

OPTYMALNE KSZTAŁTOWANIE BELKI WSPORNIKOWEJ, OBCIĄŻONEJ SIŁAMI  
ZEWNĘTRZNYMI I CIĘŻAREM WŁASNYM, W WARUNKACH PEŁZANIA\*

MALGORZATA ALBIŃSKA, ANTONI GAJEWSKI (KRAKÓW)

1. Uwagi wstępne

Elementy konstrukcyjne (np. belki, płyty) obciążone wyłącznie siłami zewnętrznymi lub wyłącznie ciężarem własnym rzadko występują w praktyce; na ogół siły masowe stanowią dodatkowe obciążenie, które jest pewnym ułamkiem obciążenia zewnętrznego. W większości opublikowanych dotychczas prac, dotyczących optymalnego kształtowania belek (z reguły liniowo-sprężystych) siły masowe, zależące od poszukiwanego kształtu elementu, są pomijane. W szeregu nowszych prac ([1], [2]) podjęto próbę znalezienia optymalnego kształtu belki wspornikowej, obciążonej wyłącznie ciężarem własnym. Niestety, przedstawione rozwiązania są błędne. Poprawne rozwiązanie zagadnienia przedstawiono w pracy J. M. CHERNA [3]; otrzymano je w oparciu o zasadę minimum wzajemnej energii potencjalnej R. T. SHIELDA i W. PRAGERA [4], ważnej tylko w przypadkach materiału liniowo-sprężystego. W pracy A. GAJEWSKIEGO [5] rozwiązano analogiczny problem optymalizacji kształtu belki wspornikowej, znajdującej się w niejednorodnym polu sił grawitacyjnych (a więc obciążonej tylko ciężarem własnym). Uwzględniono również nieliniowość fizyczną materiału, opisującą materiały nieliniowo-sprężyste, sprężysto-plastyczne lub pozostające w stanie ustalonego pełzania. W pracy wyznaczono optymalne kształty belki przy warunku wyrównania naprężeń, i warunku ustalającym ugięcie swobodnego końca belki. Wykazano, że we wszystkich badanych przypadkach, optymalny kształt zależy od postaci prawa fizycznego.

Próbę znalezienia optymalnego kształtu belki obciążonej siłami zewnętrznymi i ciężarem własnym podjęto w pracy A. GAJEWSKIEGO [6], w której przedstawiono przybliżone rozwiązania, otrzymane metodą małego parametru. Obliczenia przeprowadzono przy warunku wyrównania naprężeń w skrajnych włóknach belki oraz przy warunku minimalizacji ugięcia swobodnego końca belki. Założono przy tym, że ciężar własny stanowi mały ułamek obciążenia zewnętrznego.

W niniejszej pracy przedstawimy rozwiązanie analogicznego zagadnienia optymalizacji kształtu belki wspornikowej, jednak otrzymany warunek konieczny istnienia ekstremum rozwiążemy numerycznie dla dowolnego udziału ciężaru własnego w obciążeniu całkowitym.

---

\* ) Praca wykonana została w ramach problemu węzłowego 05.12 pt. „Wytrzymałość i optymalizacja konstrukcji maszynowych i budowlanych”, koordynowanego przez Instytut Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk.

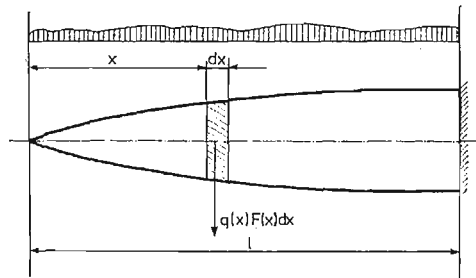
Uwzględnimy również nieliniowość fizyczną materiału, zakładając nieliniową zależność między naprężeniem i odkształceniem. Przyjęte dalej nieliniowe, potęgowe prawo fizyczne pozwoli opisać materiały pozostające w stanie ustalonego pełzania [7], nieliniowe-sprężyste lub sprężysto-plastyczne (bez odciążenia). W przypadku materiałów pełzających, w przyjętym prawie fizycznym symbol „ $\dot{\varepsilon}$ ” oznacza prędkość odkształcenia ( $\dot{\varepsilon}$ ), a ugięcie końca belki  $w(0)$  należy zastąpić prędkością ugięcia ( $\dot{w}$ ).

## 2. Sformułowanie zagadnienia

W niniejszej pracy ograniczymy się do rozważania belek wspornikowych, o prostokątnym przekroju poprzecznym, wysokości  $2h$  i szerokości  $b$ , wykonanych z materiału niejednorodnego, opisanego potęgowym prawem fizycznym:

$$(2.1) \quad \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon_0} = \left| \frac{\sigma}{\sigma_0} \right|^{n-1} \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right), \quad \dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad n - \text{liczba naturalna,}$$

w którym przyjęto, że funkcje:  $\varepsilon_0(x)$  i  $\sigma_0(x)$  są znane i określają niejednorodność wytrzymałościową materiału. W dalszym ciągu pracy będziemy opuszczali kropkę nad  $\varepsilon$ .



Rys. 1

Punktem wyjścia do dalszych rozważań będzie podstawowa zależność prędkości krzywizny belki od momentu zginającego (lub zależność odwrotna), która w przypadku prawa (2.1) przyjmuje postać [6]:

$$(2.2) \quad \kappa = \left( \frac{2n+1}{n} \right)^n \frac{\varepsilon_0(x)}{h(x)} M^{*n} \operatorname{sgn} M,$$

gdzie  $M^*$  oznacza bezwymiarowy moment:

$$(2.3) \quad M^* = \frac{|M(x)|}{2bh^2\sigma_0(x)}.$$

Równocześnie założymy, że belka obciążona jest siłami rozłożonymi o intensywności  $p(x)$ , oraz, że ciężar właściwy belki jest równy  $q(x)$  (rys. 1). Wówczas moment zginający składa się z dwóch części: 1). składnika pochodzącego od obciążenia zewnętrznego oraz 2). składnika zależnego od ciężaru własnego, a tym samym od poszukiwanego kształtu:

$$(2.4) \quad M(x) = M_p(x) + \int_0^x q(\zeta)F(\zeta)(x-\zeta)d\zeta,$$

gdzie:  $F(x)$  oznacza pole powierzchni przekroju poprzecznego belki ( $F = 2bh$ ).

Celem pracy jest znalezienie takiego sposobu zmiany wysokości belki wzdłuż długości  $h(x)$  (przy stałej szerokości  $b$ ), szerokości  $b(x)$  (przy stałej wysokości) lub wysokości i szerokości (gdy są do siebie proporcjonalne:  $b(x) = \alpha h(x)$ ), aby określona funkcja celu przyjmowała wartość minimalną, przy warunku ograniczającym, ustalającym całkowity ciężar belki:

$$(2.5) \quad \int_0^l q(x)F(x)dx = W = \text{const.}$$

W dalszym ciągu ograniczymy się do minimalizacji prędkości ugięcia swobodnego końca belki. Pewne rozwiązania przy innych funkcjach celu otrzymano metodą małego parametru w pracy [6].

Korzystając ze wzoru (2.2) prędkość ugięcia końca belki możemy wyrazić następującym funkcjonalem:

$$(2.6) \quad w(0) = \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n \int_0^l x \frac{\varepsilon_0(x)}{h(x)} M^{*n} \text{sgn} M dx.$$

W dalszym ciągu założymy, że obciążenie zewnętrzne ma taki sam zwrot jak ciężar własny, tzn. że moment nie zmienia swojego znaku i jest stale dodatni. Wobec tego we wzorach (2.2)—(2.6) opuścimy znak modułu i przyjmujemy:  $\text{sgn} M = \pm 1$ .

Jako parametr optymalizacji przyjmiemy pole powierzchni przekroju  $F(x)$ , co pozwoli ujednoczyć tok obliczeń dla wszystkich trzech wymienionych przypadków (zmiany szerokości, zmiany wysokości i przypadku gdy:  $b = \alpha h$ ). Po prostych obliczeniach funkcjonal (2.6) można przedstawić w postaci:

$$(2.7) \quad w(0) = C \int_0^1 \frac{\varepsilon_0 \xi M^n}{\sigma_0^n F^{\mu n + \nu}} d\xi, \quad \xi = x/l,$$

w której należy przyjąć w poszczególnych przypadkach:

1.  $h = \text{const.}$ ,  $b = b(x)$  (zmienna szerokość)

$$\mu = 1, \quad \nu = 0, \quad C = \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n l/l^{n+1}.$$

2.  $b = \text{const.}$ ,  $h = h(x)$  (zmienna wysokość)

$$\mu = 2, \quad \nu = 1, \quad C = \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n l(2b_0)^{n+1}.$$

3.  $b(x) = \alpha h(x)$  (przekroje powinowate)

$$\mu = 3/2, \quad \nu = 1/2, \quad C = \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n l(2\alpha)^{(n+1)/2}.$$

## 3. Warunek konieczny istnienia ekstremum funkcjonu (2.7)

W celu znalezienia kształtu belki  $F(\xi)$ , minimalizującego funkcjonal (2.7), przy izoperymetrycznym warunku ograniczającym (2.5), utworzymy pomocniczy funkcjonal:

$$(3.1) \quad J^* = C \int_0^1 \frac{\varepsilon_0(\xi) \xi [M(\xi)]^n}{[\sigma_0(\xi)]^n [F(\xi)]^{\mu n + \nu}} d\xi + \lambda_1 \left[ l \int_0^1 q(\xi) F(\xi) d\xi - W \right],$$

( $\lambda_1$  — mnożnik Lagrange'a),  
i obliczymy jego pierwszą wariację:

$$(3.2) \quad \delta J^* = C \int_0^1 \frac{\varepsilon_0 \xi M^{n-1}}{\sigma_0^n F^{\mu n + \nu + 1}} [nF \delta M - (\mu n + \nu) M \delta F] d\xi + \lambda_1 l \int_0^1 q \delta F d\xi,$$

Obliczając wariację  $\delta M$  ze wzoru (2.4):

$$(3.3) \quad \delta M = l^2 \int_0^\xi q(\eta) \delta E(\eta) (\xi - \eta) d\eta,$$

podstawiając ją do (3.2) i wykonując całkowanie przez części, otrzymujemy:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \delta J^* = & C \left( nl^2 \int_{\xi_0}^1 \frac{\varepsilon_0 \xi^2 M^{n-1}}{\sigma_0^n F^{\mu n + \nu}} d\xi \right) \left( \int_0^1 q \delta F d\xi \right) - \\ & - C \left( nl^2 \int_{\xi_0}^1 \frac{\varepsilon_0 \xi M^{n-1}}{\sigma_0^n F^{\mu n + \nu}} d\xi \right) \left( \int_0^1 \xi q \delta F d\xi \right) - \\ & - C \int_0^1 \left\{ \left[ nl^2 \int_{\xi_0}^\xi \frac{\varepsilon_0 M^{n-1}}{\sigma_0^n F^{\mu n + \nu}} \eta(\eta - \xi) d\eta \right] + (\mu n + \nu) \frac{\varepsilon_0 \xi M^n}{\sigma_0^n q F^{\mu n + \nu + 1}} - \lambda_2 \right\} q \delta F d\xi, \end{aligned}$$

gdzie:  $\xi_0$  i  $\lambda_2$  są dowolnymi stałymi.

Pierwsza wariacja funkcjonu (3.1) jest zatem równa zero, gdy przyjmujemy, że stała  $\xi_0 = 1$  oraz gdy spełnione jest równanie:

$$(3.5) \quad nl^2 \int_1^\xi \frac{\varepsilon_0 M^{n-1}}{\sigma_0^n F^{\mu n + \nu}} \eta(\eta - \xi) d\eta + (\mu n + \nu) \frac{\varepsilon_0 \xi M^n}{\sigma_0^n q F^{\mu n + \nu + 1}} = \lambda_2,$$

które stanowi warunek konieczny istnienia ekstremum funkcjonu (3.1).

W celu uproszczenia zapisu, zmienność ciężaru właściwego belki  $q(\xi)$  opiszemy za pomocą pewnej znanej bezwymiarowej funkcji  $K(\xi)$ , moment zginający, pochodzący od obciążenia zewnętrznego  $M_p(\xi)$ , za pomocą znanej funkcji  $m(\xi)$ , pole powierzchni przekroju za pomocą poszukiwanej funkcji  $\Phi(\xi)$ , oraz wprowadzimy bezwymiarową stałą  $\varepsilon$  według następujących zależności:

$$(3.6) \quad q = q_0 K(\xi), \quad M_p = M_{p0} m(\xi), \quad F = F_0 \Phi(\xi), \quad \varepsilon = l^2 q_0 F_0 / M_{p0}.$$

Wprowadzając wyrażenia (3.6) do równań (3.5), (2.4), (2.5) otrzymujemy odpowiednio:

$$(3.7) \quad \frac{\varepsilon_0 \xi \left[ m(\xi) + \varepsilon \int_0^\xi K(\eta) \Phi(\eta) (\xi - \eta) d\eta \right]^n}{\sigma_0^n K(\xi) [\Phi(\xi)]^{\mu n + \nu + 1}} = \\ = \mathcal{A}_1 + \varepsilon \left( \frac{n}{\mu n + \nu} \right) \int_\xi^1 \frac{\varepsilon_0 \left[ m(\eta) + \varepsilon \int_0^\eta K(\zeta) \Phi(\zeta) (\eta - \zeta) d\zeta \right]^{n-1}}{\sigma_0^n [\Phi(\eta)]^{\mu n + \nu}} \eta (\eta - \xi) d\eta,$$

$$(3.8) \quad M(\xi) = M_{p_0} \left[ m(\xi) + \varepsilon \int_0^\xi K(\eta) \Phi(\eta) (\xi - \eta) d\eta \right],$$

$$(3.9) \quad \int_0^1 K(\xi) \Phi(\xi) d\xi = \bar{W}, \quad \text{gdzie: } \bar{W} = \frac{W}{q_0 F_0 l},$$

$\mathcal{A}_1$  — jest mnożnikiem Lagrange'a.

Uwikłane równanie całkowe (3.7) i warunek izoperymetryczny (3.9) pozwalają na wyznaczenie poszukiwanego kształtu belki  $\Phi(\xi)$  i stałej  $\mathcal{A}_1$ , przy czym rozwiązanie to może być znalezione tylko na drodze numerycznej.

#### 4. Numeryczne rozwiązanie zagadnienia

W celu rozwiązania zagadnienia posłużono się metodą kolejnych przybliżeń, przedstawiając równanie (3.7) w postaci:

$$(4.1) \quad \Phi(\xi) = \hat{F}[\Phi(\xi)],$$

w której  $F$  oznacza pewien znany operator.

Zakładając funkcję  $\Phi_0(\xi)$  przybliżenia zerowego i podstawiając ją do prawej strony równania (4.1) otrzymujemy pierwsze przybliżenie; następne przybliżenia obliczamy ze wzoru:

$$(4.2) \quad \Phi_{i+1} = \hat{F}[\Phi_i(\xi)], \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

przy czym jako kryterium zbieżności rozwiązania przyjmujemy nierówność:

$$(4.3) \quad \frac{|\Phi_{i+1} - \Phi_i|}{\Phi_i} \leq \Delta,$$

obowiązującą dla każdej wartości  $\xi$ .

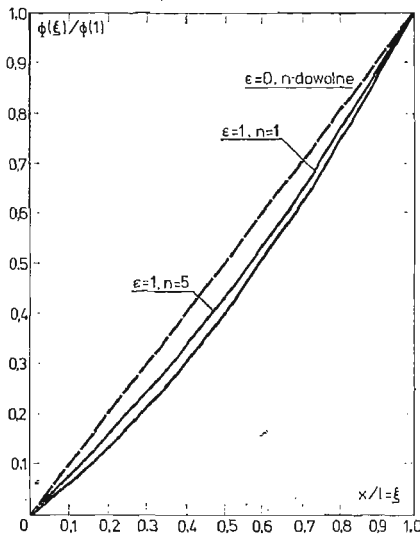
Ostatecznie równanie (3.7) przekształcono do postaci:

$$(4.4) \quad \Phi(\xi) = \left\{ \frac{\xi \left[ m(\xi) + \varepsilon \int_0^\xi \Phi(\eta) (\xi - \eta) d\eta \right]^n}{\mathcal{A}_1 + \varepsilon \frac{n}{\mu n + \nu} \int_\xi^1 \frac{\left[ m(\eta) + \varepsilon \int_0^\eta \Phi(\zeta) (\eta - \zeta) d\zeta \right]^{n-1}}{[\Phi(\eta)]^{\mu n + \nu}} \eta (\eta - \xi) d\eta} \right\}^{\frac{1}{\mu n + \nu + 1}},$$

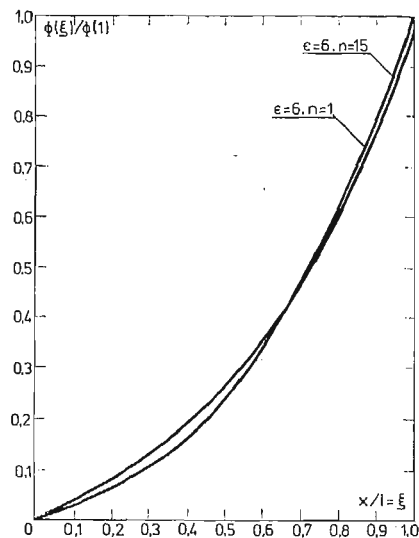
w której przyjęto, że materiał belki jest wytrzymałościowo jednorodny i ma stały ciężar właściwy tzn.:  $\varepsilon_0 = \text{const.}$ ,  $\sigma_0 = \text{const.}$ ,  $K(\xi) \equiv 1$ . Równanie to w szczególnym przypadku:

$m(\xi) = \xi$ ,  $\mu = 1$ ,  $\nu = 0$ ,  $n = 1$  przyjmuje postać równania zamieszczonego w pracy J. M. Cherna [3].

Obliczenia numeryczne przeprowadzono na maszynie CYBER 72; jako dane wejściowe programu przyjmowano: 1. bezwymiarowy ciężar belki  $\bar{W}$ , 2. parametr  $\epsilon$  charakteryzujący udział ciężaru własnego w obciążeniu całkowitym ( $\epsilon = 0$  — belka obciążona tylko siłami zewnętrznymi,  $\epsilon \rightarrow \infty$  — belka obciążona tylko ciężarem własnym), 3. parametr  $n$  charakteryzujący prawo fizyczne ( $n = 1$  — materiał liniowo-sprężysty,  $n \rightarrow \infty$  — materiał sztywno-plastyczny), 4. krok całkowania:  $\Delta\xi$  (po wykonaniu testów dokładności przyjęto:  $\Delta\xi = 0,01$ ).



Rys. 2

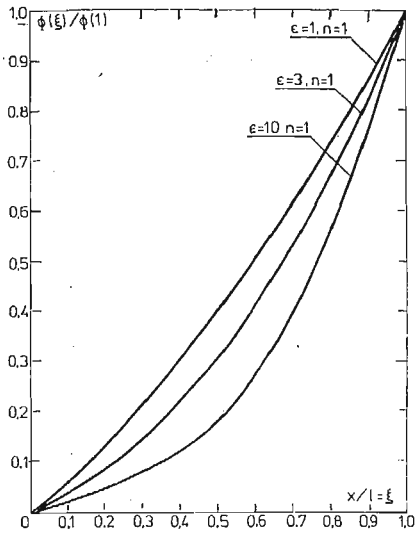


Rys. 3

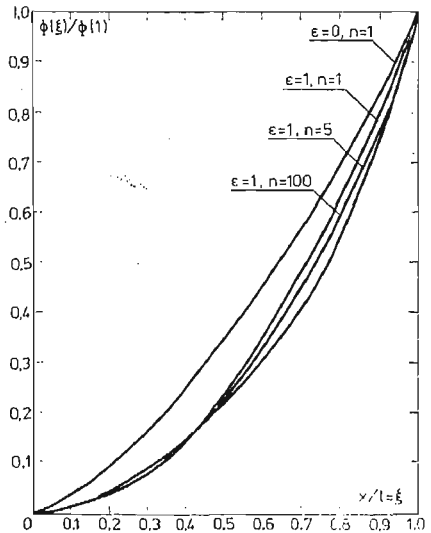
Stosowana metoda obliczeń okazała się wystarczająco szybko zbieżna, co pozwoliło na wyznaczenie poszukiwanego kształtu z dużą dokładnością. Przyjmując np.  $\Delta = 10^{-4}$  funkcję  $\Phi(\xi)$  otrzymano po ośmiu iteracjach; wówczas czas typowego przebiegu nie przekraczał ośmiu minut pracy procesora centralnego.

Obliczenia wykonano dla belki o stałej wysokości i poszukiwanym sposobie zmiany szerokości  $b(x)$ , tzn. dla:  $\mu = 1$  i  $\nu = 0$ , obciążonej: 1. siłą skupioną  $P$  działającą na swobodnym końcu (rys. 2, 3 i 4) i 2. siłami rozłożonymi o stałej intensywności  $p(x) = \text{const}$  (rys. 5 i 6). W obu przypadkach wyznaczono zależności kształtu belki od parametru  $n$  przy ustalonej wartości  $\epsilon$  oraz zależności od parametru  $\epsilon$  przy ustalonym  $n$ .

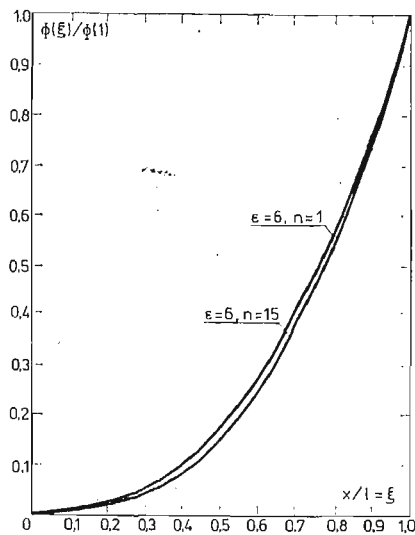
Na rys. 2 zilustrowano wpływ postaci prawa fizycznego (wykładnika  $n$ ) na optymalny kształt belki zginanej siłą skupioną i ciężarem własnym. Dla porównania na rysunku zamieszczono również kształt belki zginanej wyłącznie obciążeniem zewnętrznym; kształt ten nie zależy od postaci prawa fizycznego ponieważ minimalizacja ugięcia w punkcie działania siły skupionej jest równoważna minimalizacji pracy sił zewnętrznych [6]. Podobny charakter posiadają krzywe przedstawione na rys. 3, przy czym można zauważyć, że przy większym udziale ciężaru własnego w obciążeniu całkowitym wpływ wykładnika  $n$  w prawie



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

fizycznym, na optymalny kształt jest znacznie mniejszy. Na rys. 4 zamieszczono wykresy kształtu optymalnych belek liniowo-sprężystych ( $n = 1$ ) dla różnych wartości parametru  $\epsilon$ . Uwzględnienie ciężaru własnego istotnie wpływa na kształt optymalny, przy czym wykresy otrzymane dla wartości  $\epsilon > 10$  praktycznie nie różnią się od wykresu dla  $\epsilon = 10$ .

Podobny charakter mają rozwiązania przedstawione na rys. 5 i 6, dotyczące belki obciążonej siłami równomiernie rozłożonymi. Dla porównania zamieszczono na rys. 5 kształt belki liniowo-sprężystej bez uwzględnienia ciężaru własnego ( $\epsilon = 0$ ). Kształt ten zależy od wykładnika  $n$  [6].

## Literatura cytowana w tekście

1. R. L. BARNETT, *Minimum Deflection Design of a Uniformly Accelerating Cantilever Beam*, J. Appl. Mech., 30, (1963), 466—467.
2. L. C. W. DIXON, *Pontryagin's maximum principle applied to the profile of a beam*, J. of the Aeronautical Society, 71, (1967), 513—515.
3. J. M. CHERN, *Optimal structural design for given deflection in presence of body forces*, Int. J. Solids Structures, 7, (1971), 373—382.
4. R. T. SHIELD, W. PRAGER, *Optimal Structural Design for Given Deflection*, ZAMP, 4, 21, (1970), 513—523.
5. A. GAJEWSKI, *Optymalne kształtowanie belki wspornikowej z materiału nieliniowego fizycznie, obciążonej ciężarem własnym*, Rozpr. Inż., 3, 24, (1976), 453—467.
6. A. GAJEWSKI, *Optymalne kształtowanie wytrzymałościowe w przypadku materiałów o nieliniowości fizycznej*, Zeszyty Naukowe Politechniki Krakowskiej, Nr 5, Kraków, 1975.
4. Ju. N. RABOTNOW, *Polzuczest elementow konstrukcji*, Nauka, Moskwa, 1966.

## Резюме

ОПТИМАЛЬНОЕ ФОРМИРОВАНИЕ КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ НАГРУЖЕННОЙ  
ВНЕШНИМИ СИЛАМИ И СОБСТВЕННЫМ ВЕСОМ В УСЛОВИЯХ  
ПОЛЗУЧЕСТИ

Основной темой работы является оптимальное формирование консольной балки с прямоугольным поперечным сечением, нагруженной внешними распределёнными силами, а также силами от собственного веса. Обсуждаются балки изготовленные из материала неоднородного по сопротивлению, описанного степенным физическим законом. Этот закон является существенным для материалов в состоянии установившейся ползучести, нелинейно-упругих или упруго-пластичных. В работе обнаружены оптимальные формы балок с переменной шириной, нагруженных сосредоточенной на конце силой а также силами равномерно распределёнными с постоянной интенсивностью.

Исследовано также влияние показателя „ $n$ ” степенного закона на оптимальные формы. Вопрос решён с использованием классических методов вариационного исчисления, а результаты численных расчётов иллюстрированы различными рисунками.

## Summary

OPTIMAL DESIGN OF THE CANTILEVER BEAM LOADED BY EXTERNAL FORCES AND BY  
ITS OWN WEIGHT IN CREEPING CONDITIONS

There was investigated the optimal design of the cantilever beam with rectangular cross-section, loaded by the uniformly distributed external forces and by its own weight. There were taken into account beams of the inhomogeneous material, described by the power physical law. This law works in the steady state creep and for the materials non-linearly elastic and elastic-plastic. There were found the optimal shapes of beams with varying width, loaded by the force acted on the end of the beam and by the uniformly distributed force with constant intensity. There was also examined the influence of an exponent „ $n$ ” in the power law on the optimal shape of cantilever beam. The problem was solved on the basis of classical variational calculus. The results of numerical calculations are presented on numerous figures.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA  
INSTYTUT FIZYKI

Praca została złożona w Redakcji 12 grudnia 1977 r.