3 X_1 dF &= 0, \\
C^{3333}(S_1\zeta_{0,3} - J_{12}\psi_{1,33} - J_1\psi_{2,33} - S_{\omega 1}\varphi_{,33}) - n_3 \int_F p_3 X_2 dF &= 0, \\
C^{3333}(S_\omega\zeta_{0,3} - S_{\omega 2}\psi_{1,33} - S_{\omega 1}\psi_{2,33} - J_\omega\varphi_{,33}) - n_3 \int_F p_3 \omega dF &= 0, \\
C^{3333}(S_2\zeta_{0,33} - J_2\psi_{1,333} - J_{12}\psi_{2,333} - S_{\omega 2}\varphi_{,333}) + \varrho_R \int_F b_3 X_1 dF + \\
(3.14) \quad + \int_{\partial F} p_3 X_1 d(\partial F) - n_3 \int_F p_1 dF &= \varrho_R(S_2\ddot{\zeta}_0 - J_2\ddot{\psi}_{1,3} - J_{12}\ddot{\psi}_{2,3} - S_{\omega 2}\ddot{\varphi}_{,3}), \\
C^{3333}(S_1\zeta_{0,33} - J_{12}\psi_{1,333} - J_1\psi_{2,333} - S_{\omega 1}\varphi_{,333}) + \varrho_R \int_F b_3 X_2 dF + \\
+ \int_{\partial F} p_3 X_2 d(\partial F) - n_3 \int_F p_2 dF &= \varrho_R(S_1\ddot{\zeta}_0 - J_{12}\ddot{\psi}_{1,3} - J_2\ddot{\psi}_{2,3} - S_{\omega 1}\ddot{\varphi}_{,3}), \\
C^{3333}(S_\omega\zeta_{0,33} - S_{\omega 2}\psi_{1,333} - S_{\omega 1}\psi_{2,333} - J_\omega\varphi_{,333}) + GJ_D\varphi_{,33} + \\
+ \varrho_R \int_F b_3 \omega dF + \int_{\partial F} p_3 \omega d(\partial F) - n_3 \int_F (p_2 X_1 - p_1 X_2) dF &= \\
= \varrho_R(S_\omega\ddot{\zeta}_0 - S_{\omega 2}\ddot{\psi}_{1,3} - S_{\omega 1}\ddot{\psi}_{2,3} - J_\omega\ddot{\varphi}_{,3}).
\end{aligned}$$

Po wyznaczeniu współrzędnych uogólnionych φ , ψ_α , ζ_0 z równań ruchu (3.12), dynamicznych warunków brzegowych (3.14) oraz odpowiednich warunków początkowych można wyznaczyć składowe stanu przemieszczenia $u_\alpha(X, t)$ z (2.3) i $u_3(X, t)$ z (3.2), składowe stanu naprężenia $T^{kl}(X, t)$ z (3.10) oraz dodatkowe siły reakcji więzów ze wzorów (3.4) i (3.5).

Należy przypomnieć, że oprócz dodatkowych sił reakcji więzów występują takie siły reakcji więzów wyrażone wzorami (2.13), w których T^{ij} oblicza się z (2.9), a współrzędne uogólnione ζ , ψ_1 , ψ_2 , φ stanowią rozwiązanie układu równań (2.10) wraz z warunkami brzegowymi (2.12) i warunkami początkowymi.

Otrzymany opisaną wyżej metodą układ równań (3.12) można porównać, przy założeniu, że materiał ciała jest jednorodny i izotropowy, z układem równań ruchu prętów cienkościennych o przekrojach otwartych, otrzymanym przez V. Z. Vlasova w [2], s. 448 - 452. Całkowita zgodność obu podejść zachodzi, gdy obliczamy współrzędną wycinkową zmieniającą się na grubości przekroju pręta — w niniejszej pracy według wzoru (3.3) a w pracy [2] jak na s. 189. Wyrażenie GJ_D (3.13) jest wówczas, tak jak u V. Z. Vlasowa, sztywnością przekroju pręta cienkościennego przy skręcaniu.

Dzięki zastosowanemu w niniejszej pracy podejściu porównanie sił reakcji więzów (2.13), (3.4) i (3.5) z obciążeniami zewnętrznymi za pomocą (1.8) pozwala oszacować błąd otrzymanego rozwiązania w stosunku do rozwiązania ścisłego.

Literatura cytowana w tekście

1. CZ. WOŹNIAK, *Wstęp do mechaniki analitycznej kontinuum materialnego*, (w:) Dynamika układów sprężystych (praca zbiorowa), Wrocław 1976.
2. V. Z. VLASOV, *Tonkostiennyje uprugije stierżni*, Moskva 1959.
3. H. STOLARSKI, *On the problem of real and imaginary reaction forces in constrained continuum mechanics*, Bull. Acad. Polon. Sci., sci. techn. (w druku).
4. K. MAZUR-ŚNIADY, *Some problems of torsion of prismatic rods as bodies with internal constraints*, Bull. Acad. Polon. Sci., sci. techn., 22, 1974.

Резюме

КРУЧЕНИЕ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ КАК ТЕЛ
С ВНУТРЕННИМИ СВЯЗЯМИ. I.

Темой работы является вывод некоторых технических теорий кручения призматических стержней на основе механики тел с внутренними связями [1]. Получается общую теорию кручения основанную на гипотезе недеформируемости проекций сечений стержня на плоскости перпендикулярные к оси стержня и теорию тонкостенных стержней с открытыми сечениями основанную на известных предположениях Власова.

Summary

TORSION OF PRISMATIC RODS AS BODIES WITH INTERNAL CONSTRAINTS. I.

The aim of the present work is to derive some technical theories of torsion of prismatic rods on the basis of the theory of bodies with internal constraints [1]. We obtain general theory of torsion based on the assumption that the projections of rod's cross-sections on the plane normal to the axis rod is rigid and theory of thin-walled rods with open cross-sections, based on well known Vlasov's assumption.

POLITECHNIKA WROCŁAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 listopada 1978 r.
