

OPTIMALIZACJA KSZTAŁTU PRĘTA ŚCISKANEGO Z UWZGLĘDNIENIEM CIĘŻARU WŁASNEGO METODĄ PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO*

JAN BŁACHUT (KRAKÓW)

1. Wstęp

Niniejsza praca poświęcona jest optymalnemu kształtowaniu pręta sprężystego poddanego ścisłaniu siłą skupioną oraz siłami rozłożonymi wzdłuż długości pręta, a pochodzącymi od ciężaru własnego. Poszukiwać będziemy maksymalnej siły krytycznej przy stałej objętości pręta i ograniczeniach nałożonych na przekrój poprzeczny. Rozpatrywać będziemy pełne nieliniowe równanie linii ugięcia. Otrzymane wyniki porównamy ze znanymi rozwiązaniami analitycznymi dla przypadku optymalnego kształtowania pręta sprężystego, ściskanego siłą o stałej wartości, ustalonym kierunku działania i punkcie przyłożenia (tak zwana siła eulerowska). Porównanie to dotyczyć będzie tych zagadnień w których pominięto wpływ ciężaru własnego.

Optymalizacji konserwatywnych zagadnień stateczności poświęcona jest znaczna liczba prac. Obszerny spis literatury zawierają między innymi publikacje [1—6]. Rozwiązanie ściśle zagadnienia optymalizacji pręta ściskanego siłą eulerowską przedstawiono w pracy [6], gdzie poszukiwano minimum objętości pręta przy danej sile krytycznej, powodującej utratę stateczności przez wyboczenie. W przypadku pręta płasko-zbieżnego o stałej wysokości otrzymano rozwiązanie w którym przekrój zmierzał do zera w punkcie przyłożenia siły krytycznej. Stosując bezpośrednie metody numeryczne optymalizacji w pracy [7] rozwiązano pewien problem optymalnego kształtowania pręta w stanie zakrytycznym przy dużych sprężystych ugięciach. Poszukiwano optymalnego stosunku giętej sztywności dwóch odcinków pręta o stałych przekrojach. Pręt ściskano daną siłą osiową, przy ustalonej jego objętości, a kryterium optymalności stanowiło w jednym przypadku minimum wychylenia końca pręta x_k , zaś w drugim — minimum kąta odchylenia tego końca od pionu.

W niniejszej pracy, w oparciu o zasadę optymalności Bellmana oraz metodę gradientową zaproponowaną przez CLAUDONA [8], przedstawione zostanie podejście numeryczne umożliwiające optymalizację pręta przy utracie stateczności (w oparciu o statyczne kryterium stateczności).

2. Sformułowanie zagadnienia

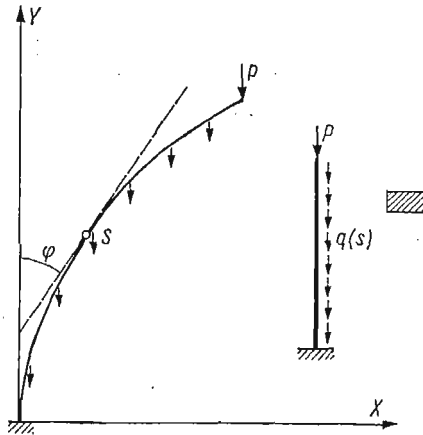
Rozpatrywać będziemy płaskozbieżny, sprężysty pręt jednostronnie sztywno utwierdzony obciążony siłą eulerowską P i ciężarem własnym (rys. 1).

* Praca wykonana została w ramach problemu węzłowego 05.12 pt. «Wytrzymałość i optymalizacja konstrukcji maszynowych i budowlanych», koordynowanego przez IPPT PAN.

Objętość takiego pręta wynosi

$$(1) \quad V = c \int_0^1 \alpha(s) ds,$$

gdzie $\alpha = EJ$; c — stała.



Rys. 1

Należy znaleźć:

$$(2) \quad \max P$$

przy

— stałej objętości

$$(3) \quad V_0 = \text{const}$$

gdzie $V_0 = V/c$;

— ograniczeniu nałożonym na poszukiwany przekrój $\alpha(s)$

$$(4) \quad \alpha_1 \leq \alpha(s) \leq \alpha_2,$$

gdzie $\alpha_1 \leq V_0 \leq \alpha_2$.

3. Równanie funkcyjne Bellmana

Rozwiązanie wariacyjnych zadań stateczności można sprowadzić do wyznaczenia minimum następującego funkcjonału [9]

$$(5) \quad k = \frac{\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} F^{(i)}(x, y, y') dx}{\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \Phi^{(i)}(x, y, y') dx}$$

gdzie $F^{(i)}$, $\Phi^{(i)}$ są to dostatecznie gładkie funkcje zmiennych x, y, y' . Krzywa realizująca ekstremum wyrażenia (5), powinna spełniać następujący układ równań różniczkowych [9]:

$$(6) \quad (F^{(i)} - t\Phi^{(i)})_{,y} - \frac{d}{dx} (F^{(i)} - t\Phi^{(i)})_{,y'} = 0$$

oraz równanie całkowe postaci

$$(7) \quad \sum_{l=1}^n \int_{x_{l-1}}^{x_l} (F^{(l)} - t\Phi^{(l)}) dx = 0,$$

gdzie t — parametr liczbowy.

Poniżej pokażemy, jak rozwiązać powyższe zadanie metodą programowania dynamicznego. W szczególności zamienimy funkcjonal (5) na funkcjonal addytywny oraz posłużymy się równaniem funkcyjnym Bellmana do wyznaczenia jego minimum.

Funkcjonal (5) ma w naszym przypadku postać:

$$(8) \quad P = \frac{\int_0^1 \left[\frac{\alpha}{2} (\varphi')^2 - c_1 \left(\int_s^1 \alpha(s') ds' \right) (1 - \cos \varphi) \right] ds}{\int_0^1 (1 - \cos \varphi) ds},$$

gdzie $\varphi' = \frac{d\varphi}{ds}$; $c_1 = \frac{12l^3}{Eb^2} \gamma$; γ — ciężar właściwy; b — wysokość przekroju; l — długość.

Programowanie dynamiczne pozwala wykluczyć z rozważań równanie (6). Szukaną krzywą $\varphi(s)$ i P poszukujemy w procesie minimalizacji funkcjonału (7), który w naszym przypadku można zapisać następująco:

$$(9) \quad R = \int_0^1 \left\{ \frac{\alpha}{2} (\varphi')^2 - \left[P + c_1 \left(\int_s^1 \alpha(s') ds' \right) \right] (1 - \cos \varphi) \right\} ds.$$

Zadanie polegające na wyznaczeniu obciążenia krytycznego P_{kr} dla danego rozkładu $\alpha(s)$ sprowadza się do minimalizacji funkcjonału (9) z uwzględnieniem warunku $\varphi(0) = 0$, przy czym P powinno przyjąć wartość najmniejszą.

Minimum funkcjonału (9) wyznaczać będziemy w procesie wieloetapowym dzieląc przedział całkowania $[0, 1]$ na N etapów o długości Δ każdy, tak, że $N \cdot \Delta = 1$. Etapy będziemy numerować od swobodnego końca posuwając się ku sztywnemu utwierdzeniu. To znaczy $N = H$ odpowiadać będzie początkowi procesu N -etapowego, zaś $N = 1$ ostatniemu krokowi w tym procesie. W dowolnym punkcie k wprowadzimy oznaczenia

$$(10) \quad \varphi_k = \varphi(\Delta); \quad \varphi'_k = \varphi'(k\Delta); \quad k = 1, \dots, N.$$

Pochodną $\varphi'(s)$ zastąpimy ilorazem różnicowym:

$$(11) \quad \varphi'_k(s) = \frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{\Delta}.$$

Warunek początkowy $\varphi(0) = 0$, (sztywne utwierdzenie), weźmiemy w postaci $\varphi_N = c$. Zastępując (9) sumą otrzymujemy

$$(12) \quad R \approx \sum_{k=1}^N \left[\frac{\alpha_k}{2} (\varphi'_k)^2 - \left(P + c_1 \sum_{i=1}^k \alpha_i \Delta \right) (1 - \cos \varphi_k) \right] \Delta.$$

Zapiszmy minimalną wartość sumy (12) dla N ostatnich kroków

$$(13) \quad f_N(c) = \min_{\varphi'_k} \sum_{k=1}^N \left[\frac{\alpha_k}{2} (\varphi'_k)^2 - \left(P + c_1 \sum_{i=k}^N \alpha_i \Delta \right) (1 - \cos \varphi_k) \right] \Delta.$$

Wielkość $f_N(c)$ nazywać będziemy dalej funkcją celu. Z zasady optymalności otrzymujemy następujące równanie funkcyjne

$$(14) \quad f_N(c) = \min_{\varphi'_N} \left\{ \left[\frac{\alpha_N}{2} (\varphi'_N)^2 - (P + c_1 \alpha_N \Delta)(1 - \cos \varphi_A) \right] \Delta + f_{N-1}(\varphi_{N-1}) \right\},$$

gdzie $\varphi_{N-1} = \varphi_N + \Delta \varphi'_N$.

Analogicznie otrzymujemy dla następnych etapów:

(15)

$$f_{N-1}(\varphi_{N-1}) = \min_{\varphi'_{N-1}} \left\{ \left[\frac{\alpha_{N-1}}{2} (\varphi'_{N-1})^2 - \left(P + c_1 \sum_{i=N-1}^N \alpha_i \Delta \right) (1 - \cos \varphi_{N-1}) \right] \Delta + f_{N-2}(\varphi_{N-2}) \right\},$$

.....

$$(16) \quad f_2(\varphi_2) = \min_{\varphi'_2} \left\{ \left[\frac{\alpha_2}{2} (\varphi'_2)^2 - \left(P + c_1 \sum_{i=2}^N \alpha_i \Delta \right) (1 - \cos \varphi_2) \right] \Delta + f_1(\varphi_2) \right\},$$

$$(17) \quad f_1(\varphi_1) = \min_{\varphi'_1} \left\{ \left[\frac{\alpha_1}{2} (\varphi'_1)^2 - \left(P + c_1 \sum_{i=1}^N \alpha_i \Delta \right) (1 - \cos \varphi_1) \right] \Delta \right\},$$

gdzie

$$\varphi_{N-2} = \varphi_{N-1} + \Delta \varphi'_{N-1}$$

.....

$$\varphi_1 = \varphi_2 + \Delta \varphi'_2$$

Rozwiązywanie równań funkcyjnych (14)–(17) prowadzimy posuwając się etapami od swobodnego końca ku utwierdzeniu, rozpoczynając od $f_1(\varphi_1)$ gdzie $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ są to dopuszczalne wartości zmiennej sterowania $\varphi(s)$.

4. Obliczanie siły krytycznej

Po jednorazowym wykonaniu procedury równania funkcyjnego Bellmana (14)–(19) otrzymujemy wartości $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}$, które realizują minimum wyjściowego problemu (14). Minimum to obliczamy dla dowolnej wartości P , przy ustalonym rozkładzie $\alpha(s)$. Siłę krytyczną otrzymamy dla $R = 0$. Wykorzystując fakt, iż R jest liniową funkcją P przeprowadzamy na wstępie jeden raz obliczenia dla dowolnej wartości P_1 . Otrzymane minimum wyrażenia (13) oznaczymy f_{N1} . Następnie powtarzamy te same obliczenia dla P_2 , a otrzymane minimum oznaczymy f_{N2} . Wtedy siłę krytyczną P_{kr} obliczamy z wyrażenia

$$(15) \quad P_{kr} = \frac{(P_2 - P_1)(0 - f_{N1})}{f_{N2} - f_{N1}} + P_1.$$

5. Metoda gradientowa — procedura obliczania przekroju optymalnego

Obliczenia (9)–(15) rozpoczynamy przyjmując stały przekrój $\alpha_0 = \text{const}$ tak, by

$$(16) \quad \int_0^1 \alpha_0 ds = 1.$$

Równocześnie siłę krytyczną wyznaczyć można z relacji

$$(17) \quad P_{kr} = \min \frac{\int_0^1 \left[\frac{\alpha}{2} (\varphi')^2 - c_1 \left(\int_{s'}^1 \alpha(s') ds' \right) (1 - \cos \varphi) \right] ds}{\int_0^1 (1 - \cos \varphi) ds}$$

Natomiast zgodnie z [8] będziemy poszukiwać «polepszonych» rozkładu masy w następującej postaci

$$(18) \quad \bar{\alpha}_1 = A \left[\alpha_0 + \varepsilon \left(\frac{\partial P_{kr}}{\partial \alpha} \right) \right],$$

gdzie ε — mały parametr, A — stała normująca taka, że

$$(19) \quad \int_0^1 A \alpha_1 ds = 1,$$

zaś $\frac{\partial P_{kr}}{\partial \alpha}$ należy rozumieć następująco:

$$(20) \quad \frac{\partial P_{kr}}{\partial \alpha} = \frac{\frac{1}{2} (\varphi')^2 - \left(c_1 \int_{s'}^1 ds' \right) (1 - \cos \varphi)}{\int_0^1 (1 - \cos \varphi) ds}$$

Z (19) otrzymujemy następującą postać stałej normującej

$$(21) \quad A = \frac{1}{\int_0^1 \left[\alpha_0 + \varepsilon \left(\frac{\partial P_{kr}}{\partial \alpha} \right) \right] ds}$$

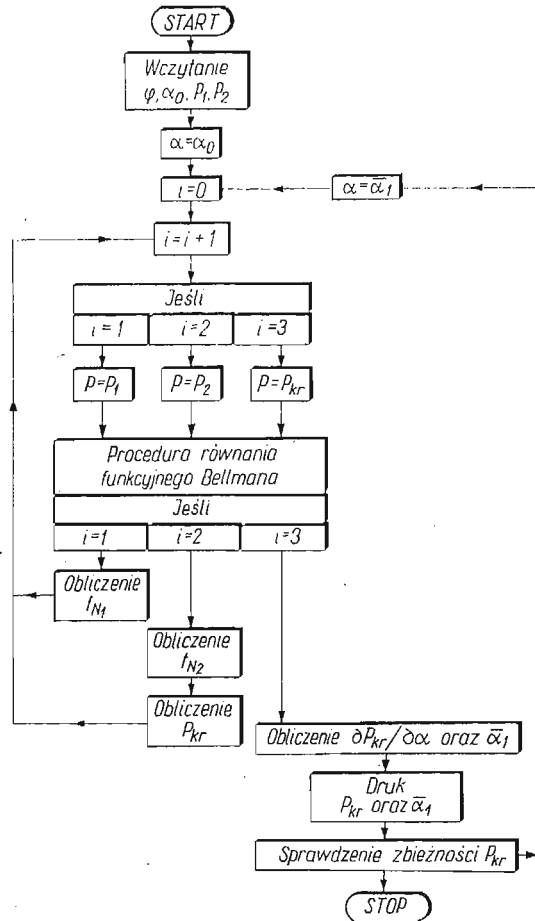
Wzory (18) i (21) dają w końcu następującą formułę na «przekrój polepszony»

$$(22) \quad \bar{\alpha}_1(s) = \frac{\alpha_0 + \varepsilon \left(\frac{\partial P_{kr}}{\partial \alpha} \right)}{\int_0^1 \left[\alpha_0 + \varepsilon \left(\frac{\partial P_{kr}}{\partial \alpha} \right) \right] ds}$$

Cały cykl obliczeń przebiega następująco:

Na wstępie startujemy z $\alpha_0 = 1$. W oparciu o wzory (9) - (15) wyznaczamy siłę krytyczną dla danego przekroju $\alpha_0(s)$, powtarzając dwukrotnie procedurę równania funkcyjnego. Przy trzecim powtórzeniu wyznaczamy $\varphi(s)$ dla obciążenia krytycznego. Dalej posługując się wzorami (16) - (22) wyznaczamy polepszony przekrój, który wstawiamy w miejsce $\alpha_0(s)$ rozpoczynając poprzez dwukrotne powtórzenie procedury równania funkcyjnego określenie nowej siły krytycznej, a przy trzecim powtórzeniu obliczamy kolejny «polepszony» rozkład masy. Na każdą iterację składa się zatem trzykrotne powtórzenie równania funkcyjnego Bellmana, a na końcu według schematu (16) - (22) znajdujemy każdorazowo nowy rozkład masy.

Algorytm ten jest szybko zbieżny. Na rys. 2 przedstawiono schemat blokowy tego algorytmu.



Rys. 2

Tablica 1

Iteracja	Siła krytyczna
1	2,471*
2	2,732
3	2,859
4	2,961
5	3,024
6	3,058
7	3,092
8	3,108
9	3,121
10	3,138
11	3,139
12	3,139

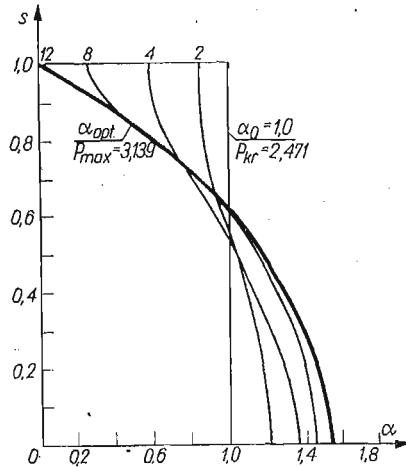
Tablica 2

Iteracja	Siła krytyczna
1	2,321
2	2,609
3	2,761
4	2,867
5	2,940
6	2,981
7	3,014
8	3,021
9	3,055
10	3,074
11	3,087
12	3,087

*) wartość dokładna 2,467 [11]

6. Wyniki obliczeń

a) *Optymalne kształtowanie przy obciążeniu siłą skupioną P* . W celu sprawdzenia powyższej metody położono najpierw w (8) $c_1 = 0$ oraz nie brano pod uwagę ograniczeń (4). W tabelcy 1 przedstawiono wartości siły krytycznej dla różnych iteracji. Widać, że osiągnięto dobrą dokładność rozwiązywanego zadania wariacyjnego, przy obliczaniu P_{kr} dla stałego przekroju $\alpha_0(s)$, [11]. Na rys. 3 przedstawiono zmianę $\alpha(s)$ dla różnych iteracji oraz przekrój optymalny.

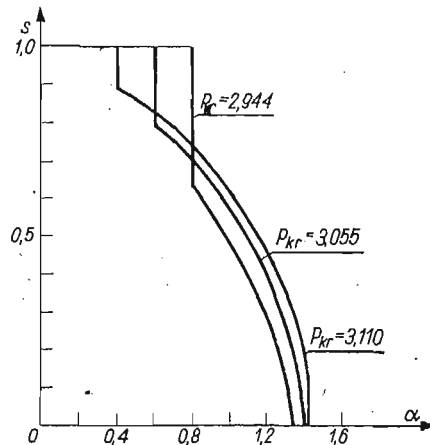


Rys. 3

Z pracy [6] wynika, że stosunek optymalnej siły krytycznej do przekroju α w punkcie sztywnego utwierdzenia jest równy 2. Również wyniki naszych obliczeń dają tę samą wartość.

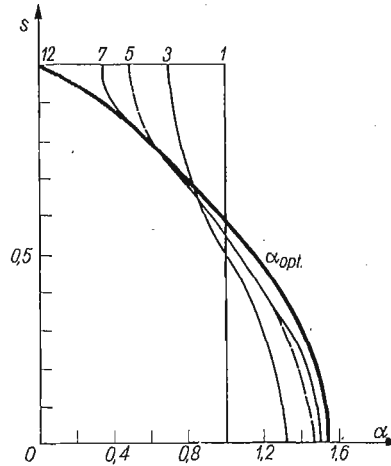
b) *Optymalne kształtowanie przy obciążeniu siłą skupioną P i ograniczeniu przekroju*. Dalsze obliczenia uwzględniały warunek (4) w postaci:

$$(23) \quad \alpha(s) \geq \alpha_1.$$



Rys. 4

Procedura wyznaczania siły krytycznej pozostaje nadal taka sama. Modyfikacji ulega jedynie ostatnia część opisana wzorami (16) - (19). W miejsce tych przekroji $\alpha(k\Delta)$, gdzie $k = 1, \dots, N$, które nie spełniają warunku (23) podstawia się $\alpha(k\Delta) = \alpha_1$. Uzyskane przekroje pokazuje rys. 4, dla $\alpha_1 = 0,4; 0,6$ oraz $0,8$.



Rys. 5

c) *Optymalne kształtowanie przy obciążeniu siłą skupioną P i ciężarem własnym.* Obliczenia przeprowadzono przy pominięciu warunku (4). Wartości siły krytycznej dla różnych iteracji zestawiono w tablicy 2, zaś otrzymane kształty oraz kształt optymalny pokazano na rys. 5.

7. Uwagi końcowe

Cechą charakterystyczną przedstawionej metody jest wariacyjne sformułowanie równania statyki pręta i rozwiązanie go bezpośrednią metodą teorii sterowania optymalnego — jaką jest procedura równania funkcyjnego Bellmana.

Omawiany sposób rozwiązania zagadnienia stateczności posłużyć może jako jedna z metod do obliczania obciążeń krytycznych elementów konstrukcyjnych o dowolnym kształcie (niekoniecznie ciągłym na przykład skokowym), przy uwzględnieniu dowolnego obciążenia ciągłego np. ciężaru własnego.

Przedstawiony sposób rozwiązania zadania optymalizacji polegający na skojarzeniu metody gradientowej [8] z programowaniem dynamicznym [10] może być przystosowany do optymalizacji niektórych zagadnień związanych z utratą stateczności płyt osiowo symetrycznych.

Literatura cytowana w tekście

1. A. M. BRANDT, *Kryteria i metody optymalizacji konstrukcji*, Warszawa.
2. Ф. И. Ниордсон, П. Педерсен, *Обзор исследований по оптимальному проектированию конструкций*, Механика, Сборник Переводов, 2 (1973), 136 - 157.
3. A. GAJEWSKI, *Wybrane zagadnienia optymalizacji kształtu prętów*, Czas. Techn., Z-4M (1972).

4. A. GAJEWSKI, M. ŻYCZKOWSKI, *Optimal design of elastic columns subjected to the general conservative behaviour of loading*, J. of Appl. Math. and Phys., ZAMP, **21** (1970), 806—818.
5. A. GAJEWSKI, *Оптымалне кшталтаванне вытрымаласціове в прыпадку матэрыялаў о нелінійнасці фізічнай*, Zesz. Nauk. Polit. Krak., **5** (1975).
6. Н. Г. Ченцов, *Стойкі найменшого веса*, Труды ЦАГИ, 1936, 265.
7. J. WŁACHUT, *Оптымалне кшталтаванне прѣта ściskanego пры ду́жых угієціах метода́ програмаванія дынамічнаго*, Mech. Teor. Stos., **3**, **15** (1977), 375—385.
8. J. L. CLAUDON, *Characteristic curves and optimum design of two structures subjected to circulatory loads*, Journal de Mécanique, **14** (1975), 531—543.
9. Ю. М. Почтман, А. Л. Колесниченко, *Численне рещенне адного класса задач механікі сплюшанай среды методом дынамічнаго програмаванія*, Изв. Акад. Наук Армянской ССР, Механика, **2** (1972), 90 - 95.
10. R. BELLMAN, *Programowanie dynamiczne*, Warszawa 1969.
11. N. BIELAJEW, *Wytrzymałość materiałów*, Warszawa 1954.

Резюме

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПО МЕТОДУ ДИНАМИЧЕСКОГО
ПРОГРАММИРОВАНИЯ СЖАТОГО СТЕРЖНЯ С УЧЕТОМ
СОБСТВЕННОГО ВЕСА

Дано рещенне задачи о нахождении максимальной критической силы, при установленной объеме стержня. Задача рещается на основе статического критерия устойчивости. Критические силы находятся из условия минимума интеграла потенциальной энергии с использованием функционального уравнения Бельмана. Форма стержня определена по градиентному методу Клодона [8]. Рассмотрено влияние ограничения поперечного сечения стержня. Исследованы стержни лишь прямоугольного сечения.

Summary

OPTIMAL DESIGN OF A BAR UNDER AXIAL FORCE AND OWN WEIGHT BY MEANS OF
DYNAMIC PROGRAMMING

The subject of this paper is to maximize the critical force under a constant volume of a bar. The problem of stability is based on the static stability criterion. The critical forces were calculated numerically by minimizing the potential energy, Bellman's functional equation being used. The problem of shape optimization was also solved numerically on the basis of CLAUDON [8] gradient method. The influence of constrained cross-section is shown. Only the rectangular cross-section of a bar was discussed.

INSTYTUT FIZYKI
POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 23 listopada 1977 r.