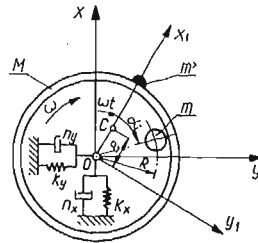


SAMOCZYNNNE WYWAŻANIE WIRNIKA PODPARTEGO SPRĘŻYŚCIE W DWÓCH
KIERUNKACH

TADEUSZ MAJEWSKI (WARSZAWA)

Przebadano wirnik, który jest niewyważony statycznie i pod działaniem nierównoważnych sił odśrodkowych porusza się ruchem płaskim w ten sposób, że oś obrotu wirnika O może przemieszczać się wzdłuż osi x i y nieruchomego układu współrzędnych xAy . W cylindrycznym podtoczeniu znajdują się elementy swobodne, np. kulki. Schemat takiego wirnika przedstawiony jest na rys. 1.



Rys. 1. Schemat układu

W pracy [1] rozpatrzono zachowanie się niewyważonego wirnika, którego oś obrotu została podparta sprężystością w jednym kierunku i wykazano, że przy prędkościach nadkrytycznych $\omega > \omega_{0x}$ elementy swobodne przemieszczają się do położenia zapewniającego wyważenie się układu.

W stosunku do układu z rys. 1 przyjmuje się następujące założenia: bieżnia, po której poruszają się elementy wyważające ma kształt okręgu, którego środek pokrywa się z osią obrotu O , wirnik obraca się ze stałą prędkością $\omega = \text{const}$, elementy wyważające poruszają się w płaszczyźnie poziomej i w związku z tym pominięte zostaną siły ciężkości, istniejące siły oporu są proporcjonalne do prędkości, elementy wyważające toczą się bez poślizgu i oderwań oraz nie zderzają się.

Ważniejsze oznaczenia

- M masa wirnika,
- m masa elementu wyważającego,
- Me niewyważenie statyczne wirnika,
- k_x, k_y sztywności podparcia sprężystego w kierunku osi x i y ,
- n_x, n_y, n_1 współczynniki oporu wiskotycznego dla wirnika i elementu,
- r promień elementu swobodnego,
- J masowy moment bezwładności elementu względem jego osi symetrii.

1. Równania ruchu i warunki wyważenia się układu

Wirnik z n elementami swobodnymi ma $2+n$ stopni swobody, przy czym niezależnymi współrzędnymi uogólnionymi są x, y, α_i . Masy i promienie wszystkich elementów przyjmuje się jednakowe. W oparciu o równania Lagrange'a ułożono równania ruchu układu. Równania te mają postać

$$(1) \quad (M+nm)\ddot{x} + n_x\dot{x} + k_x x = Me\omega^2 \cos\omega t + mR \sum_{i=1}^n (\omega + \dot{\alpha}_i)^2 \cos(\omega t + \alpha_i) + \\ + mR \sum_{i=1}^n \ddot{\alpha}_i \sin(\omega t + \alpha_i)$$

$$(2) \quad (M+nm)\ddot{y} + n_y\dot{y} + k_y y = Me\omega^2 \sin\omega t + mR \sum_{i=1}^n (\omega + \dot{\alpha}_i)^2 \sin(\omega t + \alpha_i) + \\ - mR \sum_{i=1}^n \ddot{\alpha}_i \cos(\omega t + \alpha_i),$$

$$(3) \quad m_z R \ddot{\alpha}_i = m[\dot{x} \sin(\omega t + \alpha_i) - \dot{y} \cos(\omega t + \alpha_i)] - n_1 R \dot{\alpha}_i,$$

gdzie $m_z = m + J/r^2$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Równania (1) i (2) opisują drgania postępowe osi wirnika O w kierunkach x i y . Natomiast równania (3) opisują ruch poszczególnych elementów swobodnych względem wirnika.

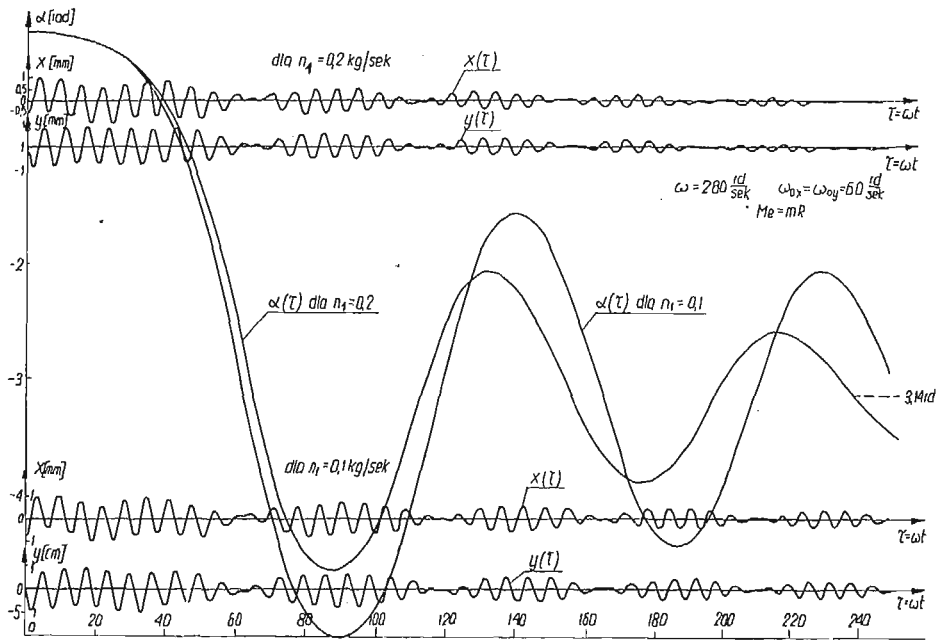
Niewyważony wirnik wykonuje drgania pod działaniem sił odśrodkowych. Na skutek jego drgań pojawiają się pewne siły, które starają się przesunąć elementy swobodne względem wirnika. Mogą one zatem zająć takie położenia końcowe α_{ik} , przy których układ byłby całkowicie wyrównoważony. Wtedy prawe strony równań (1), (2) będą równe zero dla dowolnej chwili t . Może to zachodzić wtedy, gdy współczynniki stojące przy funkcjach $\sin\omega t$, $\cos\omega t$ są równe zero. Stąd otrzymujemy

$$(4) \quad mR \sum_{i=1}^n \sin \alpha_{ik} = 0, \\ Me + mR \sum_{i=1}^n \cos \alpha_{ik} = 0.$$

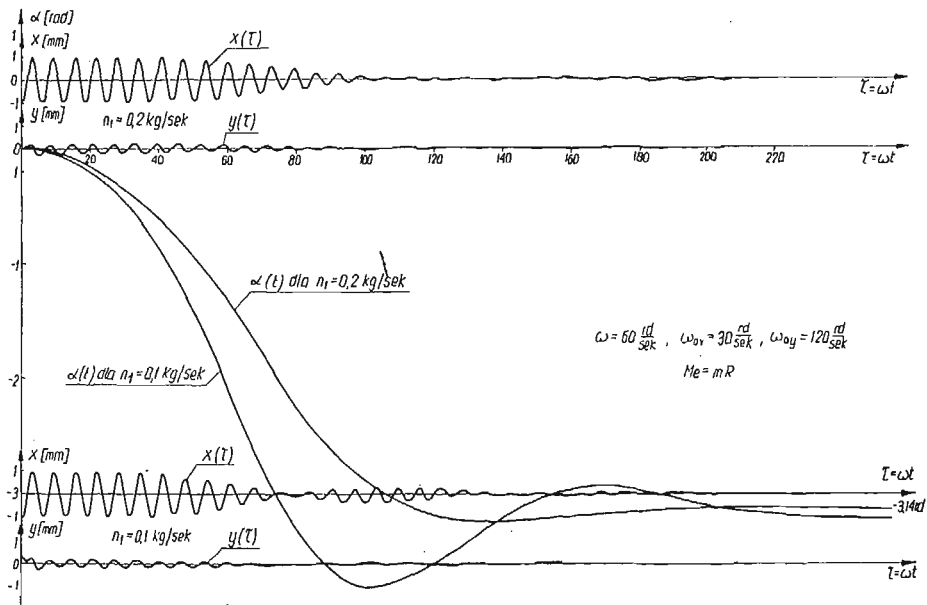
Równania różniczkowe (1) - (3) ze względu na swoją złożoność, nieliniowość i wzajemne sprzężenie są trudne do rozwiązania. Rozwiązywano je numerycznie metodą RUNGEGO-KUTTY na EMC ODRA 1204. Przeprowadzono obliczenia dla szeregu wartości prędkości kątowej ω . Wykresy z rys. 2 i 3 przedstawiają zachowanie się w czasie wirnika i elementów wyważających w przypadku wyważania jedną kulką $n = 1$. Masa kulki jest tak dobrana, że $mR = Me$. Zgodnie z warunkami (4) położenie elementu, przy którym układ będzie całkowicie wyważony jest $\alpha_k = \pm\pi$.

Wykresy z rys. 4 odnoszą się do tego samego wirnika z tym, że do wyważania użyto dwóch jednakowych kulek. W tym przypadku ich masy powinny być takie, żeby $2mR > Me$, a współrzędne końcowe α_{1k} , α_{2k} , przy których wirnik byłby całkowicie wyważony, określa zależność

$$(5) \quad \alpha_{1k} = -\alpha_{2k} = \arccos[-Me/2mR].$$

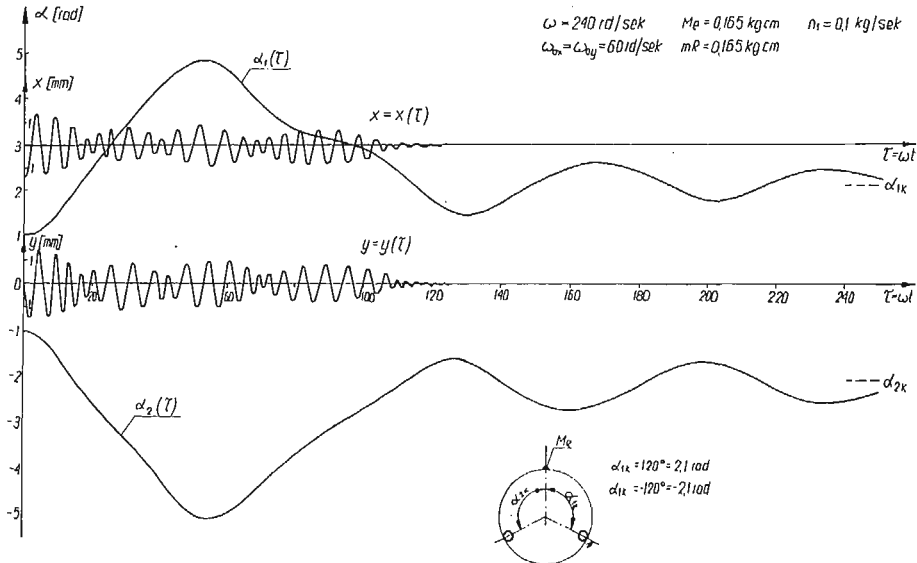


Rys. 2. Wyważanie jednym elementem



Rys. 3. Wyważanie jednym elementem

Przykładowe przebiegi $x(\tau)$, $y(\tau)$, $\alpha(\tau)$ przedstawione na rys. 2÷4 wskazują, że przy prędkościach $\omega > \omega_{0x}$, ω_{0y} , gdzie $\omega_{0x} = \sqrt{k_x/M}$, $\omega_{0y} = \sqrt{k_y/M}$, elementy wyważające rzeczywiście dążą do położenia α_{ik} , przy których układ jest wyważony, a drgania wirnika stopniowo zanikają. Również dla pewnych prędkości $\omega_{0x} < \omega < \omega_{0y}$ można uzyskać wyważenie się układu, jak pokazują wykresy z rys. 3.



Rys. 4. Wyważanie dwiema kulkami

2. Rozwiązanie uproszczone

Wyrażenia $mR \sum_{i=1}^n \ddot{\alpha}_i \sin(\omega t + \alpha_i)$, $mR \sum_{i=1}^n \ddot{\alpha}_i \cos(\omega t + \alpha_i)$ występujące w równaniach (1) i (2) można pominać bez obawy popełnienia większego błędu, gdyż są one dużo mniejsze w stosunku do pozostałych członów i zanikają jednocześnie z zanikaniem drgań wirnika. Po tym uproszczeniu prawe strony równań (1) i (2) przedstawiają sumę rzutów sił odśrodkowych na oś x lub y .

W związku z tym możemy przyjąć drgania wirnika jako sumę drgań od poszczególnych sił odśrodkowych działających na wirnik:

$$(6) \quad \begin{aligned} x(t) &= a_{0x} \cos(\omega t - \varphi_{0x}) + \sum_{i=1}^n a_{ix} \cos(\omega t + \alpha_i - \varphi_{ix}), \\ y(t) &= a_{0y} \sin(\omega t - \varphi_{0y}) + \sum_{i=1}^n a_{iy} \sin(\omega t + \alpha_i - \varphi_{iy}), \end{aligned}$$

gdzie a_{0x} , a_{ix} , φ_{0x} , φ_{ix} są amplitudami i kątami przesunięcia fazowego dla drgań w kierunku osi x , a_{0y} , a_{iy} , φ_{0y} , φ_{iy} oznaczają amplitudy i fazy dla drgań w kierunku y .

Równanie (3) opisuje ruch i -tego elementu swobodnego pod działaniem siły:

$$(7) \quad P_i = m[\ddot{x} \sin(\omega t + \alpha_i) - \ddot{y} \cos(\omega t + \alpha_i)].$$

Zależy ona od przyspieszeń, jakie występują w poszczególnych ruchach składowych osi wirnika. Jeżeli przyjęto drgania wirnika jako sumę drgań harmonicznych, to siła P_i , po wykorzystaniu zależności (6), może być przedstawiona w postaci

$$(8) \quad P_i = -0,5m\omega^2 e [a'_{0x} \sin(\alpha_i + \varphi_{0x}) + b \sum_{j=1}^n a'_{jx} (1 + \dot{\alpha}_j/\omega)^2 \sin(\alpha_i - \alpha_j + \varphi_{jx}) - \\ - 0,5m\omega^2 e [a'_{0y} \sin(\alpha_i + \varphi_{0y}) + b \sum_{j=1}^n a'_{jy} (1 + \dot{\alpha}_j/\omega)^2 \sin(\alpha_i - \alpha_j + \varphi_{jy})] - \\ - 0,5m\omega^2 e [a'_{0x} \sin(2\omega t + \alpha_i - \varphi_{0x}) + b \sum_{j=1}^n a'_{jx} (1 + \dot{\alpha}_j/\omega)^2 \sin(2\omega t + \alpha_i + \alpha_j - \varphi_{jx})] + \\ + 0,5m\omega^2 e [a'_{0y} \sin(2\omega t + \alpha_i - \varphi_{0y}) + b \sum_{j=1}^n a'_{jy} (1 + \dot{\alpha}_j/\omega)^2 \sin(2\omega t + \alpha_i + \alpha_j - \varphi_{jy})],$$

gdzie $b = mR/Me$, $a'_0 = a_0/e$, $a'_i = a_i/be$.

W pracach [1, 2] wykazano, że człony okresowe względem czasu występujące w zależności (8), mają mały wpływ na ruch elementu wyważającego. W dodatku występują one z przeciwnymi znakami, przez co ich wpływ wzajemnie się znosi. Do dalszych rozważań można przyjąć uśrednioną siłę \bar{P}_i jako

$$(9) \quad \bar{P}_i = \frac{1}{T} \int_0^T P_i dt, \quad \text{gdzie} \quad T = \frac{\pi}{\omega}.$$

Po wprowadzeniu oznaczeń

$$(10) \quad P_0 = 0,5m\omega^2 e, \\ F_{ix} = - [a'_{0x} \sin(\alpha_i + \varphi_{0x}) + b \sum_{j=1}^n a'_{jx} (1 + \dot{\alpha}_j/\omega)^2 \times \sin(\alpha_i - \alpha_j + \varphi_{jx})], \\ F_{iy} = - [a'_{0y} \sin(\alpha_i + \varphi_{0y}) + b \sum_{j=1}^n a'_{jy} (1 + \dot{\alpha}_j/\omega)^2 \times \sin(\alpha_i - \alpha_j + \varphi_{jy})], \\ F_i = F_{ix} + F_{iy},$$

siłę \bar{P}_i można zapisać w postaci

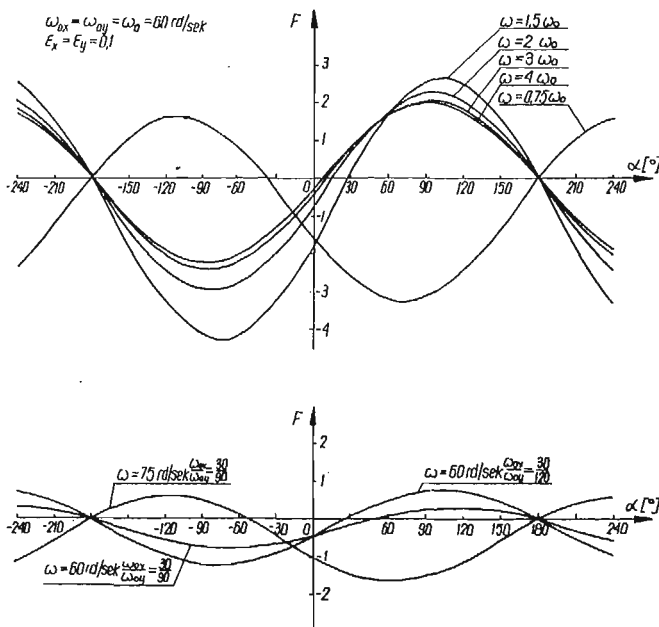
$$(11) \quad \bar{P}_i = \bar{P}_{ix} + \bar{P}_{iy} = P_0(F_{ix} + F_{iy}) = P_0 F_i.$$

Wyrażenie P_0 decyduje o wartości siły \bar{P}_i . Natomiast $F_i = F_{ix} + F_{iy}$ jest bezwymiarową funkcją okresową względem α_i i przedstawia zmianę siły wymuszającej \bar{P}_i w zależności od położenia poszczególnych elementów. Funkcje F_{ix} , F_{iy} pochodzą odpowiednio od drgań wzdłuż osi x lub y . Jeżeli prędkość kątowna jest niezbyt duża, a jedna ze sztywności jest bardzo duża np. k_y , tak że $\omega \ll \omega_{0y}$, to wtedy $F_y \rightarrow 0$ i wówczas otrzymujemy układ, który może drgać tylko w jednym kierunku. Gdy wirnik podparty jest w ten sposób, że sztywności w obu kierunkach są jednakowe ($k_x = k_y$), a współczynniki oporu równe ($n_x = n_y$), wówczas $\omega_{0x} = \omega_{0y}$ i w dalszej kolejności $F_{ix} = F_{iy}$.

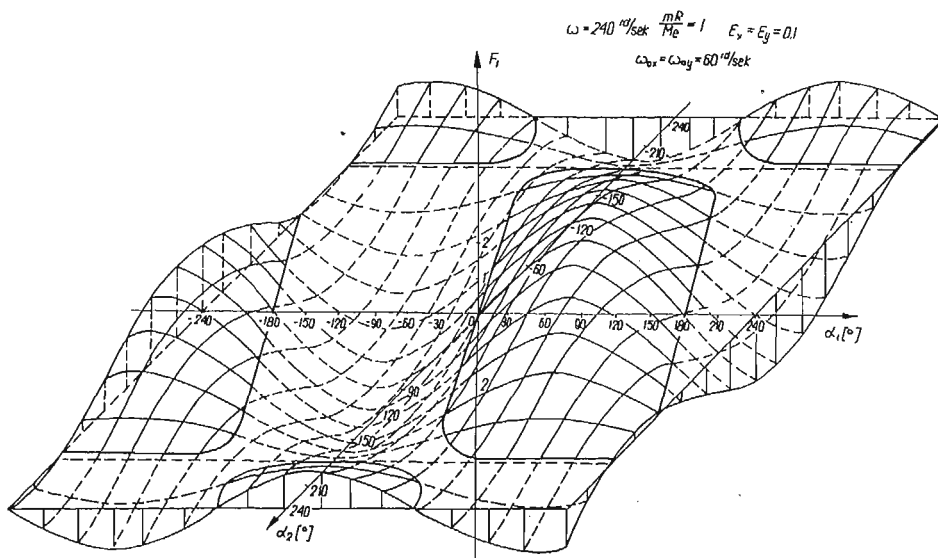
W tym przypadku siła wymuszająca ruch i -tego elementu

$$(12) \quad P_i = \bar{P}_i = P_0 F_i = 2P_0 F_{ix}$$

jest dwa razy większa w porównaniu z siłą występującą w przypadku wirnika podpartego sprężystie tylko w jednym kierunku, a siły okresowe względem czasu nie występują.



Rys. 5. Wykres funkcji $F = F_x + F_y$



Rys. 6. Wykres funkcji F_1

Wartość siły P_i jest proporcjonalna do kwadratu prędkości kątowej wirnika. Przykładowo na rys. 5 przedstawiono funkcję F_i dla przypadku wyważania jedną kulką. Przebieg funkcji F_i dla prędkości kątowych wirnika $\omega < \omega_{0x}$, ω_{0y} jest inny niż dla prędkości większych od częstości drgań własnych. Funkcja F_i przyjmuje wartości zerowe w dwóch punktach. Jednym z nich jest położenie elementu $\alpha = \pm\pi$, przy którym układ byłby wyważony.

Wykres na rys. 6 przedstawia funkcję F_1 dla przypadku wyważenia dwiema kulkami. Funkcje F_1 i F_2 przyjmują jednocześnie wartości zerowe, gdy oba elementy znajdą się w położeniach α_{1k} , α_{2k} określonych zależnością (4).

3. Stateczność

Przyjmując, że elementy wyważające zajęły położenia α_{ik} , przy których układ byłby całkowicie wyważony wprowadza się «małe» zakłócenia ruchu i bada ten ruch. Jeżeli będzie on zanikający świadczy to o stateczności układu. W przypadku, gdy elementy wyważające oddalają się od położen α_{ik} oznacza to, że położenia te nie są położeniami równowagi trwałe.

Stateczność zostanie zbadana w oparciu o równanie ruchu

$$(13) \quad m_z R \ddot{\alpha}_i = \bar{P}_i - n_1 R \dot{\alpha}_i,$$

gdzie siłę \bar{P}_i określa zależność (11). Przebadano przypadek $\omega_{0x} = \omega_{0y} = \omega_0$. Współrzędna określająca położenie elementu wyważającego może być zapisana w postaci

$$(14) \quad \alpha_i = \alpha_{ik} + \eta_i,$$

gdzie $\eta_i(t)$ jest małym przemieszczeniem względem α_{ik} .

Po podstawieniu wyrażenia (14) do zależności (11) na siłę \bar{P}_i , rozwinięciu jej w szereg Taylora i wzięciu pod uwagę pierwszych dwóch wyrazów rozwinięcia otrzymujemy zależność na siłę, gdy elementy znajdują się w sąsiedztwie położen α_{ik} . Po jej podstawieniu do (13) otrzymujemy równania ruchu zakłóconego. W przypadku wyważania jedną kulką równania te przyjmują postać

$$(15) \quad a_0 \ddot{\eta} + a_1 \dot{\eta} + a_2 \eta = 0,$$

gdzie $a_0 = m_z R/m_e$, $a_1 = 2a'_0 \sin \varphi_0 + n_1 R/m\omega e$, $a_2 = -a'_0 \cos \varphi_0$, a pochodne są określone względem zmiennej $\tau = \omega t$.

Jest to równanie różniczkowe o współczynnikach niezależnych od czasu. Stateczność zbadano w oparciu o kryterium Hurwitza. Rozwiązanie równania (15) jest stateczne, gdy jego współczynniki spełniają warunki: $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$. Pierwsze dwa są zawsze spełnione, natomiast ostatni warunek jest spełniony tylko dla prędkości kątowych większych od prędkości krytycznych.

Równania różniczkowe opisujące ruch zakłócony dwóch elementów wyważających mają postać:

$$(16) \quad \begin{aligned} a_{11} \ddot{\eta}_1 + b_{11} \dot{\eta}_1 + c_{11} \eta_1 + b_{12} \ddot{\eta}_2 + c_{12} \eta_2 &= 0, \\ a_{22} \ddot{\eta}_2 + b_{22} \dot{\eta}_2 + c_{22} \eta_2 + b_{21} \ddot{\eta}_1 + c_{21} \eta_1 &= 0. \end{aligned}$$

Rozwiązań powyższych równań szukamy w postaci

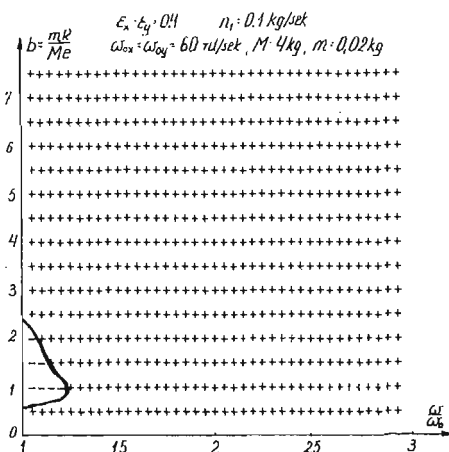
$$(17) \quad \eta_1 = \lambda_1 e^{rt}, \quad \eta_2 = \lambda_2 e^{rt},$$

a po ich podstawieniu do (16) i przyrównaniu wyznacznika charakterystycznego do zera otrzymujemy równanie czwartego stopnia

$$(18) \quad a_0 r^4 + a_1 r^3 + a_2 r^2 + a_3 r + a = 0.$$

Stałe a, b, c w równaniach (16) i (18) zależą od parametrów układu, takich jak m, R, b, e, ω . Pierwiastki równania (18) mają ujemne części rzeczywiste, gdy współczynniki tego równania spełniają cztery warunki:

$$(19) \quad \begin{aligned} a_1 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_4 > 0, \\ a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_4 a_1^2 > 0. \end{aligned}$$



Rys. 7. Wykres stateczności
Obszar stateczny +, obszar niestateczny -

Warunek pierwszy i trzeci są zawsze spełnione, zaś warunek drugi jest spełniony tylko dla $\omega > \omega_0$. Sprawdzenia wymaga czwarty warunek w zakresie prędkości nadkrytycznych. Stwierdzono, że w zasadzie położenia elementów wyważających α_{1k}, α_{2k} są położeniami równowagi trwałej przy prędkościach $\omega > \omega_0$. Jedynie bardzo blisko prędkości krytycznej ω_0 i dla $b \approx 0,7$ pojawiają się obszary niestateczne.

Ze wzrostem wartości współczynników tłumienia drgań n_x, n_y , obszar niestateczny powiększa się. Na rys. 7 przedstawiono zakresy prędkości kątowych wirnika, przy których położenia α_{1k}, α_{2k} są stateczne.

4. Rola oporów toczenia

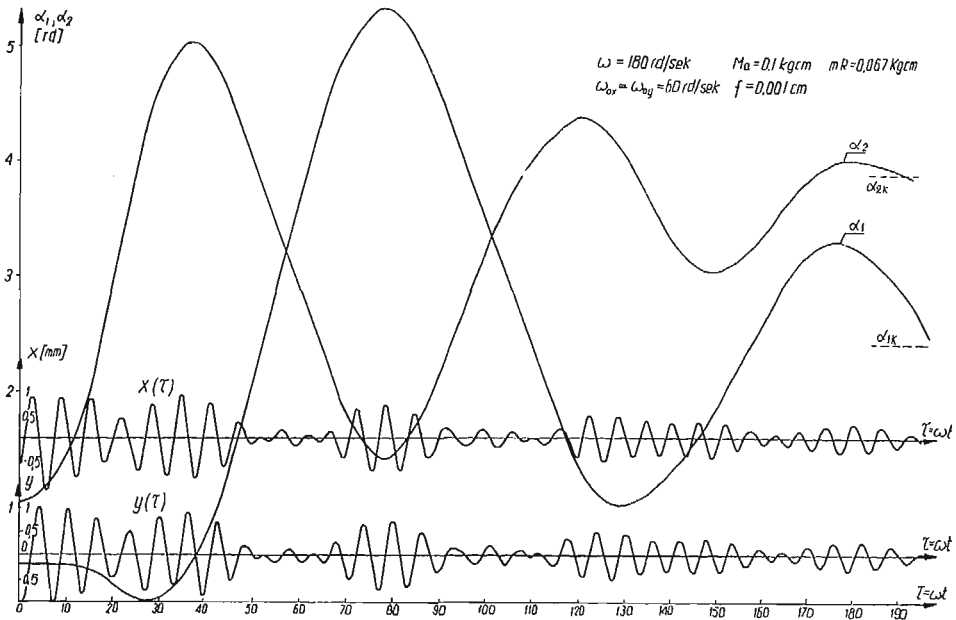
W poprzednich rozważaniach uwzględniono jedynie tłumienie typu wiskotycznego. Współczynnik oporu toczenia f jest małą wielkością. Jednak siła odśrodkowa działająca na element wyważający jest znaczna, co powoduje, że wpływ oporów toczenia na zachowanie się układu jest duży. Będzie on decydował o dokładności ustawienia się elementów wyważających, a przez to będzie wpływał na dokładność wyważenia się układu.

Przyjmując, że ruchom elementów wyważających przeciwstawiają się tylko opory toczenia, równanie ruchu i -tej kulki lub rolki o promieniu r ma postać

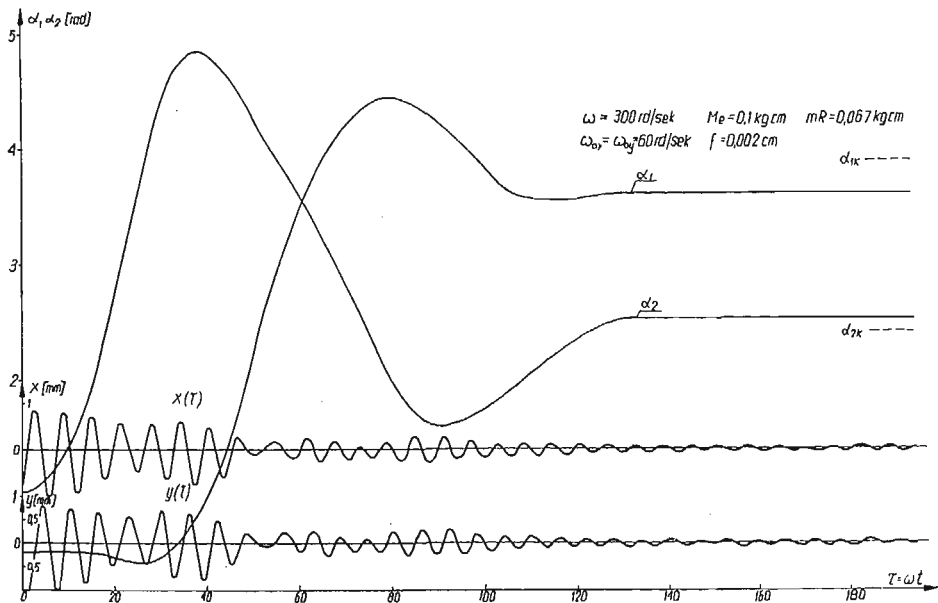
$$(20) \quad m_z R \ddot{\alpha}_i = m[\ddot{x} \sin(\omega t + \alpha_i) - \ddot{y} \cos(\omega t + \alpha_i)] - N_i \frac{f}{r} \text{sign} \dot{\alpha}_i,$$

gdzie $N_i \cong mR\omega^2$.

Różniczkowe równania ruchu wirnika (1), (2) pozostają bez zmian. Równania ruchu układu rozwiązano numerycznie dla szeregu wartości prędkości kątowych i współczynników oporu otoczenia. Przykładowe rozwiązania równań (1), (2) i (20) są przedstawione na rys. 8 i 9.



Rys. 8. Wyważanie dwiema kulkami



Rys. 9. Wyważanie dwiema kulkami

Przy prędkości kątowej wirnika $\omega > \omega_{0x}, \omega_{0y}$ i oporze toczenia $f \neq 0$ elementy wyważające zajmują położenia końcowe przesunięte o $\Delta\alpha_i$ względem α_{ik} przy których układ byłby wyważony idealnie.

Element wyważający nie zacznie się toczyć dopóki jest spełniony warunek

$$(21) \quad |P_i|r \leq N_i f.$$

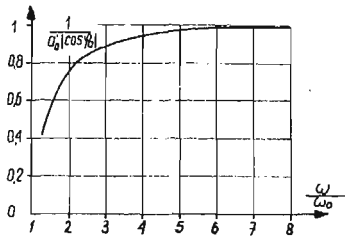
Wielkość szcztkowego niewyważenia, jakie pozostaje przy niedokładnym ustawieniu się elementów wyważających zostanie wyznaczona dla przypadku takiego podparcia wirnika, że $\omega_{0x} = \omega_{0y} = \omega_0$. Traktując odchyłkę $\Delta\alpha_i$ jako małą wielkość, a następnie rozwijając wyrażenie (12) na siłę działającą na i -ty element i biorąc pod uwagę pierwsze dwa wyrazy rozwinięcia, otrzymujemy zależność na siłę P_i , gdy element wyważający znajduje się blisko położenia α_{ik} . Po podstawieniu do (21) obliczamy maksymalne odchyłki $\Delta\alpha_{\max}$, a następnie maksymalne niewyważenie $\Delta|Me|_{\max}$ jakie może pozostać.

W przypadku zastosowania jednego elementu wyważającego:

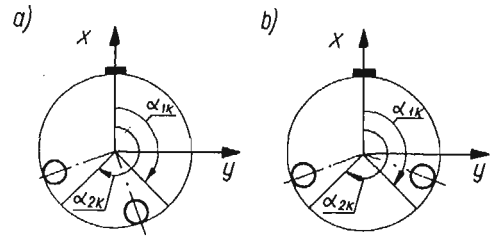
$$(22) \quad \Delta\alpha_{\max} = \pm \frac{Rf}{er} \frac{1}{a'_0 |\cos \varphi_0|},$$

$$(23) \quad \Delta|Me|_{\max} \cong mR\Delta\alpha_{\max} = \frac{2RMf}{r} \frac{1}{a'_0 |\cos \varphi_0|}.$$

Z zależności (22) i (23) wynika, że dla wirnika podpartego sprężysto w dwóch kierunkach błąd ustawienia się elementu wyważającego $\Delta\alpha_{\max}$ jest dwa razy mniejszy w porównaniu z identycznym układem podpartym sprężysto tylko w jednym kierunku [1]. Odchyłka $\Delta\alpha_{\max}$ i niewyważenie szcztkowe $\Delta|Me|_{\max}$ są proporcjonalne do współczynnika oporu toczenia f . Błąd ustawienia elementu i niewyważenia szcztkowe zależą od wyrażenia $1/a'_0 |\cos \varphi_0|$, które jest funkcją prędkości kątowej wirnika (rys. 10).



Rys. 10. Wykres funkcji $1/a'_0 |\cos \varphi_0|$



Rys. 11. Ustawienie elementów wyważających

Jeżeli chcemy uzyskać małe niedokładności, to operację wyważenia należy przeprowadzać przy prędkościach ω niewiele większych od ω_{0x} i ω_{0y} .

W przypadku użycia dwóch kulek z warunku (21) otrzymujemy cztery rozwiązania ze względu na ich ustawienie się względem α_{1k}, α_{2k} . Na rys. 11 przedstawiono dwie możliwości ustawienia się kulek. W pierwszym rozwiązaniu obie kulki są przesunięte w tym samym kierunku czyli $\Delta\alpha_1$ i $\Delta\alpha_2$ mają ten znak (rys. 11a):

$$(24) \quad \Delta\alpha'_{1\max} = \frac{Mf}{mra'_0} \frac{\sin(\alpha_k + \varphi_0)}{2\sin\alpha_k \cos^2\alpha_k},$$

$$(25) \quad \Delta\alpha'_{2\max} = \frac{Mf}{mra'_0} \frac{\sin(-\alpha_k + \varphi_0)}{2\sin\alpha_k \cos^2\alpha_k}.$$

Niewyważenie szcztątkowe w tym przypadku wynosi

$$(26) \quad \Delta|Me|'_{\max} = \frac{MRf}{ra'_0} \frac{1}{|\cos\alpha_k|}.$$

Drugie rozwiązanie odpowiada przesunięciu się kulek w przeciwnych kierunkach (rys. 11b):

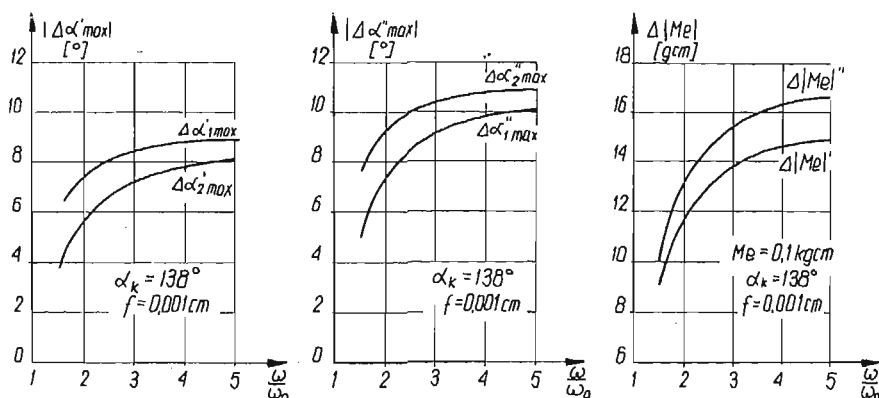
$$(27) \quad \Delta\alpha''_{1\max} = -\frac{Mf}{mra'_0} \frac{\cos(\alpha_k + \varphi_0)}{2\sin^2\alpha_k \cos\alpha_k},$$

$$(28) \quad \Delta\alpha''_{2\max} = \frac{Mf}{mra'_0} \frac{\cos(-\alpha_k + \varphi_0)}{2\sin^2\alpha_k \cos\alpha_k}.$$

Niewyważenie szcztątkowe dla tego rozwiązania wynosi

$$(29) \quad \Delta|Me|''_{\max} = \frac{MRf}{ra'_0} \frac{1}{\sin\alpha_k}.$$

Pozostałe dwa rozwiązania różnią się od otrzymanych tylko znakiem. Dla układu o pewnych parametrach przebadano związki (24)÷(29) w zależności od prędkości kątowej wirnika, a wyniki przedstawiono na rys. 12. Dla prędkości kątowych ω znacznie większych od



Rys. 12. Zależność błędów ustawienia kulek i niewyważenia szcztątkowego od prędkości kątowej wirnika

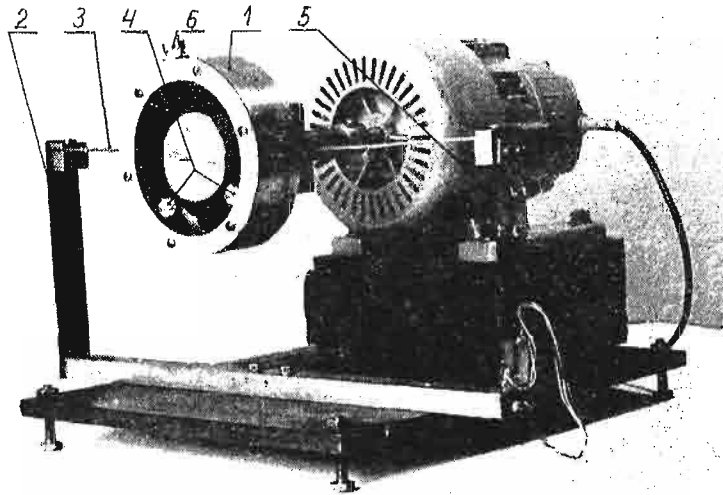
prędkości krytycznej ω_0 można przyjąć $\varphi_0 \cong \pi$ i $a'_0 \cong 1$ przez co zależności (24)÷(29) znacznie się upraszczają. Odchyłki $\Delta\alpha_{\max}$ i niewyważenie szcztątkowe $\Delta|Me|_{\max}$ maleją, jeżeli stosunek ω/ω_0 dąży do jedności. Z podanych zależności wynika, że przy zachowaniu stałego iloczynu mR niedokładności ustawienia się kulek i niewyważenie szcztątkowe są tym mniejsze, im mniejszy jest promień R . Jeżeli dąży się do jak najlepszego wyważenia układu, to należy dobierać elementy wyważające o dużych promieniach r , lecz poruszające się po torze o małym promieniu R . Im mniejsze są opory toczenia f , tym mniejsze jest

niewyważenie szczątkowe. Również w tym przypadku niedokładności ustawienia kulek i niewyważenie końcowe są dwa razy mniejsze w porównaniu z $\Delta\alpha_{\max}$ i $\Delta|Me|_{\max}$ dla takiego samego układu, ale z podparciem sprężystym tylko w jednym kierunku.

5. Badania

Zbudowano stanowisko doświadczalne (rys. 13) odpowiadające modelowi przyjętemu do rozważań teoretycznych i na nim sprawdzono efekt wyrównoważania się układu.

Wirnik 1 o masie $M = 2,5$ kg podparto sprężynami płaskimi pionowymi 2 i poziomymi 3. Takie zawieszenie umożliwia wzbudzenie drgań wirnika w dwóch kierunkach x i y . Elementami wyważającymi były dwie kulki łożyskowe 4 każda o masie $m = 18,7$ g i średnicy 16,7 mm. Drgania wirnika rejestrowano przy pomocy tensometrów oporowych 5 naklejonych na sprężynach pionowych. Wielkość niewyważenia regulowano ilością podkładek pod śrubą 6.



Rys. 13. Stanowisko badawcze

Do napędu wirnika użyto silnika o prędkości obrotowej $n = 1500$ obr/min. Badanie przeprowadzono tylko przy jednej prędkości. Po ustaleniu się prędkości obrotowej wirnika kulki były uruchamiane przez zwolnienie specjalnej blokady, a następnie po ich ustawieniu ponownie blokowane. Kulki ustawiane w różnych położeniach początkowych α_{10}, α_{20} zawsze przemieszcza się do położenia bliskich wartościom teoretycznym. Odchyłki ustawienia kulek nie przekraczały 8° .

Przykładowe wyniki pomiarów:

1) Wirnik wyważony $Me = 0$. Początkowe niewyważenie układu jest spowodowane przez kulki. W tym przypadku powinny one ustawić się na jednej średnicy, tzn. $\alpha_{2k} - \alpha_{1k} = 180^\circ$. Wyniki przedstawiono w tablicy 1.

Tablica 1.

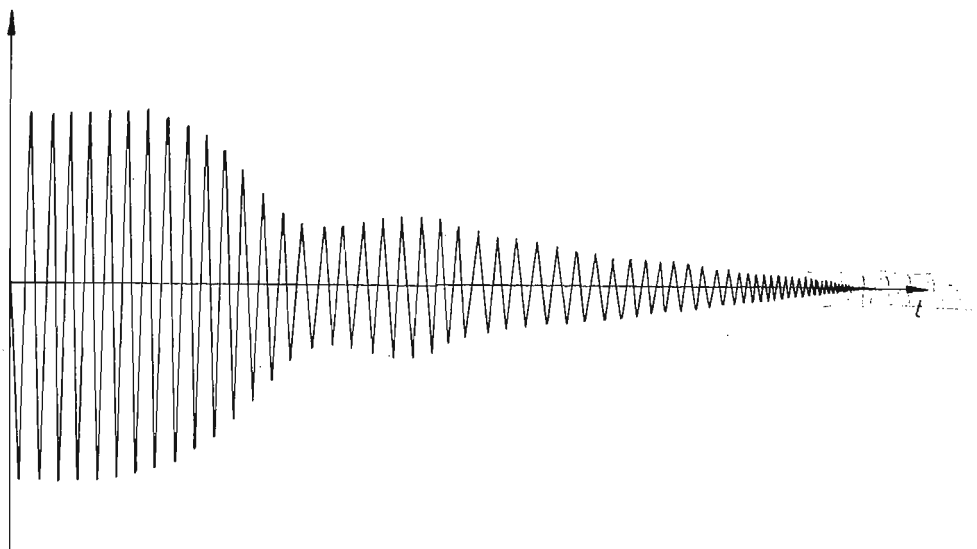
Nr pomiaru	Położenie początkowe		Położenie końcowe	
	α_{10}	α_{20}	α_{1k}	α_{2k}
1	140	225	0	187
2	195	275	25	210

Tablica 2.

Nr pomiaru	Położenie początkowe		Położenie końcowe	
	α_{10}	α_{20}	α_1	α_2
3	77	100	142	230
4	225	280	138	229
5	48	70	140	225

2) Niewyważenie statyczne wirnika $Me = 0,12 \text{ kg cm}$. Położenia kulek, przy których układ byłby całkowicie wyważony wyznaczone z warunków (4) wynoszą $\alpha_{1k} = 138^\circ$, $\alpha_{2k} = 222^\circ$. Wyniki przedstawiono w tablicy 2.

Oscylogram drgań wirnika dla pomiaru nr 3 jest przedstawiony na rys. 14.



Rys. 14. Oscylogram drgań wirnika

6. Wnioski

W pracy podano ogólne równania opisujące zachowanie się układu wyważanego n elementami swobodnymi, którymi mogą być kulki lub rolki. Szczegółowe rozważania dotyczyły przypadków, w których stosuje się jeden lub dwa elementy. Użycie jednego elementu jest skuteczne tylko dla określonego niewyważenia. W tym przypadku element nie ma możliwości «dopasowania» się do wielkości niewyważenia, które jest nieznanne. Jest to raczej problem teoretyczny, ponieważ z praktycznego punktu widzenia użycie jednego elementu jest mało przydatne. Stosując co najmniej dwa elementy istnieje możli-

wość «dopasowania» się układu poprzez odpowiednie ustawienie się tych elementów, w zależności od niewyważenia. Zatem wielkość niewyważenia, jak i jego położenie może się zmieniać w pewnym zakresie, a elementy ruchome tak się będą ustawiać, że wirnik będzie zawsze wyrównoważony. Na drodze rozważań teoretycznych, jak również w oparciu o wyniki uzyskane z badań na stanowisku doświadczalnym stwierdzono, że samoczynne wyważenie wirnika podpartego sprężystość w dwóch kierunkach następuje, jeżeli jego prędkość obrotowa jest większa od częstości drgań swobodnych ω_{0x} , ω_{0y} .

Samoczynne wyważenie można również osiągnąć przy prędkościach kątowych $\omega_{0x} < \omega < \omega_{0y}$, ale nie w całym zakresie $\omega_{0x} \div \omega_{0y}$, a dokładności jakie się wtedy otrzymuje są małe. Wynika to stąd, że składowe P_{ix} , P_{iy} siły wymuszającej ruch elementu mają przeciwnie znaki i odejmują się. A zatem siła wymuszająca jest mała przy istnieniu znacznych sił oporu. Błędy ustawienia kulek oraz niewyważenie szczałkowe są wprost proporcjonalne do współczynnika oporu toczenia. Dlatego bieźnia bębna i elementy wyważające powinny być tak dobrane, aby wpływ tego oporu był jak najmniejszy. Elementy wyważające powinny być jak największe, a ich środek masy powinien poruszać się po jak najmniejszym promieniu R . W przypadku elementów wyważających, które nie mogą się przetaczać tylko ślizgać należałoby brać pod uwagę opór poślizgu. W stosunku do oporu toczenia jest on dużo większy. W związku z tym błędy wtedy powstające byłyby dużo większe i dlatego elementów takich nie należy raczej stosować.

Do zalet tej metody należy zaliczyć to, że jest ona bardzo prosta, nie wymaga drogich i skomplikowanych maszyn, wyważenie odbywa się bez udziału człowieka i następuje prawie jednocześnie z pojawieniem się niewyważenia.

Wadą tej metody jest jej skuteczność tylko przy prędkościach nadkrytycznych, natomiast przy obrotach podkrytycznych elementy swobodne powiększają niewyważenie. Na skutek istnienia oporu toczenia układ nie wyważa się do końca.

Literatura cytowana w tekście

1. T. MAJEWSKI, *Samoczynne wyważenie wirnika podpartego sprężystość w jednym kierunku*, Arch. Bud-Masz., 3 (1976).
2. Ю. Ю. Блехман, *Синхронизация динамических систем*, Москва 1971.

АВТОМАТИЧЕСКОЕ УРАВНОВЕШИВАНИЕ РОТОРА, ПОДДЕРЖИВАЕМОГО УПРУГО В ДВУХ НАПРАВЛЕНИЯХ

Резюме

В работе описывается метод автоматического уравновешивания роторов при помощи подвижных элементов, таких как например шарики и ролики. Приводятся дифференциальные уравнения движения, описывающие поведение системы в процессе уравновешивания. Даются решения этих уравнений, выполненные при помощи электронно-вычислительной машины, и приближенные решения. Показывается, что подвижные элементы перемещаются в положения, которые соответствуют полному равновесию системы. Была проведена проверка устойчивости положений шариков, обеспечивающих полное равновесие системы. Было исследовано влияние сопротивления качения на свойственные данному методу погрешности.

S u m m a r y

AN AUTOMATIC BALANCING OF ROTOR ELASTICLY SUPPORTED IN TWO DIRECTIONS

This work concerns the method of an automatic balancing of rotors by the movable elements such as balls and rollers. The differential equations of motion describing the behaviour of the system during balancing is derived. Numerical and simplified analytical solutions of these equations are presented. It is shown that the adjustable elements move to the positions at which the system would be completely balanced. This position is shown to be stable. The influence of roll resistance on the accuracy of the solution is discussed.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 maja 1976 r.