

GENEROWANIE REZONANSÓW POBOCZNYCH PRZEZ IMPULSY SIŁ W NIELINIOWYCH
UKŁADACH DRGAJĄCYCH*

JÓZEF BAJKOWSKI (WARSZAWA)

1. Wprowadzenie

Jak wiadomo, w liniowych dysypacyjnych układach drgających rozwiązania ustalone są jednoznacznie określone przez parametry układu i harmoniczne wymuszenie zewnętrzne. Ustalona odpowiedź układu jest odpowiedzią harmoniczną o częstości siły wymuszającej, gdyż inne składowe odpowiadające drganiom swobodnym są wytlumiane z upływem czasu.

Istotną cechą nieliniowych układów drgających wzbudzanych siłami harmonicznymi jest możliwość istnienia kilku statecznych rozwiązań ustalonych — zależnie od warunków początkowych. Ustalona odpowiedź układu może zatem zawierać oprócz składowej o częstości siły wymuszającej inne składowe harmoniczne, o innych częstościach i znacznie większych amplitudach. Jako przypadki szczególne wymienić tu możemy następujące typy odpowiedzi:

— w odpowiedzi układu dominuje składowa o częstości wymuszenia; odpowiedź ta występuje zarówno w otoczeniu rezonansów głównych, tzn. gdy częstość wymuszenia jest w pobliżu jednej z częstości własnych układu, jak i z dala od nich,

— w odpowiedzi układu dominuje składowa o częstości będącej wielokrotnością (ultraharmoniczne) lub podwielokrotnością (subharmoniczne) częstości wymuszenia,

— odpowiedź prawie-periodyczną, w której oprócz składowej o częstości wymuszenia wystąpi kilka składowych harmonicznymi o częstościach niewspółmiernych.

Periodyczne odpowiedzi: subharmoniczną i ultraharmoniczną oraz odpowiedź prawie-periodyczną określa się terminem *rezonanse poboczne*. Rezonanse periodyczne występują zarówno w układach o jednym, jak i o wielu stopniach swobody, natomiast rezonanse prawie-periodyczne mogą wystąpić tylko w układach o więcej niż jednym stopniu swobody.

Zadanie zbadania warunków, dla których układ nieliniowy realizuje tę lub inną odpowiedź ustaloną, rozwinęły się w ostatnich latach w osobną gałąź teorii drgań, przybierając nazwę *obszarów przyciągania* [1, 2, 3, 4]. Znaczne zainteresowanie tymi problemami wynika zarówno z naukowo-poznawczego charakteru tego zadania, jak i z potrzeby znajomości tych zagadnień w zastosowaniach inżynierskich. Wiąże się to z faktem, że w zakresach częstości wymuszenia, w których teoria liniowa przewiduje drgania harmoniczne o małych amplitudach, mogą przy pewnych warunkach początkowych, bądź przy-

*¹ Praca wyróżniona II nagrodą na konkursie zorganizowanym przez Oddział Łódzki PTMTS w roku 1977.

padkowych impulsach sił, bądź skokowych zmianach sztywności, mas czy amplitud wymuszenia, pojawić się drgania o innych częstościach i znacznych amplitudach. Zadanie wyznaczania obszarów przyciągania polega na wyznaczeniu obszarów warunków początkowych, przy których po pewnym stanie przejściowym ustala się drganie odpowiadające danemu typowi rezonansu pobocznego lub drganie harmoniczne.

Teoria periodycznych rezonansów pobocznych w układach o jednym stopniu swobody i związanych z nimi obszarów przyciągania jest stosunkowo dobrze znana [3,]. Teoria rezonansów pobocznych w układach o wielu stopniach swobody jest jeszcze słabo rozwinięta, a zagadnienie obszarów przyciągania rezonansów prawie-periodycznych nie było dotychczas rozważane.

Zadaniem niniejszej pracy jest zbadanie, czy impulsy sił przyłożone przypadkowo do układu wymuszanego siłą harmoniczną mogą spowodować zmianę odpowiedzi układu z odpowiedzi harmonicznego o małej amplitudzie (z dala od głównego rezonansu), do odpowiedzi odpowiadającej rezonansowi pobocznemu — ze znaczną amplitudą drgań. Przyjęto założenie, że efektem impulsów sił przyłożonych w chwili t_0 są początkowe prędkości, przy zerowych przemieszczeniach początkowych układu. Odpowiedzi na to pytanie szukano na drodze obliczeń teoretycznych, wykorzystując przybliżone metody analityczne, oraz za pomocą maszyn analogowych wraz z urządzeniami pomiarowo-rejestrującymi. Teoretyczne rozwiązanie zadania dla przypadku rezonansu prawie-periodycznego (dwuczęstościowego) okazało się bardzo złożone i wymagało opracowania specjalnego algorytmu numerycznego. Przy badaniu tego zagadnienia za pomocą maszyn analogowych udało się opracować specjalny układ pomiarowo-rejestrujący, pozwalający na automatyczne wyznaczanie obszarów przyciągania na płaszczyźnie prędkości początkowych (na rejestratorze $X-Y$).

2. Ogólne równania ruchu układu

Rozważmy nieliniowy, holonomiczny, dysypacyjny układ drgający o n stopniach swobody, którego równania ruchu przyjęto w postaci

$$(2.1) \quad A\ddot{q} + C\dot{q} + f(q) + \varphi(q, \dot{q}) - P \cos \nu t = 0,$$

gdzie $A \equiv [a_{ik}]$ oznacza macierz bezwładności, kwadratowa, symetryczna, dodatnio określona, $C \equiv [c_{ik}]$ macierz sztywności, kwadratowa, symetryczna, dodatnio określona, zaś $q = \text{col}[q_1, q_2, \dots, q_n]$ współrzędne uogólnione, f, φ, P macierze kolumnowe reprezentujące: nieliniową część sił sprężystych, tłumienia i amplitud sił wymuszających.

Zakładamy, że nieliniowy układ zachowawczy posiada energię potencjalną, dodatnio określoną, a siły sprężyste będące odpowiednimi jej pochodnymi cząstkowymi są nieparzystymi analitycznymi funkcjami swych argumentów i przedstawiane są za pomocą skończonych szeregów Taylora:

$$V(0, \dots, 0) = 0,$$

$$V(q_1, \dots, q_n) = V(-q_1, \dots, -q_n),$$

$$V > 0 \text{ dla } q_i \text{ nie wszystkich równych zeru,}$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^n c_{ik} q_k + f_i(q_1, \dots, q_n), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Energia kinetyczna układu jest formą kwadratową względem $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$, dodatnio określona

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T A \dot{q}.$$

Funkcje (q, \dot{q}) przedstawiające siły tłumienia spełniają warunki:

$$\varphi_i(0, \dots, 0, 0, \dots, 0) = 0,$$

$$\varphi_i(q_1, \dots, q_n, 0, \dots, 0) = 0,$$

$$\varphi_i(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = -\varphi_i(q_1, \dots, q_n, -\dot{q}_1, \dots, -\dot{q}_n),$$

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i \dot{q}_i > 0 \text{ dla } \dot{q}_i \text{ nie wszystkich równych zeru.}$$

Przyjmuje się, że można je przedstawić w postaci skończonych szeregów Taylora.

Równania (2.1) opisują zarówno drgania układów, których modele mechaniczne są modelami o masach skupionych, jak i drgania układów o ciągłym rozkładzie mas, jeśli odpowiedź przedstawimy w postaci skończonego szeregu:

$$u(r, t) = \sum_{i=1}^n \psi_i(r) q_i(t),$$

gdzie $\psi(r)$ oznacza liniowo niezależne funkcje wektora r .

3. Badanie rezonansów pobocznych za pomocą kombinowanej metody Ritz — uśredniania

Do obliczeń teoretycznych wykorzystałem przybliżoną metodę Ritz — uśredniania ($R-A$) [7]. Metoda ta pozwala badać zarówno stany ustalone, jak i nieustalone, a więc i obszary przyciągania. W pierwszym etapie rozpatruje się tu drgania swobodne układu zachowawczego nieliniowego, dla którego równania ruchu zapiszemy w postaci

$$(3.1) \quad \varepsilon_{ic} \equiv m_i \ddot{q}_i + \sum_{k=1}^n c_{ik} \dot{q}_k + f_i(q_1, \dots, q_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ogólne rozwiązanie układu zachowawczego (3.1) zakładamy w pierwszym przybliżeniu w formie

$$(3.2) \quad q_i(t) = \sum_{s=1}^n a_s \bar{b}_{is} \cos \bar{\omega}_s t, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

i żądamy, aby nieznanne $\bar{\omega}_s, \bar{b}_{is}$ w rozwiązaniu (3.2) spełniały zależności (wykorzystana uogólniona metoda Ritz lub procedura bilansu harmonicznego)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon_{ic}(t) \cos \bar{\omega}_s t dt = 0, \quad i, s = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie $\varepsilon_{ic}(t)$ pozostałości równań (3.1) po podstawieniu przybliżonego rozwiązania (3.2). Otrzymujemy w ten sposób układ nieliniowych równań algebraicznych z niewiadomymi

$\bar{\omega}_s, \bar{b}_{is}$. Rozwiązanie, możliwe na ogół tylko na drodze numerycznej, daje nam szukane współczynniki — «sprzężone» nieliniowe częstości i postacie własne, jako funkcje wszystkich amplitud a_1, \dots, a_n :

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_s &= \bar{\omega}_s(a_1, \dots, a_n), \\ \bar{b}_{is} &= \bar{b}_{is}(a_1, \dots, a_n), \quad i, s = 1, 2, \dots, n; \bar{b}_{1s} = 1.\end{aligned}$$

W drugim etapie metody $R-A$ rozwiązania ogólnego układu (2.1) poszukujemy w postaci

$$(3.3) \quad q_i = \sum_{s=1}^p a_s \bar{b}_{is} \cos \theta_s + C_i \cos \nu t, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$s = 1, 2, \dots, p, p \leq n,$$

gdzie $\theta_s = \bar{\omega}_s t + \phi_s$, i stosujemy procedurę metody uśredniania [3]. Zgodnie z tą procedurą otrzymujemy równania:

$$(3.4a) \quad \frac{da_s}{dt} = \frac{1}{M_{ss} \bar{\omega}_s} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i=1}^n \bar{b}_{is} (\Delta f_i + \varphi_i) \sin \theta_s dt \equiv D_s(a_1, \dots, a_p, \varphi),$$

$$(3.4b) \quad \frac{d\varphi_s}{dt} = \frac{1}{M_{ss} a_s \bar{\omega}_s} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i=1}^n \bar{b}_{is} (\Delta f_i + \varphi_i) \cos \theta_s dt \equiv \Delta \omega_s(a_1, \dots, a_p, \varphi),$$

gdzie

$$\begin{aligned}M_{ss} &= \sum_{i=1}^n m_i \bar{b}_{is}^2, \quad s = 1, 2, \dots, p, \\ \Delta f_i &= f_i[a_1 \bar{b}_{11} \cos \theta_1 + C_1 \cos \nu t, \dots, a_n \bar{b}_{ns} \cos \theta_s + C_n \cos \nu t] + \\ &\quad - f_i[a_1 \bar{b}_{11} \cos \theta_1, \dots, a_n \bar{b}_{ns} \cos \theta_s].\end{aligned}$$

Ponieważ rozpatrujemy zakresy częstości z dala od głównych rezonansów, przyjmujemy się, że amplitudy C_i spełniają równania:

$$(3.5) \quad -m_i C_i \nu^2 + \sum_{k=1}^n c_{ik} C_k = P_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Rezonans poboczny otrzymujemy, wtedy gdy w rozwiązaniu (3.3) chociaż jedna z amplitud a_s nie jest równa zero, tj. $da_s/dt \neq 0$ dla $a_s \neq 0$. Wartości amplitud $a_s = a_s(\nu)$, $s = 1, 2, \dots, p$, otrzymamy z równań (3.4a) dla stanu ustalonego:

$$(3.6a) \quad \frac{da_s}{dt} = D_s(a_1, a_2, \dots, a_p, \phi) = 0$$

oraz z dodatkowego równania:

$$(3.6b) \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^p (\bar{\omega}_s + \Delta \omega_s) n_s - \nu = 0$$

gdzie $\Delta\omega_s$ oznacza poprawki częstości poszczególnych harmoniczych w (3.3)

$$(3.7) \quad \phi = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^p n_s \phi_{os}.$$

Ostatnia z równości (3.7) wynika z faktu że rezonanse poboczne mogą pojawić się tylko w tych przypadkach, dla których spełniona jest relacja

$$(3.8) \quad \nu = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^p n_s \check{\omega}_s,$$

gdzie $\check{\omega}_s = \bar{\omega}_s + \Delta\omega_s$, a $N = 1, 2, 3, \dots$, $n_s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ — liczby całkowite odpowiednio dobrane do formy funkcji nieliniowych.

Ostatecznie rozwiązanie odpowiadające rezonansom pobocznym będzie następujące:

$$(3.9) \quad q_i = \sum_{s=1}^p a_s \bar{b}_{is} \cos[(\bar{\omega}_s + \Delta\omega_s)t + \phi_{os}] + C_i \cos \nu t, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Relacja (3.8) nie precyzuje jeszcze typu rezonansu, tj. jakie wartości przybierają liczby n_s przy danym typie nieliniowości. Udało się wykazać, że wyznaczenie wszystkich kombinacji liczb n_s , tj. wszystkich typów rezonansów pobocznych, można sprowadzić do stosunkowo prostej procedury, mianowicie: weźmy nieliniowe funkcje reprezentujące siły sprężyste oraz siły tłumienia występujące w uśrednionych równaniach (3.4) i, podstawiając rozwiązanie (3.3), rozwińmy je na uogólniony szereg Fouriera:

$$(3.10) \quad \sum_{i=1}^n \bar{b}_{is} (\Delta f_i + \varphi_i) = p \delta^{(s)} + \sum_{i=1}^p [p_i^{(s)} \cos \theta_i + g_i^{(s)} \sin \theta_i] + \\ + \sum_{\bar{m}} p_{m_1, m_2}^{(s)} \dots \cos(m_1 \theta_1 + \dots + m_p \theta_p + m_v \nu t) + \\ + \sum_{\bar{m}} g_{m_1, m_2}^{(s)} \dots \sin(m_1 \theta_1 + \dots + m_p \theta_p + m_v \nu t) + p_v^{(s)} \cos \nu t + g_v^{(s)} \sin \nu t,$$

gdzie $\sum_{\bar{m}}$ oznaczają sumy po wszystkich $m_1, \dots, m_p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ za wyjątkiem przypadku, kiedy jedna z wartości $m = 1$, a pozostałe są równe zero.

Warunkiem koniecznym istnienia niezerowych amplitud a_s (w stanie ustalonym), jest znikanie członów z $\sin \theta_s$ w (3.4a). Ponieważ dla układów dysypacyjnych $g_i^{(s)} \neq 0$, więc aby spełnić ten warunek musimy znaleźć taką kombinację współczynników $m_1, m_2, \dots, m_p, m_v$ w wyrażeniach $\cos(m_1 \theta_1 + \dots + m_p \theta_p + m_v \nu t)$ lub $\sin(m_1 \theta_1 + \dots + m_p \theta_p + m_v \nu t)$, aby uzyskać dodatkowe człony z $\sin \theta_s$, tzn. jeśli spełnimy warunek:

$$(3.11) \quad \sum_{i=1}^p m_i \theta_i + m_v \nu t = \theta_s + \phi_s, \quad s = 1, 2, \dots, p.$$

Równość (3.11) będzie spełniona jeśli między ν a częstościami $\check{\omega}_s = d\theta_s/dt$, $s = 1, 2, \dots, p$, znajdzie relacja (3.7), przy n_1, n_2, \dots, n_s wynikających z m_1, \dots, m_p w rozwinięciu (3.10).

W rezultacie uzyskamy dodatkowe człony z $\sin \theta_s$, a rozwinięcie (3.10) można przedstawić następująco:

$$\sum_{i=1}^n \bar{b}_{is} (\Delta f_i + \varphi_i) = p_0^{(s)} + \sum_{s=1}^p [(p_i^{(s)} + p_{ic}^{(s)}) \cos \theta_i + (g_i^{(s)} + g_{ic}^{(s)}) \sin \theta_i] + \text{wyższe harmoniczne.}$$

Równania (3.6a) przedstawiają się teraz następująco:

$$(3.12) \quad g_s^{(s)} + g_{sc}^{(s)} = 0, \quad s = 1, 2, \dots, p.$$

Postępowanie takie pozwala wykryć wszystkie kombinacje liczb n_s w (3.8) dla danego typu funkcji nieliniowych, a więc wszystkie typy rezonansów pobocznych.

Należy zaznaczyć, że nie są to warunki dostateczne, gdyż z istnienia dodatkowych wyrazów $g_{sc}^{(s)}$ nie wynika jeszcze istnienie rezonansów pobocznych. Równość (3.12) będzie spełniona tylko wtedy, gdy $g_s^{(s)}$ i $g_{sc}^{(s)}$ będą różnych znaków.

4. Rezonanse poboczne w układzie o dwóch stopniach swobody

Szczegółowe obliczenia teoretyczne i badania analogowe wykonano dla pewnego typu układu nieliniowego o dwóch stopniach swobody, złożonego z dwóch mas połączonych więzią sprężystą typu Duffinga, w przypadku występowania liniowego tłumienia, wzbudzanego siłą harmoniczną o stałej amplitudzie. Równania ruchu takiego układu są następujące:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} m_1 \frac{d^2 q_1}{dt^2} + k_1 q_1 + k_{12}(q_1 - q_2) + \bar{\mu} \bar{l} \left[\frac{dq_1}{dt} - \frac{dq_2}{dt} \right] + \bar{\mu} (q_1 - q_2)^3 &= \bar{P} \cos \bar{\nu} t, \\ m_2 \frac{d^2 q_2}{dt^2} + k_{12}(q_2 - q_1) + \bar{\mu} \bar{l} \left[\frac{dq_2}{dt} - \frac{dq_1}{dt} \right] + \mu (q_2 - q_1)^3 &= 0. \end{aligned}$$

Wprowadzając bezwymiarowy czas $\tau = \sqrt{k_{12}/m_2} t$ równania ruchu przybierają postać:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 q_1}{d\tau^2} + \kappa^2 q_1 + \gamma (q_1 - q_2) + \mu \gamma l \left[\frac{dq_1}{d\tau} - \frac{dq_2}{d\tau} \right] + \mu \gamma (q_1 - q_2)^3 &= P \cos \nu \tau \\ \frac{d^2 q_2}{d\tau^2} + q_2 - q_1 - \mu l \left[\frac{dq_1}{d\tau} - \frac{dq_2}{d\tau} \right] - \mu (q_1 - q_2)^3 &= 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \gamma &= m_2/m_1, & \kappa^2 &= k_1 \gamma / k_2, & \mu &= \bar{\mu} / k_{12}, \\ l &= \bar{l} \sqrt{k_{12}/m_2}, & \bar{\nu} &= \nu \sqrt{m_2/k_{12}}, & P &= \bar{P}/m_1 \sqrt{m_2/k_{12}}. \end{aligned}$$

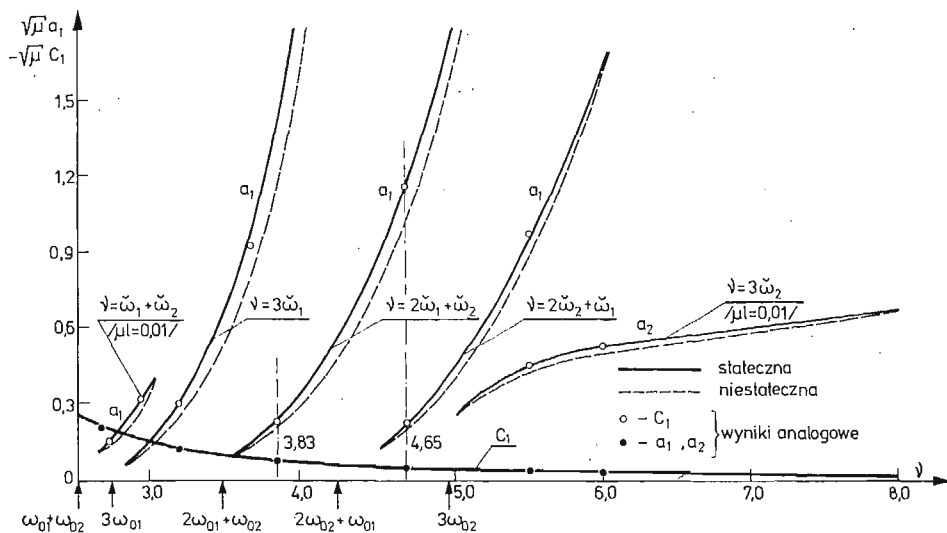
W obecnej pracy rozważam zagadnienie rezonansów pobocznych występujących w pewnych obszarach częstości ν , w których możliwe jest stateczne rozwiązanie harmoniczne o częstości siły wymuszającej:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} q_1 &= C_1 \cos(\nu \tau + \phi_1), \\ q_2 &= C_2 \cos(\nu \tau + \phi_2), \end{aligned}$$

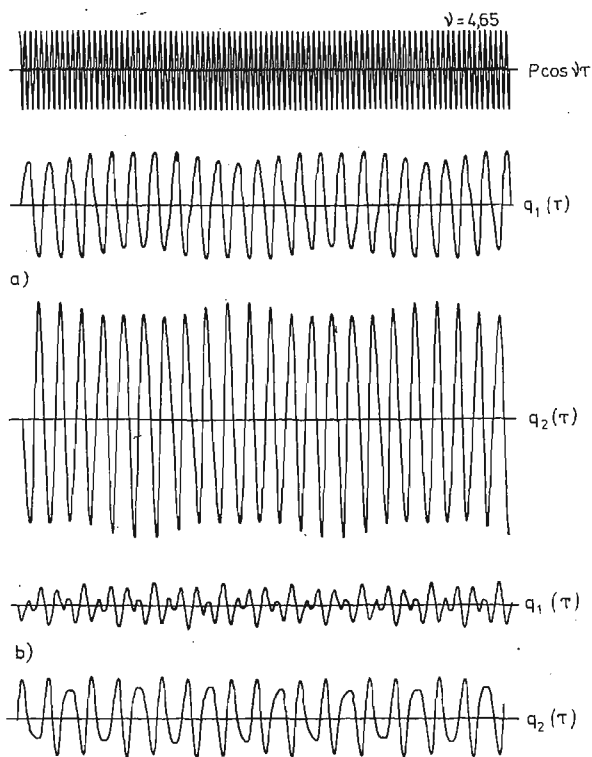
jak również stateczne rozwiązanie odpowiadające rezonansom pobocznym, które w pier-

wszym przybliżeniu zakładamy w postaci:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} q_1 &= a_1 \cos(\check{\omega}_1 \tau + \phi_{01}) + a_2 \cos(\check{\omega}_2 \tau + \phi_{02}) + C_1 \cos \nu \tau, \\ q_2 &= a_1 \bar{b}_{21} \cos(\check{\omega}_1 \tau + \phi_{01}) + a_2 \bar{b}_{22} \cos(\check{\omega}_2 \tau + \phi_{02}) + C_2 \cos \nu \tau. \end{aligned}$$



Rys. 1



Rys. 2

Metodyka przedstawiona w rozdz. 3 pozwoliła wykryć, że dla rozważanego przykładu możliwe są następujące rezonanse poboczne: rezonanse prawie-periodyczne $2\check{\omega}_1 + \check{\omega}_2$, $2\check{\omega}_2 + \check{\omega}_1$, $\check{\omega}_1 + \check{\omega}_2$, oraz rezonanse periodyczne subharmoniczne: $3\check{\omega}_1$ i $3\check{\omega}_2$ [1].

Szczegółowe obliczenia wykonano dla przykładu liczbowego scharakteryzowanego danymi: $\omega_{01} = 0,915$, $\omega_{02} = 1,645$, $\gamma = 0,279$, $\kappa^2 = 2,27$, $\mu l = 0,02$, $\mu P^2 = 1$.

Charakterystyki amplitudowo-częstościowe $a_1 = a_1(\nu)$ znalezione za pomocą metody Ritza — uśredniania według wzorów (3.6) dla wymienionych rezonansów pobocznych pokazano na rys. 1. Widzimy, że w pewnych przedziałach częstości ν , możemy zależnie od warunków początkowych otrzymać trzy różne typy odpowiedzi ustalonej. Np. przy częstości $\nu = 4,65$ mamy:

- odpowiedź prawie-periodyczną typu $\nu = 2\check{\omega}_1 + \check{\omega}_2$,
- odpowiedź prawie-periodyczną typu $\nu = 2\check{\omega}_2 + \check{\omega}_1$,
- odpowiedź harmoniczną o częstości siły wymuszającej.

Przebiegi czasowe $q_1(\tau)$ i $q_2(\tau)$ charakterystyczne dla odpowiedzi prawie-periodycznych pokazane są na rys. 2.

Aby znaleźć odpowiedź na pytanie, które z trzech możliwych statecznych rozwiązań będzie generowane przez układ, musimy wyznaczyć obszary przyciągania każdego z nich.

5. Wyznaczanie obszarów przyciągania za pomocą metody R — A i procedury numerycznej

Zadanie wyznaczania obszarów przyciągania rezonansów pobocznych sprowadza się w ogólnym przypadku do scałkowania równań (3.6).

W przypadku rezonansów periodycznych równania (3.6) przybierają postać:

$$(5.1) \quad \frac{da}{dt} = D_1(a, \phi), \quad \frac{d\phi}{dt} = D_2(a, \phi).$$

Zadanie jest dwuparametrowe (a, ϕ), a obszarów przyciągania poszukujemy na płaszczyźnie Hayashiego, tj. płaszczyźnie tak dobranej, aby stanom ustalonym odpowiadały punkty osobliwe równań (5.1). Separatryse, czyli krzywą rozdzielającą obszary o różnym charakterze odpowiedzi, znajdziemy przez numeryczne scałkowanie równań (5.1) w ujemnym czasie [3], z warunkami początkowymi z najbliższego sąsiedztwa niestatecznego punktu osobliwego.

Metoda ta stosowana była efektywnie do wyznaczania obszarów przyciągania rezonansów periodycznych, gdy zagadnienie było dwuwymiarowe, a separatrysa linią płaską.

W obecnej pracy podjęto próbę wyznaczenia obszarów przyciągania rezonansów prawie-periodycznych dwuczęstościowych, a więc rozwiązania zagadnienia określonego trzema parametrami (a_1, a_2, ϕ). Równania (3.6) są teraz następujące:

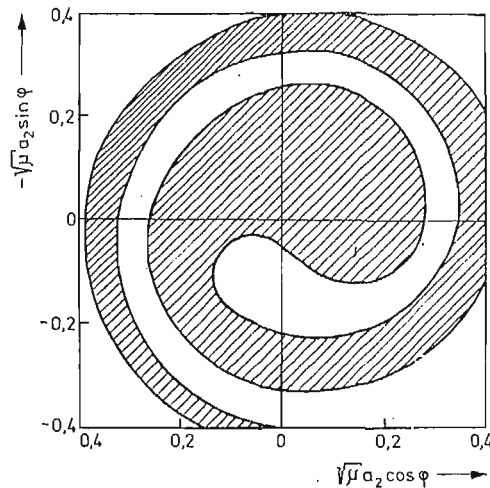
$$(5.2) \quad \begin{aligned} \frac{da_1}{dt} &= D_1(a_1, a_2, \phi), \\ \frac{da_2}{dt} &= D_2(a_1, a_2, \phi), \\ \frac{d\phi}{dt} &= D_3(a_1, a_2, \phi). \end{aligned}$$

Ponieważ zagadnienie jest trzyparametrowe, zaistniała konieczność uogólnienia znanych dotąd metod wyznaczania obszarów przyciągania i wyboru odpowiedniej przestrzeni trójwymiarowej, takiej aby stanom ustalonym odpowiadały punkty osobliwe równań (5.2), a w której separatrysa jest powierzchnią. Przestrzenią spełniającą te warunki może być trójwymiarowa przestrzeń kartezjańska o współrzędnych

$$(5.3) \quad (a_1, a_2 \cos \phi, a_2 \sin \phi).$$

Dla wyznaczenia separatrissy w przypadku rezonansów periodycznych wystarczyło znalezienie dwóch krzywych całkowych zdążających z obu stron do niestatecznego punktu osobliwego przy $t \rightarrow \infty$.

Zadanie komplikuje się bardzo w przypadku rezonansów prawie-periodycznych. Separatrysa jest teraz powierzchnią wyznaczoną przez nieskończoną ilość trajektorii zdążających do niestatecznego punktu osobliwego przy $t \rightarrow \infty$. Możemy ją zatem wyznaczyć tylko w sposób przybliżony. Aby to uczynić, musimy znaleźć wiele trajektorii leżących na niej, i opierając się na nich, wyznaczyć separatrysę. W tym celu należy scałkować numerycznie w ujemnym czasie równania (5.2), z warunkami początkowymi z najbliższego sąsiedztwa niestatecznego punktu osobliwego.



Rys. 3

Na rys. 3 pokazane są obszary przyciągania rezonansu prawie-periodycznego $\nu = 2\check{\omega}_1 + \check{\omega}_2$ (obszar zakreskowany), na płaszczyźnie $(a_2 \cos \phi, a_2 \sin \phi)$ dla ustalonej wartości $a_1 = 0,20$ i częstości wymuszenia $\nu = 3,83$. Należy dodać, że dla malejących wartości amplitudy a_1 obszary przyciągania tego rezonansu zmniejszają się i poniżej $a_1 = 0,14$ wszystkie warunki początkowe prowadzą do rozwiązania harmonicznego o częstości siły wymuszającej ν .

Zgodnie z postawionym zadaniem, mając określone obszary przyciągania w przestrzeni (5.3), przejdziemy następnie do znalezienia ich w przestrzeni warunków początkowych.

Dla rozważanego układu o dwóch stopniach swobody istnieją cztery warunki początkowe — dwa na przemieszczenia:

$$(5.4) \quad \begin{aligned} q_1(0) &= a_1 \cos \phi_1 + a_2 \cos \phi_2 + C_1, \\ q_2(0) &= a_1 \bar{b}_{21} \cos \phi_1 + a_2 \bar{b}_{22} \cos \phi_2 + C_2 \end{aligned}$$

i dwa na prędkości:

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \dot{q}_1(0) &= -a_1 \dot{\omega}_1 \sin \phi_1 - a_2 \dot{\omega}_2 \sin \phi_2, \\ \dot{q}_2(0) &= -a_1 \bar{b}_{21} \dot{\omega}_1 \sin \phi_1 - a_2 \bar{b}_{22} \dot{\omega}_2 \sin \phi_2. \end{aligned}$$

Jeśli w wyrażeniach (5.4) i (5.5) podstawimy parametry dla stanu ustalonego (lub z jego najbliższego sąsiedztwa), to w czterowymiarowej przestrzeni warunków początkowych $[q_1(0), q_2(0), \dot{q}_1(0), \dot{q}_2(0)]$ znajdziemy obszary przyciągania badanego pobocznego rezonansu prawie-periodycznego $2\dot{\omega}_1 + \dot{\omega}_2$.

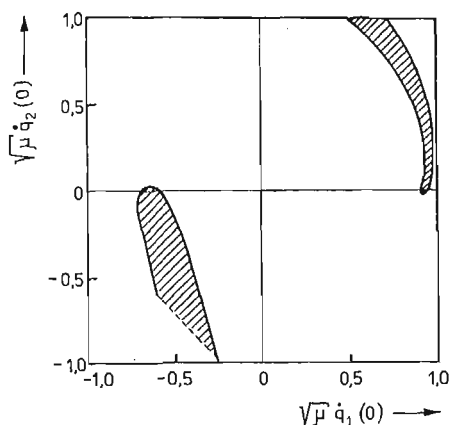
W obecnej pracy postawiono pytanie, czy na płaszczyźnie $[\dot{q}_1(0), \dot{q}_2(0)]$ są obszary przyciągania tego rezonansu przy założeniu, że przemieszczenia mas w chwili początkowej są równe zeru, tzn.:

$$(5.6) \quad \begin{aligned} a_1 \cos \phi_1 + a_2 \cos \phi_2 + C_1 &= 0, \\ a_1 \bar{b}_{21} \cos \phi_1 + a_2 \bar{b}_{22} \cos \phi_2 + C_2 &= 0. \end{aligned}$$

Taki przypadek może być interpretowany fizycznie jako efekt przyłożenia w chwili początkowej do mas układu impulsów sił.

Wykorzystując poprzednio uzyskane wyniki — rys. 3, wyznaczmy obszary przyciągania na płaszczyźnie $[\dot{q}_1(0), \dot{q}_2(0)]$. Każdy punkt leżący na separatrysie określony jest przez trzy parametry a_1, a_2, ϕ . Poza tym dla tego typu rezonansu prawdziwy jest związek:

$$(5.7) \quad \phi = 2\phi_1 + \phi_2.$$



Rys. 4

Aby więc istniały obszary przyciągania na płaszczyźnie prędkości początkowych przy zerowych przemieszczeniach początkowych, musi być równocześnie z (5.7) spełniony warunek (5.6). Punkty, dla których spełniona jest równość (5.7) przy równocześnie spełnio-

nym warunku (5.6), zostały znalezione numerycznie. Następnie wyznaczono odpowiednie obszary przyciągania na podstawie wzorów (5.5).

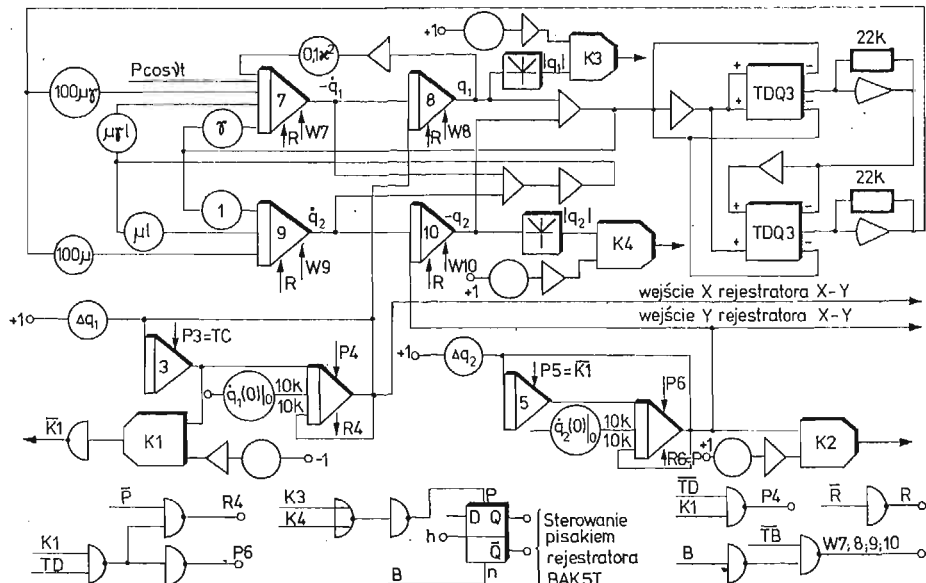
Rys. 4 przedstawia obszary przyciągania pobocznego rezonansu prawie-periodycznego $\nu = 2\check{\omega}_1 + \check{\omega}_2$ na płaszczyźnie prędkości początkowych, przy zerowych przemieszczeniach mas układu w chwili początkowej.

6. Wyznaczenie obszarów przyciągania za pomocą maszyn analogowych i automatycznego układu pomiarowo-rejestrującego

Wobec pracochłonności i małej efektywności metod numerycznych w wyznaczaniu obszarów przyciągania na płaszczyźnie prędkości początkowych — szczególnie dla przypadku rezonansów prawie-periodycznych, jak również w celu porównania wyników teoretycznych z doświadczalnymi, zadanie to rozwiązano na maszynie analogowej MEDA 41TC, modelując ściśle równania ruchu (4.2).

Mogą one być badane w sposób tradycyjny. Oznacza to ręczne wprowadzanie nastaw na wszystkie potencjometry, śledzenie rozwiązania na ekranie oscyloskopu, nanoszenie punktów o współrzędnych, których wartości odpowiadają rozwiązaniom rezonansowym. Obszary przyciągania interesującego nas rezonansu pobocznego można znaleźć (jeśli istnieją), zagęszczając odpowiednio punktami płaszczyznę $[\dot{q}_1(0), \dot{q}_2(0)]$.

Opisana powyżej metodyka wyznaczania obszarów przyciągania, aczkolwiek jest znacznie szybsza od cyfrowej, jednak także zajmuje dosyć dużo czasu. Dlatego też dla ograniczenia do minimum czynności manualnych w czasie prowadzenia badań i zmniejszenia ich pracochłonności, opracowany został specjalny układ pomiarowo-rejestrujący, który automatycznie wyznacza obszary przyciągania na płaszczyźnie prędkości początkowych. Czynności manualne sprowadzają się tu do ustalenia częstości siły wymuszającej oraz wybrania górnej i dolnej granicy $\dot{q}_1(0)$ i $\dot{q}_2(0)$.



Rys. 5

Schemat układu analogowego do rozwiązania równań (4.2) oraz układu pomiarowo-rejestrującego pokazano na rys. 5. Do realizacji wymuszenia harmonicznego zastosowano generator funkcji $f(t) = \cos \nu t$, o stabilizowanej amplitudzie i płynnej zmianie częstości.

Zadawanie warunków początkowych $\dot{q}_1(0)$ i $\dot{q}_2(0)$ realizowane jest automatycznie. Wartość $\dot{q}_1(0)$ podawana za pomocą tego układu określona jest wzorem

$$\dot{q}_1(0) = \dot{q}_1(0)|_0 + i\Delta q_1,$$

gdzie $\dot{q}_1(0)|_0$ oznacza wartość $\dot{q}_1(0)$ w kroku zerowym, Δq_1 wielkość przyrostu $\dot{q}_1(0)$, zaś $i = 0, 1, \dots, k$ liczbę kroków.

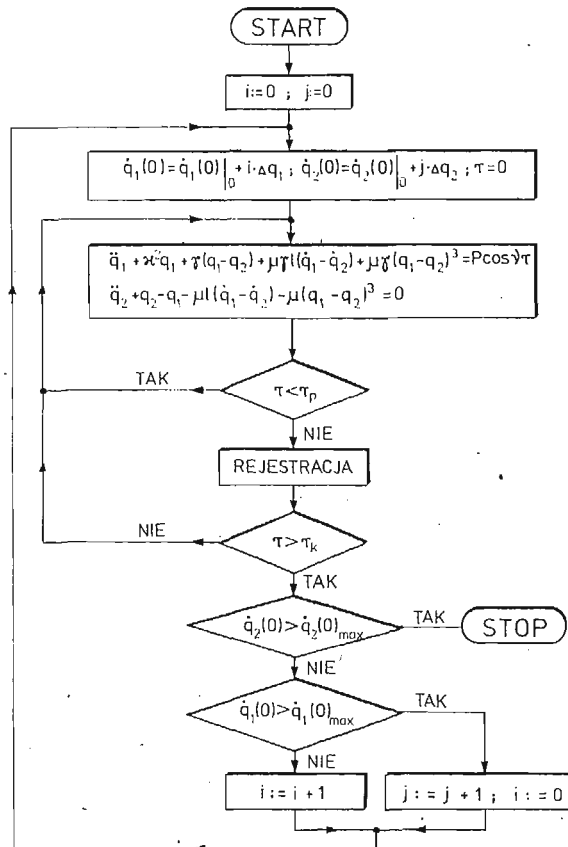
Układ jest tak zbudowany, że jednemu pełnemu cyklowi zmian $\dot{q}_1(0)$ odpowiada stała wartość $\dot{q}_2(0)$ i zmienia się w chwili, gdy będzie spełniony warunek

$$\dot{q}_1(0)|_0 + i\Delta q_1 \geq \dot{q}_1(0)|_{\max}.$$

Bieżąca wartość warunku początkowego $\dot{q}_2(0)$ jest określona przez

$$\dot{q}_2(0) = \dot{q}_2(0)|_0 + j\Delta q_2,$$

gdzie $\dot{q}_2(0)|_0$ oznacza wartość $\dot{q}_2(0)$ w kroku zerowym, Δq_2 wielkość przyrostu $\dot{q}_2(0)$, zaś $j = 0, 1, \dots, m$ liczbę kroków.

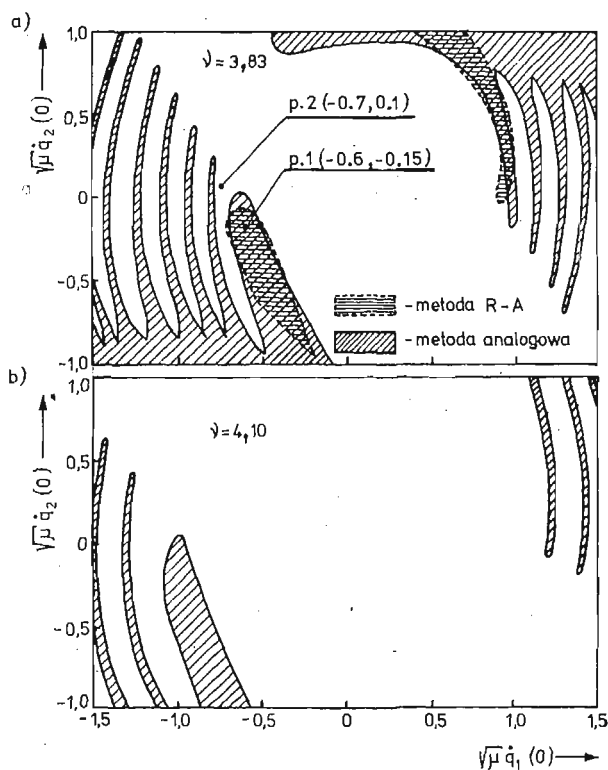


Rys. 6

Osiągnięcie przez układ górnej granicy badanego przedziału, tzn. gdy będzie spełniony warunek

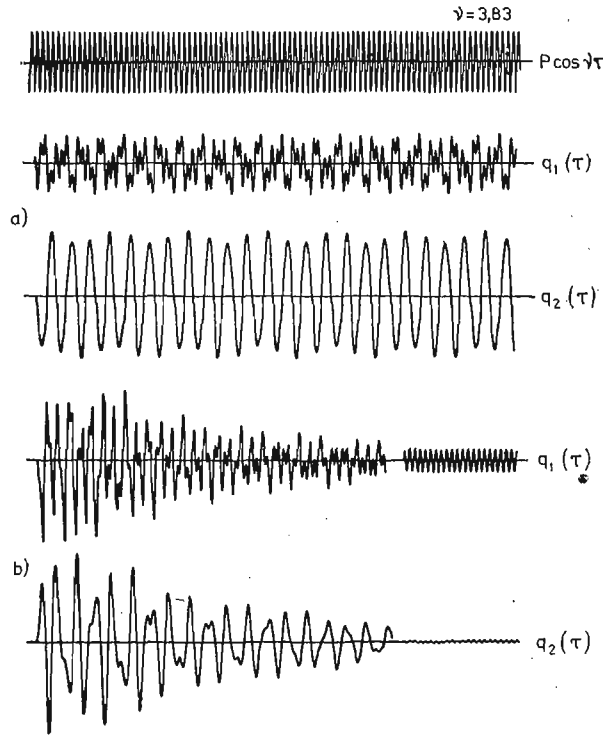
$$\dot{q}_2(0)|0 + j\Delta q_2 \geq q_2(0)|_{\max},$$

jest sygnałem do zatrzymania dalszej pracy maszyny. Będzie to oznaczać, że przebadany został układ dla określonych przedziałów wartości początkowych $\dot{q}_1(0)$ i $\dot{q}_2(0)$ z wybranymi krokami Δq_1 i Δq_2 . Wartości $\dot{q}_1(0)$ i $\dot{q}_2(0)$ podawane są także na odpowiednie wejścia $X = \dot{q}_1(0)$ i $Y = \dot{q}_2(0)$ rejestratora BAK 5T. Pisak rejestratora jest sterowany w ten sposób, że jeśli mamy odpowiedź rezonansową wówczas zaznaczy punkt na wykresie, w przeciwnym przypadku nic nie zaznaczy.



Rys. 7

Rys. 6 przedstawia algorytm programu dla rozwiązania postawionego zadania, a więc automatycznego wyznaczania obszarów przyciągania na płaszczyźnie prędkości początkowych. Rys. 7 przedstawia obszary przyciągania rezonansu prawie-periodycznego $\nu = 2\check{\omega}_1 + \check{\omega}_2$ przy częstościach $\nu = 3,83$ i $4,10$, wyznaczone przy zastosowaniu proponowanego układu. Na rysunku tym pokazane są także obszary przyciągania tego rezonansu znalezione metodą Ritza — uśredniania. Łatwo zauważyć, że są one tylko częścią obszaru wyznaczonego doświadczalnie. Na rys. 8 pokazane są przebiegi czasowe $q_1(\tau)$ i $q_2(\tau)$ prowadzące do różnych rozwiązań: prawie-periodycznego $2\check{\omega}_1 + \check{\omega}_2$ przy warunkach początkowych — punkt 1 na rys. 7, bądź harmonicznego o częstości wymuszenia przy warunkach początkowych — punkt 2 na rys. 7.



Rys. 8

7. Wnioski

Przedstawiony w niniejszej pracy problem generowania rezonansów pobocznych przez impulsy sił w nieliniowych układach drgających o wielu stopniach swobody, związany jest ściśle z zagadnieniem wyznaczania obszarów przyciągania tychże rezonansów i został rozwiązany w dwojaki sposób:

— wykorzystując teoretyczną, przybliżoną metodę badania nieliniowych układów drgających oraz odpowiednią technikę numeryczną,

— przez zamodelowanie ścisłych równań ruchu na maszynie analogowej.

Wyniki przedstawione na rys. 4 i 7 pozwalają stwierdzić, że występują obszary przyciągania pobocznego rezonansu prawie-periodycznego $2\check{\omega}_1 + \check{\omega}_2$, przy założeniu zerowych przemieszczeń i przy danych odpowiednich prędkościach początkowych. Wynika z tego, że tego typu rezonans może być generowany przez impulsy sił.

Wykorzystana przybliżona teoretyczna metoda Ritza — uśredniania nadaje się do efektywnego wyznaczania obszarów przyciągania i daje wyniki bliskie analogowym. Jednak wyznaczone w ten sposób obszary przyciągania są tylko częścią obszaru wyznaczonego doświadczalnie. Prócz tego wymaga ona pracochłonnych obliczeń i stosowania specjalnych technik numerycznych.

Zastosowanie maszyn analogowych do rozwiązania postawionego zadania okazało się bardzo efektywne, głównie ze względu na opracowanie specjalnego układu pomiarowo-rejestrującego, który automatycznie wyznacza obszary przyciągania na płaszczyźnie prędkości początkowych. Pozwoliło to na wielokrotne zmniejszenie czasochłonności w stosunku do analogicznych obliczeń numerycznych.

Literatura cytowana w tekście

1. J. BAJKOWSKI, *Obszary przyciągania rezonansów pobocznych w nieliniowych układach drgających*, Prace IPPT PAN 6 (1977).
2. J. BAJKOWSKI, W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, *Domains of attraction of the secondary periodic and combination resonances in nonlinear two-degree-of-freedom system*, Int. Conf. on Nonlinear Oscill., Berlin 1975.
3. C. HAYASHI, *Nonlinear oscillations in physical systems*, McGraw-Hill., New York 1964.
4. W. S. LOUD, P. R. SETHNA, *Some explicit estimates for domains of attraction*, J. of Diff. Equat., 2,2 (1966), 158—172.
5. J. MĘDRZYCKI, *Technika analogowa i hybrydowa*, WNT, Warszawa 1974.
6. W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, *On the phenomenon of the combination resonance in nonlinear two-degree-of-freedom systems*, Int. J. Nonlinear Mech., 4,2 (1969), 335—359.
7. W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, *An approximate method of treating transients in nonlinear, multi-degree-of-freedom vibrating systems*, Int. Conf. Equa-diff 73, Bruksela 1973.

Резюме

ГЕНЕРИРОВАНИЕ СИЛОВЫМИ ИМПУЛЬСАМИ ПОВОЧНЫХ РЕЗОНАНСОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

В работе рассмотрено генерирование периодических и почти-периодических резонансов в нелинейных диссипативных колебательных системах, возбуждаемых гармоническими силами. Исследуется вопрос — могут ли силовые импульсы, приложенные к такой системе, привести к изменению гармонического колебания с малой амплитудой в один из побочных резонансов со значительной амплитудой колебаний. Предполагается, что в результате силового импульса возникают начальные скорости при нулевых начальных перемещениях системы. Представленная задача тесно связана с вопросом об определении области притягивания побочных резонансов. Даются для решения: а) используя теоретический приближенный метод усреднения Рунге, б) посредством моделирования точных уравнений движения на аналоговой вычислительной машине и разработки специальной измерительно-регистрирующей системы, которая автоматически определяет области притягивания на плоскости начальных скоростей.

Summary

SECONDARY RESONANCES GENERATION BY FORCE IMPULSES IN NONLINEAR VIBRATING SYSTEMS

There are examined periodic and almost-periodic secondary resonances generations in nonlinear dissipative vibrating systems excited by harmonic forces. It was tested if force impulses applied to the system can cause alteration from small amplitude response to response corresponding with one of secondary re-

sonances at significant vibration amplitude. It was assumed that initial velocities are resulting from the force impulses, the initial displacements of the system taken equal to zero. The problem was strongly connected with the problem of determining the domains of attraction and was solved by two methods: a) according to original, approximate Ritz-averaging method, b) by modelling the original equation of motion on analog computer and preparing measure-recording system, which automatically determines domains of attraction in the initial velocities plane.

ZAKŁAD UKŁADÓW MECHANICZNYCH IPPT PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 23 lutego 1978 r.
