MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3, 16 (1978)

O MAKROSKOPOWYCH NAPRĘŻENIACH W OŚRODKACH WIELOFAZOWYCH

ANDRZEJ TRZĘSOWSKI (WARSZAWA)

I. Wstęp

W teorii ośrodków wielofazowych, przy przejściu od mikrowielkości do makrowielkości, często stosuje się następujące rozumowanie (np. [1]):

1. Wybieramy skończony podobszar niejednorodnego ciała (zwany charakterystycznym obszarem) tak duży, że zawiera dostatecznie dużo niejednorodności na to, aby można było przeprowadzić w nim reprezentatywną operację objętościowego uśredniania.

2. Zarazem uważamy, że podobszar jest dostatecznie mały (w porównaniu z wymiarami ciała) na to, aby można było go interpretować — w makroskopowym przybliżeniu — jako punkt materialny i pomijać zmienność w nim makroskopowych wielkości.

Oczywiście takie rozumowanie może mieć zastosowanie tylko do niejednorodnych ośrodków[1], w których niejednorodności sa bardzo małych rozmiarów. Przykładem takich ośrodków są polikryształy lub stopy metali z niejednorodnościami w postaci małych inkluzji.

W pracy rozważane będą stopy metali typu matryca z inkluzjami tworzące ośrodek makroskopowo jednorodny, mikroskopowo niejednorodny, o rozproszonym charakterze mikrostruktury (por. [2]).

W monografii [3] podane są przykłady takich stopów. Z przykładów tych wynika, że w wielu wypadkach można pojedyncze inkluzje uważać za zawarte (wraz z otoczeniem w postaci materiału matrycy) w sześcianie o boku $5 \cdot 10^{-4}$ cm. Wtedy w sześcianie o boku $d^* = 5 \cdot 10^{-2}$ cm (a więc w sześcianie o wielkości uznawanej za makroskopową — np. [2], [4]) znajdzie się $n = 10^6$ inkluzji; dla sześcianu o boku d^* można mówić o reprezentatywnym uśrednianiu objętościowym. Z drugiej strony w sześcianie o boku $d = 10$ cm (rząd wymiarów próbki do badań) znajdzie się $N = 2 \cdot 10^6$ sześcianów o boku d^*; sześciany o boku d^* są dostatecznie małe w porównaniu z wymiarami próbki ($d^* \ll d$).

Rozważmy pewien podział ciała niejednorodnego na obszary charakterystyczne. Jeżeli każdy z tych obszarów zdeformujemy jednorodnie, to w ciele powstanie pole naprężeń spowodowane nierównomiernością odkształcenia poszczególnych obszarów charakterystycznych i wynikającym stąd ich wzajemnym oddziaływaniem. Makroskopowe przybliżenie tego pola naprężeń nazywane jest naprężeniem I rodzaju. Z określenia naprężeń I rodzaju (i z określenia obszaru charakterystycznego) wynika, że naprężenia te powinno się uważać za stałe w obszarach charakterystycznych.

[1] *Ośrodkiem niejednorodnym* nazywamy klasę ciał niejednorodnych o takim samym typie niejednorodności.

Celem pracy jest analiza pojęcia makroskopowości naprężeń oraz sformułowanie makroskopowego prawa konstytutywnego (dla naprężeń I rodzaju i makroskopowych odkształceń określonych dla liniowo-sprężystego ośrodka niejednorodnego), w którym wymiary obszaru charakterystycznego wystąpią jako parametry opisujące makroskopową reakcję materiałów zawartych w ciele niejednorodnym.

2. Rozkład niejednorodności

W stopach metali kształt, wielkość i rozmieszczenie inkluzji są losowymi parametrami rozkładu niejednorodności. Losowy rozkład niejednorodności można opisać funkcją:

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}(\omega, x) = \sum_{\alpha=0}^{m} \chi_\alpha(\omega, x)\mathbf{c}_\alpha. \tag{2.1}$$

gdzie oznaczono:

$x \in G$; G — obszar ciała niejednorodnego (próbki do badań),

$\omega \in \Omega$; Ω — probabilistyczna przestrzeń zdarzeń opisująca losowość wewnętrznej geometrii niejednorodnych ciał ośrodka,

$\mathbf{c}_0$ — tensor współczynników sprężystości matrycy zajmującej obszar G_0,

$\mathbf{c}_\alpha$ — tensor współczynników sprężystości inkluzji zajmujących obszar $G-G_0$ $\alpha = 1, \ldots, m$

$\chi_\alpha(\omega,.)$ — funkcja charakterystyczna obszaru G_α (przy zdarzeniu losowym $\omega \in \Omega$):

$$\chi_\alpha(\omega, x) = \begin{cases} 1 \text{ dla } x \in G_\alpha \\ 0 \text{ dla } x \notin G_\alpha \end{cases}$$

Założenie rozproszonego charakteru niejednorodności i makroskopowej jednorodności ośrodka wyrazimy przyjmując statystyczną jednorodność losowej funkcji rozkładu niejednorodności

$$\bigwedge_{x \in G} (E\mathbf{c})(x) = \mathbf{C}_0 = \text{const}, \tag{2.2}$$

gdzie E oznacza operację probabilistycznego uśredniania a $\mathbf{C}_0$ jest tensorem walencji 4.

Dla ośrodka dwufazowego funkcję rozkładu niejednorodności możemy napisać w postaci:

$$\mathbf{c}(\omega, x) = \mathbf{c}_0 + \chi(\omega, x)(\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_0), \tag{2.3}$$

gdzie oznaczono $\chi(\omega, x) = \chi_1(\omega, x)$.

Jeżeli rozkład niejednorodności (dany wzorem (2.3)) spełnia warunek tzw. izotropii statystycznej, to losowa funkcja $\chi(x)(\omega) = x(\omega, x)(\omega \in \Omega)$ ma między innymi własności ([5]):

$$\begin{aligned} &P(\chi(x) = 1) = E\chi(x) = \phi, \\ &P(\chi(x) = 0) = 1 - \phi, \\ &P(\chi(x) = 1 \wedge \chi(x_1) = 1) = E[\chi(x)\chi(x_1)] = \gamma(r), \end{aligned} \tag{2.4}$$

gdzie ϕ jest koncentracją objętościową inkluzji:

$$\phi = \frac{|G_1|}{|G|}, \quad 1-\phi = \frac{|G_0|}{|G|}. \tag{2.5}$$

oraz oznaczono $r = ||x-x_1||$, $||x||^2 = \sum_{i=1}^{3}(x^i)^2$, $x = (x^1, x^2, x^3)$.

Przy powyższych założeniach

$$\mathbf{C}_0 = E\mathbf{c}(x) = \mathbf{c}_0+\phi(\mathbf{c}_1-\mathbf{c}_0) = (1-\phi)\mathbf{c}_0+\phi\mathbf{c}_1. \tag{2.6}$$

Funkcja korelacyjna:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(x, x_1) &= E[\mathbf{c}'(x)\otimes\mathbf{c}'(x_1)], \\ \mathbf{c}'(x) &= \mathbf{c}(x)-\mathbf{C}_0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

ma w rozważanym przypadku postać:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(x, x_1) &= [\gamma(r)-\phi^2]\mathbf{K}, \\ \mathbf{K} &= (\mathbf{c}_1-\mathbf{c}_0)\otimes(\mathbf{c}_1-\mathbf{c}_0). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Mikroskopowość rzędów długości charakteryzujących wymiary inkluzji i odległości między nimi pozwala — w ramach modelu *matryca z inkluzjami* — potraktować stop jako mechaniczną mieszaninę składników. Oznaczmy:

$$\begin{aligned} P_i(x) &= P(x\in G_i), \quad (i = 0, 1), \\ P_{ij}(x, x_1) &= P(x\in G_i \wedge x_1\in G_j), \quad (i, j = 0, 1). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Prawdopodobieństwa P_{ij} są postaci ([6]):

$$\begin{aligned} P_{ij} &= P_{ij}(r) = \alpha_{ij}+\beta_{ij}p(r), \\ \alpha_{ij} &= P_iP_j,\ P_i(x) = P_i = \text{const}, \\ \beta_{ij} &= P_i\delta_{ij}-P_iP_j \ (\text{po } i \text{ nie sumować}), \\ p(r) &= \exp(-r/l). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Stąd (i z (2.4)).

$$\gamma(r) = \phi^2+\phi(1-\phi)\exp(-r/l), \tag{2.11}$$

gdzie l — moduł korelacji ($[l]$ = cm).

Wzór (2.11) jest przybliżeniem, w którym ignoruje się różnice gemetryczne między matrycą a obszarem zajętym przez inkluzje; wzór ten nie uwzględnia np. różnic w typie spójności tych obszarów a także nie uwzględnia różnic w kształcie i orientacji inkluzji. Tego rodzaju przybliżenie winno dawać najlepsze rezultaty dla zbliżonych koncentracji ϕ i $1-\phi$ oraz quasi-sferycznych inkluzji tj. takich, że $E[(R-ER)^2] \ll (ER)^2$, gdzie $R = ||x-x_0||$, x_0 — środek masy inkluzji, x — punkt na powierzchni inkluzji.

Rozproszony charakter mikrostruktury będziemy uwzględniać przyjmując, że uśrednienie probabilistyczne losowych funkcji, odniesione do obszaru charakterystycznego i do obszaru całej próbki, daje taki sam wynik. W szczególności jeśli przez G i G^* oznaczymy obszary próbki i dowolnego obszaru charakterystycznego a przez $G_1 \subset G$, $G_1^* \subset G^*$ — podobszar zajęty przez inkluzje, to

$$\phi = \frac{|G_1|}{|G|} = \frac{|G_1^*|}{|G^*|}. \tag{2.12}$$

3. Odkształcenia

W pracy rozważane będą, jak to zwykle robi się w teorii ośrodków wielofazowych, losowe pola odkszałceń jednorodne statystycznie. Załóżmy więc ośrodek i obciążenia ciał takie, że:

A. Losową deformację obszaru charakterystycznego G^*, obserwowaną na jego granicy ∂G^*, można uważać za jednorodną (por. [1]). Przyjmujemy więc, że losowe przemieszczenia

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\omega, x)(\omega \in \Omega, x \in G^*) \tag{3.1}$$

spełniają (dla $\omega \in \Omega$ ustalonego) równanie:

$$\begin{aligned} \underset{\circ}{L}(D)\mathbf{u}(\omega, x) &= X(\omega, x)+\mathbf{k}(\omega, x), && \text{w } G^*, \\ \mathbf{u}(\omega, x) &= \boldsymbol{\epsilon}_* \mathbf{x}, && \text{na } \partial G^*, \end{aligned} \tag{3.2}$$

gdzie oznaczono (por. [7]):

$\underset{\circ}{L}(D)$ — operator Lamégo dla jednorodnego ciała o tensorze współczynników sprężystości (matrycy) $t_j \underset{\circ}{L}(D)\mathbf{u} = -\operatorname{div}(\mathbf{c}_0 \cdot \nabla \mathbf{u})$,

$\boldsymbol{\epsilon}_*$ — symetryczny tensor walencji 2,

$\mathbf{x} = \overrightarrow{x_0 x}$ — wektor wodzący punktu $x \in \partial G^*$ o początku w $x_0 \in G^*$; x_0 — środek masy w obszarze G^*,

$\mathbf{x}(\omega, x) = \int\limits_{G^*} \boldsymbol{\tau}(\omega, y) \cdot \underset{x}{\nabla} \delta x - y dy$ — polaryzacja ośrodka[2)],

$\boldsymbol{\tau}(\omega, x) = \mathbf{c}''(\omega, x) \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\omega, x)$ — tensor (gęstości) polaryzacji,

$\mathbf{c}''(\omega, x) = \mathbf{c}(\omega, x) - \mathbf{c}_0$ — tensor fluktuacji stałych sprężystych,

$\boldsymbol{\epsilon}(\omega, x) = \frac{1}{2}(\underset{x}{\nabla}\mathbf{u} + \underset{x}{\nabla}\mathbf{u}')(\omega, x)$ — tensor (losowych) odkształceń,

δx — delta Diraca,

$\underset{x}{\nabla}$ — gradient względem zmiennych x,

„ · ” — operacja pełnego nasuwania tensorów,

$\mathbf{k}(\omega, x)$ — losowa funkcja rozkładu sił objętościowych.

Z uwagi na małość obszaru G^* będziemy przyjmować, że można w nim pominąć wpływ sił objętościowych na odkształcenia:

$$\mathbf{k}(\omega, x) = \mathbf{0}. \tag{3.3}$$

B. Probabilistyczne średnie odkształceń są wielkościami makroskopowymi określonymi z makroskopowego doświadczenia mechanicznego. Założenie to sformułujemy w postaci *hipotezy ergodycznej*:

$$\bigvee_{\boldsymbol{\epsilon}_0} \bigwedge_{x \in G^*} \bigwedge_{\omega \in \Omega} \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(x) = E\boldsymbol{\epsilon}(x) = \frac{1}{|G^*|} \int\limits_{G^*} \boldsymbol{\epsilon}(\omega, y) dy = \boldsymbol{\epsilon}_0, \tag{3.4}$$

gdzie $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_0$ jest symetrycznym tensorem walencji 2.

[2)] Sens całki Lebesgue'a $\mathbf{X}(\omega, x)$ jest omówiony w pracach [7] i [10]; dla $\boldsymbol{\tau}$ różniczkowalnego względem zmiennej x: $\mathbf{X}(\omega, x) = \underset{x}{\operatorname{div}} \boldsymbol{\tau}(\omega, x)$. Matematyczne problemy związane z poprawnością sformułowania równania (3.2) w sytuacji, kiedy nieciągłość funkcji rozkładu niejednorodności powoduje nie istnienie w obszarze G^* klasycznych pochodnych funkcji $\mathbf{u}$ i $\boldsymbol{\tau}$ — zostały omówione w pracy [7]. Operacje różniczkowania występujące w równaniu (3.2) należy rozumieć jako operacje uogólnionego różniczkowania w sensie Sobolewa.

Przypisując (jak zwykle się robi w makroskopowych doświadczeniach) stałą w G^* wielkość średnią $\boldsymbol{\epsilon}_0$ — środkowi masy $x_0 \in G^*$, przyjmiemy, że

$$\boldsymbol{\epsilon}_0 = \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(x_0) = E\boldsymbol{\epsilon}(x_0) \tag{3.5}$$

dla dowolnego punktu $x_0 \in G$ takiego, że:

$$\begin{gathered} \inf_{y \in \partial G} \|x_0 - y\| \geqslant r^*, \\ r^* = \sup_{y \in \partial G^*} \|x_0 - y\|. \end{gathered} \tag{3.6}$$

Z założenia (3.2) wynika przedstawienie pola losowych przemieszczeń:

$$\begin{gathered} \mathbf{u}(\omega, x) = \boldsymbol{\epsilon}_* \mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}(\omega, x); \ \mathbf{x} = x - x_0 \\ \boldsymbol{\xi}(\omega, x) = \mathbf{0} \text{ na } \partial G^*. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Stąd kolejno:

$$\frac{1}{|G^*|} \int_{G^*} \underset{x}{\nabla} \boldsymbol{\xi}(\omega, x) dx = \mathbf{0} \tag{3.8}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_* = \boldsymbol{\epsilon}_0. \tag{3.9}$$

Uśredniając stronami równanie (3.2) (przy uwzględnieniu (3.5) — (3.9)) otrzymujemy następujący wniosek:

Jeżeli ciało zajmujące obszar G jest jednorodne przy brzegu oraz możemy pominąć wpływ sił objętościowych na odkształcenia, to rozkład średnich odkształceń w obszarze G (być może za wyjątkiem warstwy przybrzeżnej szerokości $b < r^*$) jest postaci:

$$\begin{gathered} \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(x) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}_0 + \nabla \mathbf{u}_0')(x), \\ \inf_{y \in \partial G} \|x - y\| \geqslant r^* \quad (r^* - (3.6)), \end{gathered} \tag{3.10}$$

gdzie $\mathbf{u}_0$ jest przemieszczeniem w matrycy bez inkluzji zajmującej obszar G:

$$\begin{gathered} \underset{0}{L}(D)\mathbf{u}_0(x) = \mathbf{0} \text{ w } G, \\ b(x, D)\mathbf{u}_0(x) = \phi(x) \text{ na } \partial G. \end{gathered} \tag{3.11}$$

Przez $b(x, D)$ oznaczono w równaniu (3.11) operator warunku brzegowego (por. [7]). Jeżeli $b(x, D)\mathbf{u}_0(x) = \mathbf{u}_0(x)$ to założenie jednorodności przy brzegu można pominąć.

Wniosek powyższy oznacza, że rozważamy ośrodki, w których znika średnia polaryzacja ośrodka

$$(E\mathbf{X})(x) = \int_G (E\boldsymbol{\tau})(x) \cdot \underset{x}{\nabla} \delta_{x-y} dy = \mathbf{0}. \tag{3.12}$$

4. Średnie naprężenia

Jeżeli inkluzje oraz obszar charakterystyczny są ograniczone dostatecznie gładkimi powierzchniami oraz spełnione są pewne warunki ograniczające składowe losowej funkcji:

$$\mathbf{c}''(\omega, x) = \mathbf{c}(\omega, x) - \mathbf{c}_0, \tag{4.1}$$

to istnieje w obszarze charakterystycznym G^* funkcyjny związek (por. [10]) między średnimi naprężeniami:

$$\begin{aligned}&\overline{\mathbf{T}}(x) = (E\mathbf{T})(x), \quad x \in G^*,\\ &\mathbf{T} = \mathbf{T}(\omega, x) = \mathbf{c}(\omega, x)\cdot \boldsymbol{\epsilon}(\omega, x),\end{aligned} \tag{4.2}$$

a średnim odkształceniem

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}(x) = \boldsymbol{\epsilon}_0, \quad x \in G^*. \tag{4.3}$$

Związek ten ma postać

$$\overline{\mathbf{T}}(x) = \mathbf{C}(x)\cdot \boldsymbol{\epsilon}_0, \tag{4.4}$$

gdzie oznaczono:

$$\begin{aligned}&\mathbf{C}(x) = \mathbf{C}_0+\mathbf{C}'(x),\\ &\mathbf{C}'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{C}_n(x), \quad \mathbf{C}_0 = E\mathbf{c},\\ &\mathbf{C}_n(x) = \int_{G^*} \mathbf{F}_n(x, x_n)dx_n,\end{aligned} \tag{4.5}$$

$\mathbf{F}_n$ jest tensorową funkcją walencji 4 zależną od (por. [10]):

— tensorowej funkcji walencji $4(n+1)$, $\mathbf{K}_n = \mathbf{K}_n(x, x_1, \ldots, x_n)$ będącej liniową kombinacją funkcji korelacyjnej rzędu $k \leqslant n$, losowej funkcji $\mathbf{c}'(\omega, x)$, tj. funkcji postaci $E(\bigotimes_{i=1}^{k} \mathbf{c}'(x_i))$.

— funkcji Greena dla operatora $\underset{0}{L}(D)$, obszaru G^* i problemu Dirichleta (por. rozdz. 3(3.2).

We wzorach (4.5) tylko kształt obszaru G^* nie jest określony przez rozważany ośrodek i w ogólnym przypadku nie można o tym kształcie nic powiedzieć *a priori*. Jeżeli jednak mamy ośrodek *izotropowy statystycznie* to naturalnym wydaje się wybór G^* w postaci kuli

$$G^* = K(x_0, r^*). \tag{4.6}$$

Dalej będziemy uważać, że obszar charakterystyczny jest kulą o promieniu r^*.

Do dalszych rozważań potrzebne nam będzie wydzielenie części stałej z funkcyjnego szeregu $\mathbf{C}'(x)$. Jeżeli przedstawimy funkcję Greena $\mathbf{U}(x, x')$ w postaci

$$\mathbf{U}(x, x') = \mathbf{e}(x-x')+\mathbf{r}(x, x'), \tag{4.7}$$

gdzie $\mathbf{e}(x-x')$ — rozwiązanie podstawowe dla operatora $\underset{0}{L}(D)$ a $\mathbf{r}(x, x')$ — funkcja klasy C^∞ w obszarze G^*, to z postaci funkcji $\mathbf{F}_n(x, x')$ (por. [10]) wynika, że poszukiwaną część stałą $\mathbf{C}$ możemy otrzymać wstawiając we wzorach (4.5) $\mathbf{e}(x-x')$ w miejsce $\mathbf{U}(x, x')$, tj.:

$$\begin{aligned}&\mathbf{C} = \mathbf{C}_0+\tilde{\mathbf{C}},\\ &\tilde{\mathbf{C}} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mathbf{C}}_n,\\ &\tilde{\mathbf{C}}_n = \int_0^{r^*} \mathbf{d}_n(r_n)dr_n, r_n = \|x-x_n\|,\end{aligned} \tag{4.8$^{3)}$}$$

[3] Dopuszczalność zmiany kolejności sumowania w szeregu zawsze można osiągnąć zakładając bezwzględną zbieżność tego szeregu tj. narzucając warunki ograniczenia na funkcje korelacyjne $\mathbf{K}_n$.

gdzie pojawienie się funkcji $\mathbf{d}_n(r)$ wynika z założenia statystycznej jednorodności i izotropii

$$\mathbf{K}_n(x, x_1, \dots, x_n) = \mathbf{K}_n(\|x-x_1\|, \dots, \|x-x_n\|) \tag{4.9}$$

oraz z przejścia od współrzędnych kartezjańskich do współrzędnych sferycznych:

$$\begin{gathered} \mathbf{e}(x-x_1) = \frac{1}{r}\mathbf{E}(\vartheta, \theta), \quad r = \|x-x_1\|, \\ r \geqslant 0, \; 0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi, \; 0 \leqslant \theta \leqslant \pi. \end{gathered} \tag{4.10}$$

Możemy więc przedstawić szereg $\mathbf{C}(x)$ w postaci:

$$\mathbf{C}(x) = \mathbf{C} + \tilde{\mathbf{C}}(x), \tag{4.11}$$

a średnie naprężenia — w postaci:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{T}}(x) &= \mathbf{T}_{\mathrm{I}}(x_0) + \mathbf{T}_{\mathrm{II}}(x), \\ \mathbf{T}_{I}(x_0) &= \mathbf{C} \cdot \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(x_0), \\ \mathbf{T}_{\mathrm{II}}(x) &= \tilde{\mathbf{C}}(x) \cdot \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(x_0). \end{aligned} \tag{4.12}$$

5. Makroskopowe naprężenia

Rozważmy wzory (4.4) i (4.12). Zmienność tensorów $\overline{\mathbf{T}}(x)$ i $\mathbf{C}(x)$ w obszarze charakterystycznym wskazuje, że $\mathbf{C}(x)$ nie może być uznane za tensor makroskopowych współczynników sprężystości ciała makroskopowo jednorodnego, a $\overline{\mathbf{T}}(x)$ — za makroskopowe naprężenia I rodzaju. Oczywiście gdyby zachodziła własność

$$\bigwedge_{\omega \in \Omega} \mathbf{T}_{\mathrm{I}}(x_0) = \frac{1}{|G^*|} \int_{G^*} \mathbf{T}(\omega, x) dx, \tag{5.1}$$

to można by uważać, że część stała średnich naprężeń ($\mathbf{T}_{\mathrm{I}}(x_0)$) jest makroskopowym naprężeniem I rodzaju, a tensor $\mathbf{C}$ (zdefiniowany wzorem 4.8)) — tensorem makroskopowych współczynników sprężystości.

Warunek (5.1) można nazwać *hipotezą quasi-ergodyczną* i potraktować jako dodatkowy warunek definiujący makroskopową jednorodność ośrodka wielofazowego.

Warunki (3.4) i (5.1) nakładają ograniczenia na statystykę rozkładu niejednorodności ośrodka wielofazowego. Podanie twierdzeń mówiących o tym kiedy zachodzą te warunki jest problemem w sobie, znacznie wykraczającym poza ramy pracy. Dla zorientowania się (przynajmniej w pierwszym przybliżeniu) w informacjach o makroskopowych własnościach ośrodka wielofazowego zawartych we wzorze (4.8), rozważmy przykład dwufazowego stopu metali statystycznie jednorodnego i izotropowego o rozproszonym charakterze mikrostruktury i ze sferycznymi inkluzjami (np. stop Ni-Au, w którym inkluzje z niklu są sferycznymi cząstkami o średnicy 10^{-5} cm — [3]). Dla tego rodzaju stopów zadowalającą dla celów praktycznych, jest informacja o wkładzie w naprężenia I rodzaju funkcji $\mathbf{K}_1(x, x_1)$: funkcja ta wyraża się przez liniowe charakterystyki mikrostruktury. Jeżeli więc przyjmiemy warunek

$$\mathbf{K}\,(x, x_1, \dots, x_n) = 0 \quad \text{dla} \quad n \geqslant 2, \tag{5.2}$$ [4]

[4] Warunek (5.2) jest równoważny nieskończonemu układowi równań liniowych ze względu na funkcje korelacyjne $E(\prod_{i=1}^{n} \chi(x_i))$ $n = 2, 3, \dots$ (por. rozdz. 2), tj. narzuca ograniczenia na losową geometrię ośrodka (por. [8]).

to, w przybliżeniu danym wzorem (2.11), tensor makroskopowych współczynników sprężystości jest postaci (por. rozdz. 2, (4.8) oraz [10]):

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_0 + \phi(1-\phi)\mathbf{C}_1 + \int_0^{r^*} \frac{\gamma(r)-\phi}{r} dr \mathbf{C}_2, \tag{5.3}$$

gdzie oznaczono:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 &= \mathbf{L}_1 \circ \mathbf{K}, \quad \mathbf{C}_2 = \mathbf{L}_2 \circ \mathbf{K}, \\ \mathbf{L}_1 &= \int_{S(0,1)} \nabla \mathbf{e}(z) \otimes \mathbf{n}(z) dS(z), \\ \mathbf{L}_2 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \mathbf{F}(\vartheta, \theta) \sin\theta d\theta dv, \\ \mathbf{K} &= (\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_0) \otimes (\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_0|), \\ \nabla \mathbf{e}(x-x_1) &= \frac{1}{r^3} \mathbf{F}(\vartheta, \theta) \text{ (por. (4.10)).} \end{aligned} \tag{5.4}$$

$\mathbf{C}_0$ i $\gamma(r)$ zdefiniowane są odpowiednio wzorami (2.6) i (2.11); $\mathbf{n}(z)$ $[z \in S(\mathbf{0}, 1)]$ jest polem wersorów normalnych skierowanych na zewnątrz sfery o środku $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ i promieniu $R = 1$; symbol „o" oznacza działanie tensorowe zdefiniowane dla tensorów $\mathbf{A}$ walencji 4 i $\mathbf{B}$ — walencji 8, przepisem:

$$(\mathbf{A} \circ \mathbf{B})_{mnpq} = A_{ijkl} B_{mnijklpq} \tag{5.5}$$

$\mathbf{e}(z)$ jest rozwiązaniem podstawowym dla operatora $\underset{\circ}{L}(D)$; np. jeżeli $\mathbf{c}_0 = \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{I}$ $(\mathbf{1}|_{ij} = \delta_{ij}, \mathbf{I}|_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$, to

$$\mathbf{e}(x-y) = \frac{1}{8\pi\mu} (\underset{x}{\Delta} r \mathbf{1} - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} \underset{xy}{\nabla\nabla} r), \qquad r = ||x-y||.$$

Współczynniki λ, μ winny spełniać warunki (por. np. [9]):

$$3\lambda + \mu > 0, \qquad \mu > 0. \tag{5.7}$$

Naprężenia I rodzaju w punktach $x_0 \in G$ takich, że

$$\inf_{y \in \partial G} ||x_0 - y|| \geq r^* \tag{5.8}$$

można więc obliczyć za pomocą związku

$$\mathbf{T}_I(x_0) = \mathbf{C} \cdot \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(x_0), \tag{5.9}$$

gdzie C jest dane wzorem (5.3), a $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}(x)(x \in G)$ jest polem makroskopowych odkształceń omówionych w rozdz. 2.

Związek (5.9) uwzględnia wpływ na naprężenia I rodzaju, następujących charakterystyk mikrostruktury:

— koncentracji objętościowej inkluzji ϕ,

— liniowego parametru r^* charakteryzującego łącznie rzędy wymiarów inkluzji i odległości między nimi. Parametr ten ma sens makroskopowej charakterystyki niejednorodności jako mikrostruktury,

— liniowego parametru l skorelowania własności stopu w różnych punktach objętości. Związek (5.9) obowiązuje wszędzie w G za wyjątkiem być może przybrzeżnego pasa o szerokości r^*.

Zauważmy, że makroskopowe współczynniki sprężystości dane wzorem (4.8) (a w szczególności współczynniki dane wzorem (5.3)) są — w przeciwieństwie do wzoru (4.5) — niezależne od wyboru problemu brzegowego dla obszaru charakterystycznego. Uwolnienie się od tej niefizycznej zależności jest konsekwencją przyjęcia hipotezy quasi-ergodycznej (5.1).

Literatura cytowana w tekście

1. И. М. Лившиц, Л. Н. Розенцвайг, *К теории упругих свойств поликристаллов*, Журн. экспер. и теорет. физ., 2 (1946).
2. E. Branderber, *Chemia ogólna dla inżynierów*, Warszawa 1966.
3. И. Н. Францевич, Д. Н. Карпино;, *Композиционные материалы волокнистого строения*, Киев 1970.
4. I. Chojnacki, *Metalografia strukturalna*, Katowice 1960.
5. H. L. Frisch, Statistics of Random Media: Transactions of the Society Rheology, 9, 1 (1965).
6. А. Г. Фокин, Т. Д. Шермергер, *К вычислению упругих модулей хетерогенных сред*, ПМТФ (МТО), 3 (1968).
7. A. Trzęsowski, *Dia-elastic Description of a Jamp-Non-Homogeneous Body*, Teoria ośrodków wielofazowych cz. II, 1976.
8. Cz. Eimer, *Stress in Multiphase Media*; Arch. Mech. Stos., 4, 19 (1967).
9. A. Trzęsowski, *Rozwiązania w przestrzeniach Sobolewa równań teorii sprężystości*, Prace IPPT 24/1973.
10. A. Trzęsowski, *Średnie naprężenia w stochastycznym ośrodku wieloskładnikowym*, Mech. Teoret. Stos., 3, 14 (1976).

Р е з ю м е

О МАКРОСКОПИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЯХ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

В работе рассматривается связь между макроскопическими и средними напряжениями в средах, содержащих случайно распределенные скачкообразные неоднородности. Найден вид определяющего соотношения для макроскопических напряжений.

S u m m a r y

ON MACROSCOPIC STRESSES IN A MULTI-COMPONENT MEDIUM

Relations between macroscopic stresses and mean stresses in a medium with random distribution of jump-inhomogeneities is considered. The form of constitutive-equation for macroscopic stresses is presented.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca złożona w Redakcji dnia 27 lipca 1977 r.