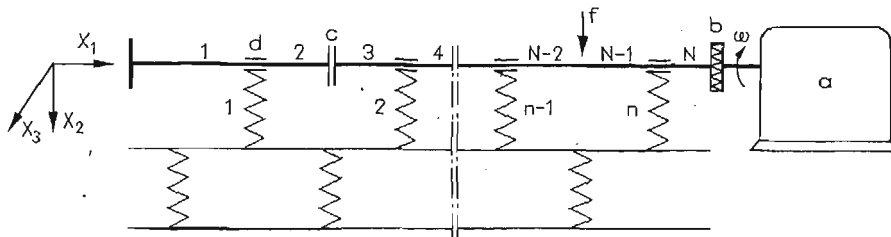


DRGANIA WYMUSZONE LINII WAŁÓW Z UWZGLĘDNIENIEM ASYMETRII SZTYWNOŚĆ  
GIĘTNEJ I PODATNOŚCI FUNDAMENTÓW  
METODA IDENTYFIKACJI PODATNOŚCI DYNAMICZNEJ FUNDAMENTÓW LINII WAŁÓW

JANUSZ KOLENDA (GDAŃSK)

1. Wstęp

Analiza drgań linii wałów wymaga z reguły uwzględnienia podatności filmu olejowego w łożyskach i konstrukcji podpierającej linię wałów. Literatura dotycząca tego zagadnienia nie obejmuje przypadku, gdy linia wałów zawiera odcinki o zróżnicowanych głównych centralnych momentach bezwładności przekroju poprzecznego. Przypadek taki występuje np. w liniach wałów zawierających wały korbowe, których analizę drgań prowadzi się po zastąpieniu wału korbowego modelem złożonym z mas dyskretnych i prostych odcinków wału. Założenie o jednakowej sztywności giętej w płaszczyźnie wykorbienia i w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny wykorbienia ograniczało dotychczas przydatność tego modelu do obliczeń drgań giętych. Przedstawiony w niniejszej pracy matematyczny opis drgań linii wałów nie wymaga spełnienia takiego założenia.



Rys. 1. Schemat analizowanego układu. *a* — źródło napędu; *b* — sprzęgło elastyczne; *c* — sprzęgło kołnierzowe; *d* — łożysko ślizgowe; *f* — siła wymuszająca; *n* — liczba łożysk; *N* — liczba odcinków obliczeniowych linii wałów;  $\omega = \text{const}$  — prędkość kątowa wirowania linii wałów

Zapewnienie należytej dokładności informacji o podatności filmu olejowego i konstrukcji podpierających linię wałów nie jest w praktyce zagadnieniem zamkniętym. Charakterystyki filmu olejowego są nieliniowe. Utrudnia to dokładne obliczenie podatności filmu dla warunków eksploatacyjnych, gdyż zależy ona m.in. od nieznanych a priori reakcji w łożyskach. Wyznaczanie dynamicznej podatności konstrukcji podpierającej przy pomocy wzbudników drgań związane jest z mankamentami [1], a dla niektórych konstrukcji jest trudne bądź niemożliwe do zrealizowania. Dotyczy to zwłaszcza przypadków, gdy łożyska są wbudowane, jak to ma miejsce np. z łożyskiem stewowym wału śrubowego, wbudowanym w sekcję rufową statku. W niniejszej pracy zaproponowano pośrednią metodę wyzna-

czania dynamicznej podatności konstrukcji podpierających linie wałów (łącznie z filmem olejowym) na przykładzie układu przedstawionego schematycznie na rys. 1, której stosowanie może być w pewnych przypadkach bardziej celowe.

Oznaczenia macierzy stosowane w tekście

$$a = \{a_j\} = \{a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_n\} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \text{ — macierz kolumnowa,}$$

$$A = \lceil a_j \rceil = \lceil a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_n \rceil = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & a_n \end{bmatrix} \text{ — macierz diagonalna,}$$

$$A = \lceil A_j \rceil = \lceil A_1, A_2, \dots, A_j, \dots, A_n \rceil = \begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & A_n \end{bmatrix} \text{ — macierz blokowo diagonalna (kwadratowa),}$$

$A_i = [a_{kl}(i)] = [a_{iki}]$  — macierz dotycząca  $i$ -tego odcinka linii wałów,

$A = [a_{kl}]_{m \times n}$  — macierz o wymiarach  $m \times n$ ,

$A = [a_{kl}]_n$  — macierz kwadratowa stopnia  $n$ ,

$A^x$  — transponowana macierz  $A$ .

## 2. Opis drgań linii wałów przy wymuszeniach okresowych

Analizowany układ traktowany jest jako liniowy. Zakłada się, że koło zamachowe, sprzęgła kołnierzone itp. elementy stanowią masy dyskretne. Przyjęto, że główna centralna oś bezwładności każdego odcinka linii wałów pokrywa się z osią obrotu. Zakłada się także, że wektory reakcji działających na wał w łożyskach przechodzą przez środki ciężkości przekrojów poprzecznych wału w połowie długości łożysk (przy czym długość łożyska nie musi być mała w porównaniu z długością danego odcinka wału, gdy podatności dynamiczne wyznacza się jak w p. 3).

Linie wałów podzielono na szereg odcinków obliczeniowych. Podziału dokonano w przekrojach, gdzie występują siły skupione (reakcje łożysk bądź siły wymuszające), w przekrojach przechodzących przez środki ciężkości mas dyskretnych oraz w miejscach łączenia odcinków o różnych stałych materiałowych bądź odcinków różniących się kierunkami głównych centralnych osi bezwładności przekroju poprzecznego. Przyjęto konwencję znaków jak na rys. 2. Osie  $x_{i1}$ ,  $x_{i2}$ ,  $x_{i3}$  stanowią lokalny układ współrzędnych  $i$ -tego odcinka, wirujący wraz z odcinkiem. Osie  $x_{i2}$ ,  $x_{i3}$  są równoległe do odpowiednich głównych centralnych osi bezwładności przekroju poprzecznego  $i$ -tego odcinka. Oś  $x_{i1}$  pokrywa się z osią obrotu linii wałów i z głównymi centralnymi osiami bezwładności odcinków. Zakłada się, że wektory uogólnionych sił zewnętrznych, główne centralne osie bezwładności mas dyskretnych i główne osie sprzęgła elastycznego pokrywają się z odpo-

wiednimi osiami lokalnych układów współrzędnych. Wpływ obciążeń rozłożonych nie jest w niniejszej pracy rozpatrywany.

Wielkości odnoszące się do poszczególnych przekrojów odcinków oznaczono następująco:

$$\underline{x}_{i1} = 0 \quad \underline{x}_{i1} = x \quad \underline{x}_{i1} = l_i \quad (i = 1, 2, \dots, N; \alpha = 1, 2, \dots, 6)$$

$u_{i0} = \{u_{i0\alpha}\}$   $u_{ix} = \{u_{ix\alpha}\}$   $u_{i1} = \{u_{i1\alpha}\}$  — macierze kolumnowe uogólnionych przemieszczeń,

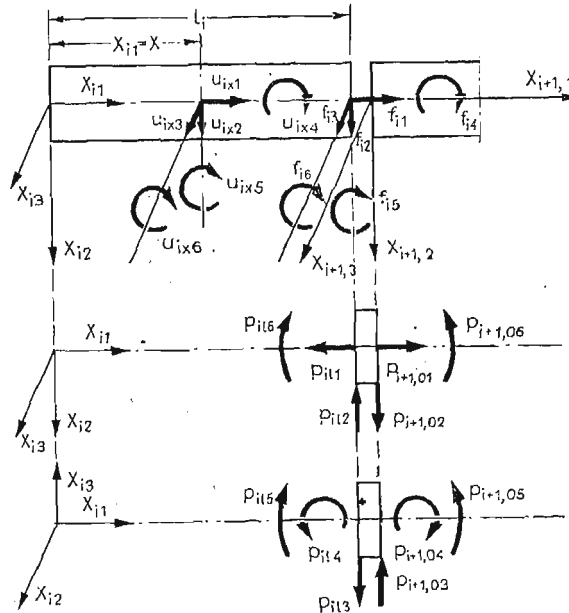
$p_{i0} = \{p_{i0\alpha}\}$   $p_{i1} = \{p_{i1\alpha}\}$   $p_{i1} = \{p_{i1\alpha}\}$  — macierze kolumnowe uogólnionych sił wewnętrznych,

$$\underline{x}_{i1} = l_i$$

$f_i = \{f_{i\alpha}\}$  — macierz kolumnowa uogólnionych sił zewnętrznych,

$M_i = \lceil m_{i\alpha} \rceil$  — diagonalna macierz bezwładności masy dyskretnej,

$C_i^s = \lceil c_{i\alpha}^s \rceil$  — diagonalna macierz sztywności sprzęgła elastycznego.



Rys. 2. Schemat obliczeniowy dla dwóch odcinków wału o odpowiednio równoległych osiach lokalnych układów współrzędnych.  $f_{i\alpha}$  — uogólniona siła zewnętrzna, działająca na  $i$ -ty odcinek obliczeniowy wału w końcowym jego przekroju w kierunku  $\alpha$ ;  $l_i$  — długość  $i$ -tego odcinka;  $p_{i1\alpha}$  — uogólniona siła wewnętrzna w końcowym przekroju  $i$ -tego odcinka w kierunku  $\alpha$ ;  $p_{i+1,0\alpha}$  — uogólniona siła wewnętrzna w początkowym przekroju  $(i+1)$ -go odcinka w kierunku  $\alpha$ ;  $u_{ix\alpha}$  — uogólnione przemieszczenie w przekroju  $x$   $i$ -tego odcinka w kierunku  $\alpha$

Ograniczając się do technicznej teorii drgań belek [2], równania drgań  $i$ -tego odcinka wału napiszemy w postaci:

$$(2.1) \quad \ddot{u}_{ix\alpha} + Q_{i\alpha} \dot{u}_{ix\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, 4, \quad (\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t},$$

gdzie  $Q_{i\alpha}$  jest liniowym operatorem różniczkowym ze względu na zmienną przestrzenną

$x_{i1} = x$ :

$$(2.2) \quad \begin{aligned} Q_{i1} &= -\left(\frac{E}{\rho}\right)_i \frac{\partial^2}{\partial x^2}, & Q_{i2} &= \left(\frac{EI_2}{A\rho}\right)_i \frac{\partial^4}{\partial x^4}, \\ Q_{i3} &= \left(\frac{EI_3}{A\rho}\right)_i \frac{\partial^4}{\partial x^4}, & Q_{i4} &= -\left(\frac{C}{I_s}\right)_i \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

$E_i$  — moduł Younga (dla  $i$ -tego odcinka),  $\rho_i$  — gęstość,  $A_i$  — pole przekroju poprzecznego,  $(I_2)_i$ ,  $(I_3)_i$  — główne centralne momenty bezwładności przekroju poprzecznego,  $C_i$  — sztywność skrętna jednostki długości wału,  $(I_s)_i$  — moment bezwładności jednostki długości wału względem osi obrotu.

Warunki brzegowe dla linii wałów przedstawionej na rys. 1 mają postać:

$$(2.3) \quad p_{10\alpha} = \pm m_{0\alpha} \ddot{u}_{10\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, 6,$$

$$(2.4) \quad p_{N1\alpha} = \mp m_{N\alpha} \ddot{u}_{N1\alpha} \mp c_{N\alpha}^s u_{N1\alpha}.$$

Przy podwójnych znakach „+” i „-” dolny znak dotyczy  $\alpha = 5, 6$ . W przekrojach, w których działają skupione siły zewnętrzne i w przekrojach przechodzących przez środki ciężkości mas dyskretnych, spełnione są warunki:

$$(2.5) \quad \begin{cases} u_{i1\alpha} = u_{i+1,0\alpha}, \\ p_{i1\alpha} = p_{i+1,0\alpha} \pm f_{i\alpha}, \end{cases}$$

$$(2.6) \quad \begin{cases} u_{i1\alpha} = u_{i+1,0\alpha}, \\ p_{i1\alpha} = p_{i+1,0\alpha} \mp m_{i\alpha} \ddot{u}_{i1\alpha}. \end{cases}$$

Warunki (2.5) i (2.6) dotyczą przypadków, w których osie lokalnych układów współrzędnych  $i$ -tego oraz  $(i+1)$ -go odcinka wału są do siebie odpowiednio równoległe — tzn. gdy odcinki te wykazują kołową symetrię sztywności giętej lub ich główne centralne osie bezwładności przekroju poprzecznego są do siebie odpowiednio równoległe. W przeciwnym przypadku należy zestawić analogiczne warunki po odniesieniu wielkości dotyczących  $i$ -tego odcinka do lokalnego układu współrzędnych  $(i+1)$ -go odcinka. Dla uproszczenia pominięto w (2.6) wpływ siły ciężkości  $i$ -tej masy dyskretnej; może on być uwzględniony jak  $f_{i\alpha}$  w (2.5).

Znane zewnętrzne siły wymuszające oznaczymy w odróżnieniu od reakcji łożysk dodatkowo indeksem górnym „ $w$ ” i zapiszemy je w postaci:

$$(2.7) \quad f_{i\alpha}^w = \sum_{\nu} (f_{i\alpha}^{w1(\nu)} \cos \nu \omega t + f_{i\alpha}^{w2(\nu)} \sin \nu \omega t), \quad \nu = 0, 1, 2, \dots; \alpha = 1, \dots, 6,$$

gdzie  $\omega = \text{const}$  — podstawowa częstość wymuszeń.

Przyjmujemy, że częstość  $\omega$  jest równa prędkości kątowej wirowania linii wałów (co z reguły zachodzi w praktyce dla układów bezprzekładniowych).

Analogicznie przedstawimy nieznanne wielkości:

$$(2.8) \quad f_{i\alpha} = \sum_{\nu} (f_{i\alpha}^{1(\nu)} \cos \nu \omega t + f_{i\alpha}^{2(\nu)} \sin \nu \omega t),$$

$$(2.9) \quad u_{i\alpha} = \sum_{\nu} (u_{i\alpha}^{1(\nu)} \cos \nu \omega t + u_{i\alpha}^{2(\nu)} \sin \nu \omega t),$$

$$(2.10) \quad p_{i\alpha} = \sum_{\nu} (p_{i\alpha}^{1(\nu)} \cos \nu \omega t + p_{i\alpha}^{2(\nu)} \sin \nu \omega t).$$

Podstawiając (2.9) do równań (2.1) i uwzględniając, że

$$u_{ix5} = -u'_{ix3}, \quad u_{ix6} = u'_{ix2}, \quad (') = \frac{\partial}{\partial x},$$

otrzymuje się znane rozwiązania [2], które wraz z rozwiązaniami dla  $\nu = 0$  zapisać można w postaci macierzowej:

$$(2.11) \quad u_{ix} = \sum_{\nu} C_{ix}^{(\nu)} (a_i^{1(\nu)} \cos \nu \omega t + a_i^{2(\nu)} \sin \nu \omega t), \quad \nu = 0, 1, 2, \dots,$$

gdzie:

$$a_i^{1(\nu)} = \{a_{iq}^{1(\nu)}\}, \quad a_i^{2(\nu)} = \{a_{iq}^{2(\nu)}\}, \quad q = 1, 2, \dots, 12$$

— macierze kolumnowe współczynników rozwiązań dla  $\nu$ -tych harmonicznych,

$$C_{ix}^{(0)} = \begin{bmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^3 & x^2 & x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x^3 & x^2 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3x^2 & -2x & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3x^2 & 2x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(i)}$$

$$C_{ix}^{(\nu)} = [(C_{ix}^{(\nu)})_1, (C_{ix}^{(\nu)})_2],$$

$$(C_{ix}^{(\nu)})_1 = \begin{bmatrix} \cos \lambda_r^{(\nu)} x & \sin \lambda_r^{(\nu)} x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \lambda_2^{(\nu)} x & \sin \lambda_2^{(\nu)} x & \operatorname{ch} \lambda_2^{(\nu)} x & \operatorname{sh} \lambda_2^{(\nu)} x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2^{(\nu)} \sin \lambda_2^{(\nu)} x & \lambda_2^{(\nu)} \cos \lambda_2^{(\nu)} x & \lambda_2^{(\nu)} \operatorname{sh} \lambda_2^{(\nu)} x & \lambda_2^{(\nu)} \operatorname{ch} \lambda_2^{(\nu)} x \end{bmatrix}_{(i)}$$

$$(C_{ix}^{(\nu)})_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos \lambda_3^{(\nu)} x & \sin \lambda_3^{(\nu)} x & \operatorname{ch} \lambda_3^{(\nu)} x & \operatorname{sh} \lambda_3^{(\nu)} x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \lambda_3^{(\nu)} x & \sin \lambda_3^{(\nu)} x \\ \lambda_3^{(\nu)} \sin \lambda_3^{(\nu)} x & -\lambda_3^{(\nu)} \cos \lambda_3^{(\nu)} x & -\lambda_3^{(\nu)} \operatorname{sh} \lambda_3^{(\nu)} x & -\lambda_3^{(\nu)} \operatorname{ch} \lambda_3^{(\nu)} x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(i)}$$

$$(\lambda_r^{(\nu)})_i = \nu \omega \left( \frac{\rho}{E} \right)_i^{\frac{1}{2}}, \quad (\lambda_2^{(\nu)})_i = (\nu \omega)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{A \rho}{EI_2} \right)_i^{\frac{1}{4}},$$

$$(\lambda_3^{(\nu)})_i = (\nu \omega)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{A \rho}{EI_3} \right)_i^{\frac{1}{4}}, \quad (\lambda_s^{(\nu)})_i = \nu \omega \left( \frac{I_s}{C} \right)_i^{\frac{1}{2}}.$$

W dalszej części pracy pominięto indeksy  $(\nu)$  w wyrażeniach  $\lambda_r^{(\nu)}$ ,  $\lambda_2^{(\nu)}$ ,  $\lambda_3^{(\nu)}$ ,  $\lambda_s^{(\nu)}$ .

Siły wewnętrzne związane są z przemieszczeniami  $u_{ix\alpha}$  relacjami:

$$(2.12) \quad \begin{aligned} p_{ix1} &= E_i A_i u'_{ix1}, & p_{ix2} &= -E_i (I_2)_i u''_{ix2}, & p_{ix3} &= -E_i (I_3)_i u'''_{ix3}, \\ p_{ix4} &= C_i (I_s)_i u'_{ix4}, & p_{ix5} &= E_i (I_3)_i u'_{ix3}, & p_{ix6} &= -E_i (I_2)_i u'_{ix2}. \end{aligned}$$

W wyniku uwzględnienia postaci rozwiązań (2.11) i relacji (2.12) otrzymuje się:

$$(2.13) \quad p_{ix} = \sum_{\nu} A_{ix}^{(\nu)} (a_i^{1(\nu)} \cos \nu \omega t + a_i^{2(\nu)} \sin \nu \omega t),$$

gdzie:

$$A_{ix}^{(0)} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6EI_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6EI_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & CI_s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6EI_3 x & 2EI_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6EI_2 x & -2EI_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{(i)}$$

$$A_{ix}^{(\nu)} = [(A_{ix}^{(\nu)})_1, (A_{ix}^{(\nu)})_2],$$

$$(A_{ix}^{(\nu)})_1 =$$

$$\begin{bmatrix} -EA\lambda_r \sin \lambda_r x & EA\lambda_r \cos \lambda_r x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -EI_2 \lambda_2^3 \sin \lambda_2 x & EI_2 \lambda_2^3 \cos \lambda_2 x & -EI_2 \lambda_2^3 \operatorname{sh} \lambda_2 x & -EI_2 \lambda_2^3 \operatorname{ch} \lambda_2 x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EI_2 \lambda_2^2 \cos \lambda_2 x & EI_2 \lambda_2^2 \sin \lambda_2 x & -EI_2 \lambda_2^2 \operatorname{ch} \lambda_2 x & -EI_2 \lambda_2^2 \operatorname{sh} \lambda_2 x \end{bmatrix}^{(i)}$$

$$(A_{ix}^{(\nu)})_2 =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EI_3 \lambda_3^3 \sin \lambda_3 x & EI_3 \lambda_3^3 \cos \lambda_3 x & -EI_3 \lambda_3^3 \operatorname{sh} \lambda_3 x & -EI_3 \lambda_3^3 \operatorname{ch} \lambda_3 x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -CI_s \lambda_s \sin \lambda_s x & CI_s \lambda_s \cos \lambda_s x \\ -EI_3 \lambda_3^2 \cos \lambda_3 x & -EI_3 \lambda_3^2 \sin \lambda_3 x & EI_3 \lambda_3^2 \operatorname{ch} \lambda_3 x & EI_3 \lambda_3^2 \operatorname{sh} \lambda_3 x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{(i)}$$

W celu ułatwienia dalszych obliczeń przekształcimy wyrażenia (2.7), (2.8), (2.11) i (2.13) do postaci:

$$(2.14) \quad f_{i\alpha}^w = \sum_{\mu} f_{i\alpha}^{w(\mu)} \exp(j\mu \omega t), \quad \mu = \dots, -\nu, \dots, -1, 0, 1, \dots, \nu, \dots,$$

$$(2.15) \quad f_{i\alpha} = \sum_{\mu} f_{i\alpha}^{(\mu)} \exp(j\mu \omega t),$$

$$(2.16) \quad u_{ix} = \sum_{\mu} u_{ix}^{(\mu)} \exp(j\mu\omega t), \quad u_{ix}^{(\mu)} = C_{ix}^{(\nu)} a_i^{(\mu)}, \quad \nu = |\mu|, \quad a_i^{(\mu)} = \{a_{iq}^{(\mu)}\},$$

$$(2.17) \quad p_{ix} = \sum_{\mu} p_{ix}^{(\mu)} \exp(j\mu\omega t), \quad p_{ix}^{(\mu)} = A_{ix}^{(\nu)} a_i^{(\mu)},$$

gdzie:

$$f_{i\alpha}^{w(-\nu)} = \frac{1}{2}(f_{i\alpha}^{w1(\nu)} + jf_{i\alpha}^{w2(\nu)}), \quad f_{i\alpha}^{w(0)} = f_{i\alpha}^{w1(0)}, \quad f_{i\alpha}^{w(\nu)} = \frac{1}{2}(f_{i\alpha}^{w1(\nu)} - jf_{i\alpha}^{w2(\nu)}),$$

$$f_{i\alpha}^{(-\nu)} = \frac{1}{2}(f_{i\alpha}^{1(\nu)} + jf_{i\alpha}^{2(\nu)}), \quad f_{i\alpha}^{(0)} = f_{i\alpha}^{1(0)}, \quad f_{i\alpha}^{(\nu)} = \frac{1}{2}(f_{i\alpha}^{1(\nu)} - jf_{i\alpha}^{2(\nu)}),$$

$$a_{iq}^{(-\nu)} = \frac{1}{2}(a_{iq}^{1(\nu)} + ja_{iq}^{2(\nu)}), \quad a_{iq}^{(0)} = a_{iq}^{1(0)}, \quad a_{iq}^{(\nu)} = \frac{1}{2}(a_{iq}^{1(\nu)} - ja_{iq}^{2(\nu)}),$$

$j$  — jednostka urojona.

Po podstawieniu wyrażeń (2.15)—(2.17) do warunków (2.5) otrzymuje się:

$$(2.18) \quad a_{i+1}^{(\mu)} = B_i^{(\nu)} a_i^{(\mu)} + F_i^{(\nu)} f_i^{(\mu)},$$

gdzie:

$$f_i^{(\mu)} = \{f_{i\alpha}^{(\mu)}\}, \quad \alpha = 1, \dots, 6,$$

$$F_i^{(\nu)} = [h_{rs}^{(\nu)}]_{12 \times 6},$$

$$h_{11}^{(0)} = -\frac{1}{(EA)_{i+1}}, \quad h_{32}^{(0)} = \frac{1}{6(EI_2)_{i+1}}, \quad h_{46}^{(0)} = -\frac{1}{2(EI_2)_{i+1}},$$

$$h_{73}^{(0)} = \frac{1}{6(EI_3)_{i+1}}, \quad h_{85}^{(0)} = \frac{1}{2(EI_3)_{i+1}}, \quad h_{11,4}^{(0)} = -\frac{1}{(CI_s)_{i+1}},$$

$$h_{21}^{(\nu)} = -\frac{1}{(EA\lambda_r)_{i+1}}, \quad h_{36}^{(\nu)} = -h_{56}^{(\nu)} = \frac{1}{2(EI_2\lambda_2^2)_{i+1}}, \quad h_{92}^{(\nu)} = -h_{72}^{(\nu)} = \frac{1}{2(EI_3\lambda_3^2)_{i+1}},$$

$$h_{62}^{(\nu)} = -h_{42}^{(\nu)} = \frac{1}{2(EI_2\lambda_2^2)_{i+1}}, \quad h_{10,3}^{(\nu)} = -h_{83}^{(\nu)} = \frac{1}{2(EI_3\lambda_3^3)_{i+1}}, \quad h_{12,4}^{(\nu)} = -\frac{1}{(CI_s\lambda_s)_{i+1}}.$$

Pozostałe elementy macierzy  $F_i^{(\nu)}$  są zerowe.

Macierze  $B_i^{(\nu)}$  mogą być traktowane jako macierze przejścia, wiążące współczynniki  $\mu$ -tych harmonicznym rozwiązań dla dwóch sąsiednich odcinków wału. Mają one blokowo diagonalną postać:

$$(2.19) \quad B_i^{(\nu)} = \begin{bmatrix} B_{11}^{(\nu)} & & \\ & \dots & \\ & & B_{14}^{(\nu)} \end{bmatrix}_{12},$$

$$B_{11}^{(0)} = \begin{bmatrix} (EA)_i & 0 \\ (EA)_{i+1} & \\ l_i & 1 \end{bmatrix},$$

(2.19)  
[cd]

$$B_{i2(3)}^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{(EI)_i}{(EI)_{i+1}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3(EI)_i}{(EI)_{i+1}} & \frac{(EI)_i}{(EI)_{i+1}} & 0 & 0 \\ 3I_i^2 & 2I_i & 1 & 0 \\ I_i^3 & I_i^2 & I_i & 1 \end{bmatrix}_{(i)}$$

$$B_{i4}^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{(CI_s)_i}{(CI_s)_{i+1}} & 0 \\ I_i & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_{i1}^{(v)} = \begin{bmatrix} \cos \lambda_r l & \sin \lambda_r l \\ -e_r^{(v)} \sin \lambda_r l & e_r^{(v)} \cos \lambda_r l \end{bmatrix}_{(i)},$$

$$B_{i2(3)}^{(v)} = \begin{bmatrix} e_1^{(v)} \cos \lambda l & e_1^{(v)} \sin \lambda l & e_2^{(v)} \operatorname{ch} \lambda l & e_2^{(v)} \operatorname{sh} \lambda l \\ -e_3^{(v)} \sin \lambda l & e_3^{(v)} \cos \lambda l & e_4^{(v)} \operatorname{sh} \lambda l & e_4^{(v)} \operatorname{ch} \lambda l \\ e_2^{(v)} \cos \lambda l & e_2^{(v)} \sin \lambda l & e_1^{(v)} \operatorname{ch} \lambda l & e_1^{(v)} \operatorname{sh} \lambda l \\ -e_4^{(v)} \sin \lambda l & e_4^{(v)} \cos \lambda l & e_3^{(v)} \operatorname{sh} \lambda l & e_3^{(v)} \operatorname{ch} \lambda l \end{bmatrix}_{(i)},$$

$$B_{i4}^{(v)} = \begin{bmatrix} \cos \lambda_s l & \sin \lambda_s l \\ -e_s^{(v)} \sin \lambda_s l & e_s^{(v)} \cos \lambda_s l \end{bmatrix}_{(i)},$$

$$(e_r^{(v)})_i = \frac{(EA \lambda_r)_i}{(EA \lambda_r)_{i+1}}, \quad (e_1^{(v)})_i = \frac{1}{2} + \frac{(EI \lambda^2)_i}{2(EI \lambda^2)_{i+1}},$$

$$(e_2^{(v)})_i = \frac{1}{2} - \frac{(EI \lambda^2)_i}{2(EI \lambda^2)_{i+1}}, \quad (e_3^{(v)})_i = \frac{\lambda_i}{2\lambda_{i+1}} + \frac{(EI \lambda^3)_i}{2(EI \lambda^3)_{i+1}},$$

$$(e_4^{(v)})_i = \frac{\lambda_i}{2\lambda_{i+1}} - \frac{(EI \lambda^3)_i}{2(EI \lambda^3)_{i+1}}, \quad (e_s^{(v)})_i = \frac{(CI_s \lambda_s)_i}{(CI_s \lambda_s)_{i+1}},$$

przy czym dla  $B_{i2}^{(v)}$  należy podstawić  $I = I_2$ ,  $\lambda = \lambda_2$  oraz dla  $B_{i3}^{(v)}$ :  $I = I_3$ ,  $\lambda = \lambda_3$ .

Wykorzystując wzór (2.18) dla przypadku, gdy  $(s-1)$  dalszych odcinków obliczeniowych obciążonych jest w swych końcowych przekrojach siłami skupionymi, otrzymuje się:

$$(2.20) \quad a_{i+s}^{(\mu)} = B_{i+s-1}^{(v)} B_{i+s-2}^{(v)} \dots B_i^{(v)} a_i^{(\mu)} + B_{i+s-1}^{(v)} B_{i+s-2}^{(v)} \dots B_{i+1}^{(v)} F_{i+1}^{(v)} f_{i+1}^{(\mu)} + \\ + B_{i+s-1}^{(v)} B_{i+s-2}^{(v)} \dots B_{i+2}^{(v)} F_{i+1}^{(v)} f_{i+1}^{(\mu)} + \dots + F_{i+s-1}^{(v)} f_{i+s-1}^{(\mu)}.$$

W obliczeniach drgań linii wałów przypadki takie mogą mieć miejsce wówczas, gdy wpływ niektórych mas dyskretnych (np. sprzęgieł kołnierzowych) jest zaniedbywalny, natomiast reakcje łożysk nie mogą być pominięte. Liczba macierzy  $B^{(v)}$ , mnożonych przez siebie według zależności (2.20), może być wówczas znaczna. Macierze  $B^{(v)}$  mają jednakże tę dogodną własność<sup>1)</sup>, że dla odcinków wału o jednakowych stałych materiałowych zależność

<sup>1)</sup> Przyjęcie liniowego modelu tłumienia wewnętrznego w linii wałów oraz uwzględnienie wpływu na drgania giętne stałych sił poosiowych, odkształceń postaciowych od sił poprzecznych i momentów sił bezwładności obrotu nie eliminuje tej własności.



(2.20) redukuje się do postaci:

$$(2.21) \quad a_{i+s}^{(\mu)} = B_{i+s-1, i}^{(\nu)} a_i^{(\mu)} + B_{i+s-1, i+1}^{(\nu)} F_i^{(\nu)} f_i^{(\mu)} + B_{i+s-1, i+2}^{(\nu)} F_i^{(\nu)} f_{i+1}^{(\mu)} + \dots + F_i^{(\nu)} f_{i+s-1}^{(\mu)}.$$

Macierze  $B_{i+s-1, i+k}^{(\nu)}$  powstają z macierzy  $B_i^{(\nu)}$  przez podstawienie

$$(e_r^{(\nu)})_i = (e_1^{(\nu)})_i = (e_3^{(\nu)})_i = (e_s^{(\nu)})_i = 1, \quad (e_2^{(\nu)})_i = (e_4^{(\nu)})_i = 0$$

i zastąpienie  $l_i$  przez

$$\sum_{p=i+k}^{\rho=i+s-1} l_p.$$

Należy zaznaczyć, że własności tej nie posiadają spotykane w literaturze macierze przejścia dla wektorów stanu utworzonych z elementów o tym samym wymiarze [2].

Przy występowaniu masy dyskretnej równania określające macierze kolumnowe współczynników  $a_{i+1}^{(\mu)}$  mają na podstawie warunków (2.6) i wyrażeń (2.16), (2.17) postać:

$$(2.22) \quad a_{i+1}^{(\mu)} = B_{mi}^{(\nu)} a_i^{(\mu)},$$

gdzie:

$$B_{mi}^{(0)} = B_i^{(0)}, \\ B_{mi}^{(\nu)} = B_i^{(\nu)} + \hat{B}_i^{(\nu)}, \quad \nu \neq 0.$$

Macierze  $B_i^{(0)}$ ,  $B_i^{(\nu)}$  są identyczne jak w (2.19), natomiast

$$(2.23) \quad \hat{B}_i^{(\nu)} = \begin{bmatrix} \hat{B}_{i1}^{(\nu)} & \dots & \hat{B}_{i4}^{(\nu)} \end{bmatrix}, \\ \hat{B}_{i1}^{(\nu)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ m_1^{(\nu)} \cos \lambda_r l & m_1^{(\nu)} \sin \lambda_r l \end{bmatrix}_{(i)}, \\ \hat{B}_{i2}^{(\nu)} = \begin{bmatrix} -m_2^{(\nu)} \sin \lambda_2 l & m_2^{(\nu)} \cos \lambda_2 l & m_2^{(\nu)} \operatorname{sh} \lambda_2 l & m_2^{(\nu)} \operatorname{ch} \lambda_2 l \\ -m_2^{(\nu)} \cos \lambda_2 l & -m_2^{(\nu)} \sin \lambda_2 l & -m_2^{(\nu)} \operatorname{ch} \lambda_2 l & -m_2^{(\nu)} \operatorname{sh} \lambda_2 l \\ m_2^{(\nu)} \sin \lambda_2 l & -m_2^{(\nu)} \cos \lambda_2 l & -m_2^{(\nu)} \operatorname{sh} \lambda_2 l & -m_2^{(\nu)} \operatorname{ch} \lambda_2 l \\ m_2^{(\nu)} \cos \lambda_2 l & m_2^{(\nu)} \sin \lambda_2 l & m_2^{(\nu)} \operatorname{ch} \lambda_2 l & m_2^{(\nu)} \operatorname{sh} \lambda_2 l \end{bmatrix}_{(i)}, \\ \hat{B}_{i4}^{(\nu)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ m_4^{(\nu)} \cos \lambda_s l & m_4^{(\nu)} \sin \lambda_s l \end{bmatrix}_{(i)}.$$

Macierze  $\hat{B}_{i3}^{(\nu)}$  otrzymuje się z macierzy  $\hat{B}_{i2}^{(\nu)}$  zastąpieniem  $m_2^{(\nu)}$  przez  $m_3^{(\nu)}$ ,  $m_6^{(\nu)}$  przez  $m_5^{(\nu)}$  oraz  $\lambda_2$  przez  $\lambda_3$ . Oznaczono tu:

$$m_{i1}^{(\nu)} = \frac{m_{i1}(\nu\omega)^2}{(EA\lambda_r)_{i+1}}, \quad m_{i2}^{(\nu)} = \frac{m_{i2}(\nu\omega)^2}{(EI_2\lambda_2^3)_{i+1}}, \quad m_{i3}^{(\nu)} = \frac{m_{i3}(\nu\omega)^2}{(EI_3\lambda_3^3)_{i+1}}, \\ m_{i4}^{(\nu)} = \frac{m_{i4}(\nu\omega)^2}{(CI_s\lambda_s)_{i+1}}, \quad m_{i5}^{(\nu)} = \frac{m_{i5}(\nu\omega)^2}{(EI_3\lambda_3^3)_{i+1}}, \quad m_{i6}^{(\nu)} = \frac{m_{i6}(\nu\omega)^2}{(EI_2\lambda_2^2)_{i+1}}.$$

Ukazana powyżej własność iloczynów macierzy  $B_i^{(\nu)}$  nie dotyczy iloczynów typu  $\hat{B}_i^{(\nu)} \cdot \hat{B}_j^{(\nu)}$ ,  $B_i^{(\nu)} \cdot \hat{B}_j^{(\nu)}$ ,  $\hat{B}_i^{(\nu)} \cdot B_j^{(\nu)}$ .

Relację pomiędzy macierzami kolumnowymi  $a_{i+1}^{(\mu)}$  oraz  $a_i^{(\mu)}$  dwóch połączonych ze sobą odcinków wałów o różnych stałych materiałowych opisują macierze przejścia  $B_i^{(\nu)}$  (2.19):

$$(2.24) \quad a_{i+1}^{(\mu)} = B_i^{(\nu)} a_i^{(\mu)}.$$

Wyprowadzone powyżej zależności odnoszą się do ruchomych układów współrzędnych. W celu uwzględnienia oddziaływania konstrukcji podpierającej linię wałów przyjęto nieruchomy ortogonalny układ współrzędnych  $X_1, X_2, X_3$  (rys. 1), którego oś  $X_1$  pokrywa się z osią obrotu linii wałów. Osie  $X_2, X_3$  są w chwili  $t_0 = 2k\pi/\omega, k = 0, 1, 2, \dots$  odpowiednio równoległe do osi  $x_{i2}, x_{i3}$  lokalnych układów współrzędnych tych odcinków obliczeniowych, dla których  $(I_2)_i = (I_3)_i$ . Osie  $x_{i2}, x_{i3}$  lokalnych układów współrzędnych tych odcinków, dla których  $(I_2)_i \neq (I_3)_i$ , mogą w ogólnym przypadku nie być w chwili  $t_0$  odpowiednio równoległe do osi  $X_2, X_3$ . Niech zatem  $\delta_i$  oznacza kąt obrotu lokalnego układu współrzędnych  $i$ -tego odcinka obliczeniowego w stosunku do układu  $X_1, X_2, X_3$ , mierzony w kierunku wirowania wałów w chwili  $t_0$ .

Dla uproszczenia opisu wprowadzono ciąg indeksów  $1, 2, \dots, n$  ( $n$  — liczba łożysk), odpowiadających kolejnym podporom łożyskowym. Amplitudy  $\mu$ -tych harmonicznym uogólnionych reakcji łożysk i przemieszczeń wału w miejscach podpór łożyskowych w lokalnych układach współrzędnych oznaczono

$$f_{1\alpha}^{(\mu)}, \dots, f_{n\alpha}^{(\mu)}; \quad u_{1\alpha}^{(\mu)}, \dots, u_{n\alpha}^{(\mu)}; \quad \alpha = 1, 2, \dots, 6.$$

Analogiczne wielkości w układzie  $X_1, X_2, X_3$  oznaczono

$$\tilde{f}_{1\alpha}^{(\mu)}, \dots, \tilde{f}_{n\alpha}^{(\mu)}; \quad \tilde{u}_{1\alpha}^{(\mu)}, \dots, \tilde{u}_{n\alpha}^{(\mu)}.$$

Zatem w dowolnej chwili  $t$  zachodzą relacje:

$$(2.25) \quad \tilde{u}_i = \Pi_i u_i, \quad \tilde{f}_i = \Pi_i f_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i &= \sum_{\mu} \tilde{u}_i^{(\mu)} \exp(j\mu\omega t), & \tilde{u}_i^{(\mu)} &= \{\tilde{u}_{i\alpha}^{(\mu)}\}, \\ u_i &= \sum_{\mu} u_i^{(\mu)} \exp(j\mu\omega t), & u_i^{(\mu)} &= \{u_{i\alpha}^{(\mu)}\}, \\ \tilde{f}_i &= \sum_{\mu} \tilde{f}_i^{(\mu)} \exp(j\mu\omega t), & \tilde{f}_i^{(\mu)} &= \{\tilde{f}_{i\alpha}^{(\mu)}\}, \\ f_i &= \sum_{\mu} f_i^{(\mu)} \exp(j\mu\omega t), & f_i^{(\mu)} &= \{f_{i\alpha}^{(\mu)}\}, \end{aligned}$$

$$\Pi_i = \begin{bmatrix} \Gamma \Pi'_i & \Pi'_i \end{bmatrix}, \quad \Pi'_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\omega t + \delta_i) & -\sin(\omega t + \delta_i) \\ 0 & \sin(\omega t + \delta_i) & \cos(\omega t + \delta_i) \end{bmatrix}.$$

Macierze  $\Pi_i$  można przedstawić w postaci:

$$(2.26) \quad \begin{aligned} \Pi_i &= \check{\Pi}_i \exp(-j\omega t) + \hat{\Pi}_i + \check{\Pi}_i \exp(j\omega t), \\ \check{\Pi}_i &= \begin{bmatrix} \check{\Pi}'_i & \check{\Pi}'_i \end{bmatrix}, \quad \hat{\Pi}_i = \begin{bmatrix} \hat{\Pi}'_i & \hat{\Pi}'_i \end{bmatrix}, \\ \check{\Pi}'_i &= \frac{1}{2} \exp(-j\delta_i) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -j \\ 0 & j & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\Pi}'_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \hat{\Pi}'_i &= \frac{1}{2} \exp(j\delta_i) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & j \\ 0 & -j & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

W celu wyprowadzenia zależności obejmującej  $n$  łożysk tworzymy macierze:

$$(2.27) \quad \Pi = \check{\Pi} \exp(-j\omega t) + \tilde{\Pi} + \hat{\Pi} \exp(j\omega t),$$

$$\check{\Pi} = \Gamma \check{\Pi}_i \perp_{6n}, \quad \tilde{\Pi} = \Gamma \tilde{\Pi}_i \perp_{6n}, \quad \hat{\Pi} = \Gamma \hat{\Pi}_i \perp_{6n}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Dynamiczne własności konstrukcji podpierającej linię wałów można określić przy pomocy macierzy podatności dynamicznej tej konstrukcji:

$$D^{(\mu)} = [D_{ij}^{(\mu)}]_{6n}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

$$D_{ij}^{(\mu)} = [d_{ij\alpha\beta}^{(\mu)}]_6, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, 6; \quad \mu = \dots, -\nu, \dots, -1, 0, 1 \dots \nu \dots,$$

gdzie  $d_{ij\alpha\beta}^{(\mu)}$  jest wartością ilorazu amplitudy  $\mu$ -tej harmonicznej przemieszczenia w miejscu  $i$ -tej podpory łożyskowej w kierunku  $\alpha$  i amplitudy  $\mu$ -tej harmonicznej wywołującej to przemieszczenie siły, przyłożonej w miejscu  $j$ -tej podpory łożyskowej w kierunku  $\beta$ :

$$(2.28) \quad d_{ij\alpha\beta}^{(\mu)} = \tilde{u}_i^{(\mu)} (\tilde{f}_{j\beta}^{(\mu)})^{-1}.$$

Jak łatwo stwierdzić, zachodzi przy tym<sup>2)</sup>

$$(2.29) \quad d_{ij\alpha\beta}^{(-\nu)} = d_{ij\alpha\beta}^{(\nu)} \exp(-j2\varepsilon_{ij\alpha\beta}^{(\nu)}),$$

gdzie  $d_{ij\alpha\beta}^{(\nu)}$  może być określone w znany sposób [2]:

$$(2.30) \quad d_{ij\alpha\beta}^{(\nu)} = \tilde{u}_i^{(\nu)} \exp[j(\nu\omega t + \varepsilon_{ij\alpha\beta}^{(\nu)})] [\tilde{f}_{j\beta}^{(\nu)} \exp(j\nu\omega t)]^{-1},$$

$\tilde{u}_i^{(\nu)}, \tilde{f}_{j\beta}^{(\nu)}$  — rzeczywiste amplitudy przemieszczenia i siły (w układzie  $X_1, X_2, X_3$ ),  
 $\varepsilon_{ij\alpha\beta}^{(\nu)}$  — kąt przesunięcia fazowego, wywołanego tłumieniem w konstrukcji.

Tworzymy macierze kolumnowe:

$$\tilde{u}^{(\mu)} = \{\tilde{u}_i^{(\mu)}\}, \quad \tilde{f}^{(\mu)} = \{\tilde{f}_i^{(\mu)}\}, \quad u^{(\mu)} = \{u_i^{(\mu)}\}, \quad f^{(\mu)} = \{f_i^{(\mu)}\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ogólna zależność pomiędzy macierzami kolumnowymi  $\tilde{f}^{(\mu)}$  i  $\tilde{u}^{(\mu)}$  ma postać:

$$(2.31) \quad \tilde{u}^{(\mu)} = D^{(\mu)} \tilde{f}^{(\mu)}.$$

Zależność ta nie obejmuje wpływu podatności filmu olejowego w łożyskach. W celu uwzględnienia podatności filmu rozpatrzmy wał na dwóch podporach, którego schemat obliczeniowy przedstawiono na rys. 3. Film olejowy traktowany jest jako nieważki, dlatego siła oddziaływania wału na film w danym łożysku jest równa sile działającej na podporę tego łożyska.

Zachodzi zatem oczywista zależność:

$$l_2 - \tilde{u}_2 + \tilde{f}_1 d_{21} + \tilde{f}_2 d_{22} = l_2 - \tilde{u}_{2f},$$

przy czym amplituda ugięcia filmu pod wpływem siły  $\tilde{f}_2 = \tilde{f}_2^{(\mu)} \exp(j\mu\omega t)$  wynosi

$$\tilde{u}_{2f}^{(\mu)} = \tilde{f}_2^{(\mu)} (c_2 + j\mu\omega b_2)^{-1},$$

<sup>2)</sup> Zastosowane w niniejszej pracy przedstawienie wielkości harmonicznych przy pomocy dwóch wirujących w przeciwnych kierunkach wektorów na płaszczyźnie zmiennej zespolonej i rozszerzenie pojęcia macierzy podatności dynamicznej na ujemne wartości  $\mu$  jest związane z postacią macierzy  $\Pi$  (2.27).

gdzie  $b_2, c_2$  — współczynniki zlinearyzowanych charakterystyk tłumienia lepkościowego i sztywności filmu olejowego w łożysku 2. Można więc napisać:

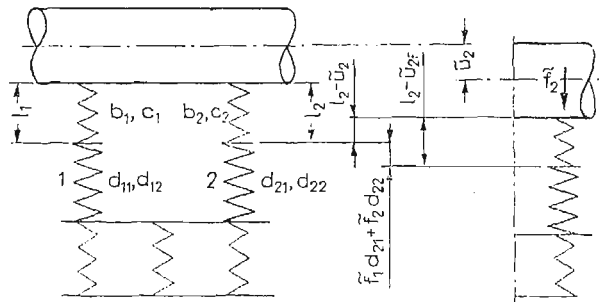
$$\tilde{u}_2^{(\mu)} = \tilde{f}_1^{(\mu)} d_{21}^{(\mu)} + \tilde{f}_2^{(\mu)} d_{22}^{(\mu)} + \tilde{f}_2^{(\mu)} d_{12}^{(\mu)}$$

i analogicznie dla podpory 1

$$\tilde{u}_1^{(\mu)} = \tilde{f}_1^{(\mu)} (d_{11}^{(\mu)} + d_{11}^{(\mu)}) + \tilde{f}_2^{(\mu)} d_{12}^{(\mu)},$$

gdzie  $d_1^{(\mu)}$  i  $d_2^{(\mu)}$  są zespolonymi podatnościami dynamicznymi filmu olejowego w łożyskach 1 i 2:

$$d_i^{(\mu)} = (c_i + j\mu\omega b_i)^{-1}, \quad i = 1, 2.$$



Rys. 3. Schemat przemieszczenia wału z uwzględnieniem podatności filmu olejowego i konstrukcji podpierającej.  $b_1, b_2, c_1, c_2$  — współczynniki tłumienia lepkościowego i sztywności filmu olejowego w łożyskach 1 i 2;  $d_{ij}$  — współczynniki podatności dynamicznej konstrukcji podpierającej ( $i, j = 1, 2$ );  $\tilde{f}_2$  — siła dynamicznego oddziaływania wału na film olejowy w łożysku 2;  $l_1, l_2$  — wysokości filmu olejowego w łożyskach 1 i 2,  $\tilde{u}_2$  — przemieszczenie wału w miejscu podpory 2;  $\tilde{u}_{2f}$  — ugięcie filmu olejowego w łożysku 2 pod wpływem siły  $\tilde{f}_2$

Uogólniając powyższe rozważania można zamiast (2.31) napisać:

$$(2.32) \quad \tilde{u}^{(\mu)} = \tilde{D}^{(\mu)} \tilde{f}^{(\mu)},$$

gdzie  $\tilde{D}^{(\mu)}$  różni się od macierzy  $D^{(\mu)}$  tym, że jej elementy na głównej przekątnej są równe<sup>3)</sup>:

$$(2.33) \quad \tilde{d}_{i\alpha\alpha}^{(\mu)} = d_{i\alpha\alpha}^{(\mu)} + (c_{i\alpha} + j\mu\omega b_{i\alpha})^{-1}.$$

Poczynając od zależności (2.28) siły w łożyskach traktowano jako siły działające na podpory łożyskowe i film olejowy, a uprzednio — jako reakcje oddziaływujące na wał. Do dalszych rozważań stosować będziemy zatem zamiast (2.32) zależność:

$$(2.34) \quad \tilde{u}^{(\mu)} = -\tilde{D}^{(\mu)} \tilde{f}^{(\mu)},$$

gdzie  $\tilde{f}^{(\mu)}$  jest macierzą kolumnową amplitud  $\mu$ -tych harmonicznym reakcji działających na wał w łożyskach, w układzie  $X_1, X_2, X_3$ .

<sup>3)</sup> Lub  $\tilde{d}_{i\alpha\alpha}^{(\mu)} = d_{i\alpha\alpha}^{(\mu)} + (c_{i\alpha}^{(\mu)} + j\mu\omega b_{i\alpha}^{(\mu)})^{-1}$ , gdy współczynniki sztywności i tłumienia filmu zależą w istotny sposób od częstości wymuszeń.



Pozostałe bloki macierzy  $U^{(r)}$  i  $R^{(r)}$  są zerowe. Z równania (2.36) otrzymuje się<sup>4)</sup>:

$$(2.37) \quad \underline{u}^{(r)} = (U^{(r)})^{-1} R^{(r)} \underline{f}^{(r)}.$$

Zależności (2.35)—(2.37) ukazują sprzężenie kolejnych harmoniczych sił i przemieszczeń, co uniemożliwia wyznaczenie sumarycznego rozwiązania jako superpozycji rozwiązań dla każdego rzędu harmonicznego drgań. Możliwość taka istnieje w przypadku, gdy wszystkie odcinki linii wałów wykazują kołową symetrię sztywności giętej ( $I_2 = I_3$ ). Analizę drgań można wówczas prowadzić w nieruchomym układzie współrzędnych, wykorzystując zamiast (2.37) zależność (2.34). Poniżej przedstawiono schematycznie sposób wyznaczenia rozwiązań z wykorzystaniem zależności (2.37).

Warunki brzegowe (2.3) i (2.4) można dla konkretnej linii wałów przedstawić w postaci:

$$(2.38) \quad \begin{aligned} & A^{(r)} a_1^{(r)} = 0, \\ & \bar{B}^{(r)} a_1^{(r)} + \sum_{j=1}^n \tilde{B}_j^{(r)} f_j^{(r)} + \sum_{k=1}^l \bar{B}_k^{(r)} (f^{w(\mu)})_k = 0, \end{aligned}$$

gdzie macierz  $A^{(r)}$  wyznacza się z warunków (2.3) przez wykorzystanie zależności (2.16) i (2.17) (dla  $x = 0$ ), macierze  $\bar{B}^{(r)}$ ,  $\tilde{B}_j^{(r)}$  i  $\bar{B}_k^{(r)}$  powstają w wyniku wymnożenia odpowiednich macierzy przejścia dla całej linii wałów,  $l$  jest liczbą punktów przyłożenia zewnętrznych sił wymuszających, przy czym

$(f^{w(\mu)})_k = \{(f_\alpha^{w(\mu)})_k\}$ ,  $\alpha = 1, \dots, 6$ —macierz kolumnowa amplitud

$\mu$ -tych harmoniczych sił wymuszających w  $k$ -tym punkcie linii wałów.

Tworząc macierze kolumnowe

$$\begin{aligned} \underline{a}_1^{(r)} &= \{a_1^{(-r)}, \dots, a_1^{(-1)}, a_1^{(0)}, a_1^{(1)}, \dots, a_1^{(r)}\}, \\ \bar{f}^{w(\mu)} &= \{(f^{w(\mu)})_1, (f^{w(\mu)})_2, \dots, (f^{w(\mu)})_l\}, \\ \underline{f}^{w(r)} &= \{\bar{f}^{w(-r)}, \dots, \bar{f}^{w(-1)}, \bar{f}^{w(0)}, \bar{f}^{w(1)}, \dots, \bar{f}^{w(r)}\} \end{aligned}$$

można na podstawie (2.38) napisać:

$$(2.39) \quad \underline{A}^{(r)} \underline{a}_1^{(r)} = 0,$$

$$(2.40) \quad \underline{B}^{(r)} \underline{a}_1^{(r)} + \underline{\tilde{B}}^{(r)} \underline{f}^{(r)} + \underline{\bar{B}}^{(r)} \underline{f}^{w(r)} = 0,$$

gdzie:

$$\underline{A}^{(r)} = \begin{bmatrix} A^{(r)} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & A^{(1)} & & \\ & & & A^{(0)} & \\ & & & & A^{(1)} \\ & & & & \ddots \\ & & & & & & & A^{(r)} \end{bmatrix}_{6(2r+1) \times 12(2r+1)}, \quad \underline{B}^{(r)} = \begin{bmatrix} \bar{B}^{(r)} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \bar{B}^{(1)} & & \\ & & & \bar{B}^{(0)} & \\ & & & & \bar{B}^{(1)} \\ & & & & \ddots \\ & & & & & & & \bar{B}^{(r)} \end{bmatrix}_{6(2r+1) \times 12(2r+1)}$$

<sup>4)</sup> Wykorzystując ortogonalność macierzy  $II$  można  $(U^{(r)})^{-1}$  otrzymać z macierzy  $U^{(r)}$  przez zastąpienie  $\check{II}$ ,  $\hat{II}$  macierzami transponowanymi  $\check{II}^T$ ,  $\hat{II}^T$ .



$$\underline{\bar{C}}^{(r)} = \begin{bmatrix} \bar{C}^{(r)} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \bar{C}^{(1)} & & \\ & & & \bar{C}^{(0)} & \\ & & & & \bar{C}^{(1)} \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \bar{C}^{(r)} \end{bmatrix}_{6n(2r+1) \times 6l(2r+1)}, \quad \bar{\bar{C}}^{(r)} = \begin{bmatrix} \bar{\bar{C}}^{(r)} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \bar{\bar{C}}^{(1)} & & \\ & & & \bar{\bar{C}}^{(0)} & \\ & & & & \bar{\bar{C}}^{(1)} \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \bar{\bar{C}}^{(r)} \end{bmatrix}_{6n(2r+1) \times 6l(2r+1)}$$

Pozostałe bloki macierzy  $\underline{\bar{C}}^{(r)}$  i  $\bar{\bar{C}}^{(r)}$  są zerowe. Z zależności (2.37) i (2.44) otrzymuje się:

$$(2.45) \quad \underline{f}^{(r)} = P^{(r)}(\underline{\bar{C}}^{(r)} \underline{a}_1^{(r)} + \bar{\bar{C}}^{(r)} \underline{f}^{w(r)}),$$

gdzie:

$$P^{(r)} = [(U^{(r)})^{-1} R^{(r)} - \bar{\bar{C}}^{(r)}]^{-1}.$$

Z zależności (2.39), (2.40) i (2.45) wyznaczyć można macierz  $\underline{a}_1^{(r)}$ :

$$(2.46) \quad \underline{a}_1^{(r)} = \begin{bmatrix} \underline{A}^{(r)} \\ \underline{B}^{(r)} + \bar{\bar{B}}^{(r)} P^{(r)} \bar{\bar{C}}^{(r)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -(\bar{\bar{B}}^{(r)} P^{(r)} \bar{\bar{C}}^{(r)} + \underline{B}^{(r)}) \end{bmatrix} \underline{f}^{w(r)},$$

po czym korzystając z macierzy przejścia i zależności (2.16), (2.17), (2.45) — parametry drgań wymuszonych wszystkich odcinków linii wałów.

### 3. Wyznaczenie współczynników podatności dynamicznej

Podobnie jak dla układu rozpatrywanego w [1], poszukiwane współczynniki podatności wyznaczyć można na podstawie wyników pomiarów drgań linii wałów przy znanych wymuszeniach. Na wstępie wyznaczymy odpowiednie zależności dla przypadku, gdy linia wałów zawiera odcinki wykazujące asymetrię sztywności giętej, a znane wymuszenia działają przy wirowaniu wałów. W tym celu wykorzystamy ogólne wyrażenia, wynikające z zależności (2.25), (2.27) i (2.34):

$$(3.1) \quad \underline{u}^{(r)} = (U^{(r)})^{-1} \underline{\tilde{u}}^{(r)},$$

$$(3.2) \quad \underline{\tilde{f}}^{(r)} = U^{(r)} \underline{f}^{(r)},$$

$$(3.3) \quad \underline{\tilde{u}}^{(r)} = \underline{\tilde{D}}^{(r)} \underline{\tilde{f}}^{(r)},$$

gdzie:

$$\underline{\tilde{D}}^{(r)} = -\Gamma \underline{\tilde{D}}^{(-r)}, \dots, \underline{\tilde{D}}^{(-1)}, \underline{\tilde{D}}^{(0)}, \underline{\tilde{D}}^{(1)}, \dots, \underline{\tilde{D}}^{(r)} \quad ]_{6n(2r+1)}.$$

Z równań (2.44) i (3.1) otrzymuje się:

$$(3.4) \quad \underline{f}^{(r)} = (\underline{\tilde{C}}^{(r)})^{-1} [(U^{(r)})^{-1} \underline{\tilde{u}}^{(r)} - \bar{\bar{C}}^{(r)} \underline{a}_1^{(r)} - \bar{\bar{C}}^{(r)} \underline{f}^{w(r)}].$$



W wyniku podstawienia (3.4) do warunku (2.40) można wykorzystując warunek (2.39) napisać:

$$(3.5) \quad \underline{a}_1^{(r)} = K^{(r)}(L^{(r)}\underline{\tilde{u}}^{(r)} + M^{(r)}\underline{f}^{w(r)}),$$

gdzie:

$$K^{(r)} = \left[ \begin{array}{c} \underline{A}^{(r)} \\ \underline{B}^{(r)} - \underline{\tilde{B}}^{(r)}(\underline{\tilde{C}}^{(r)})^{-1}\underline{\bar{C}}^{(r)} \end{array} \right]_{12(2r+1)}^{-1}, \quad L^{(r)} = - \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \underline{\tilde{B}}^{(r)}(\underline{\tilde{C}}^{(r)})^{-1}(U^{(r)})^{-1} \end{array} \right]_{12(2r+1) \times 6n(2r+1)},$$

$$M^{(r)} = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \underline{\tilde{B}}^{(r)}(\underline{\tilde{C}}^{(r)})^{-1}\underline{\bar{C}}^{(r)} - \underline{\bar{B}}^{(r)} \end{array} \right]_{12(2r+1) \times 6l(2r+1)}.$$

Z zależności (3.2), (3.4) i (3.5) wynika:

$$(3.6) \quad \underline{f}^{(r)} = U^{(r)}(\underline{\tilde{C}}^{(r)})^{-1} \{ [(U^{(r)})^{-1} - \underline{\bar{C}}^{(r)}K^{(r)}L^{(r)}]\underline{\tilde{u}}^{(r)} - (\underline{\bar{C}}^{(r)} + \underline{\bar{C}}^{(r)}K^{(r)}M^{(r)})\underline{f}^{w(r)} \}.$$

Jeśli macierz kolumnową amplitud znanych sił wymuszających w  $i$ -tym wariancie pomiarowym oznaczymy przez  $(\underline{f}^{w(r)})_i$ , a macierz odpowiadających im amplitud przemieszczeń wału w łożyskach przez  $(\underline{\tilde{u}}^{(r)})_i$ , to macierz zawierająca poszukiwane macierze podatności dynamicznej konstrukcji podpierającej (łącznie z filmem olejowym) wyznaczyć można z zależności:

$$(3.7) \quad \underline{\tilde{D}}^{(r)} = \underline{\tilde{U}}^{(r)}(\underline{\tilde{F}}^{(r)})^{-1},$$

gdzie:

$$\underline{\tilde{F}}^{(r)} = [(\underline{f}^{(r)})_1, (\underline{f}^{(r)})_2, \dots, (\underline{f}^{(r)})_{6n(2r+1)}],$$

$$\underline{\tilde{U}}^{(r)} = [(\underline{\tilde{u}}^{(r)})_1, (\underline{\tilde{u}}^{(r)})_2, \dots, (\underline{\tilde{u}}^{(r)})_{6n(2r+1)}],$$

$$(\underline{f}^{(r)})_i = U^{(r)}(\underline{\tilde{C}}^{(r)})^{-1} \{ [(U^{(r)})^{-1} - \underline{\bar{C}}^{(r)}K^{(r)}L^{(r)}](\underline{\tilde{u}}^{(r)})_i - (\underline{\bar{C}}^{(r)} + \underline{\bar{C}}^{(r)}K^{(r)}M^{(r)})(\underline{f}^{w(r)})_i \}.$$

Relacje (2.29) i (2.30) pozwalają zmniejszyć wymiary macierzy w zależności (3.7) i niezbędną liczbę wariantów pomiarowych z  $6n(2r+1)$  na  $6n(r+1)$  (tj. na podstawie pomiarów wystarczy wyznaczyć macierz  $\underline{\tilde{D}}^{(r)} = -\Gamma \underline{\tilde{D}}^{(0)}, \underline{\tilde{D}}^{(1)}, \dots, \underline{\tilde{D}}^{(r)}]_{6n(r+1)}$ .

Zakłada się przy tym liniową niezależność macierzy kolumnowych  $(\underline{f}^{(r)})_i$  dla  $i = 1, 2, \dots, 6n(r+1)$ . W szczególności można to uzyskać dysponując jednym źródłem sił wymuszających, przykładając je kolejno w  $l = n$  punktach linii wałów<sup>5)</sup>, w kierunkach odpowiadających  $\alpha = 1, \dots, 6$  i z częstościami  $0, \omega, 2\omega, \dots, r\omega$ .

W przypadku, gdy przy pomiarach linii wałów nie wiruje, równaniami wyjściowymi do podobnego wyprowadzenia zależności określającej macierz podatności  $\underline{\tilde{D}}^{(v)}$  są wyrażenia (2.34), (2.38) i (2.43) dla  $\mu = v$ ,  $\underline{\tilde{u}}^{(v)} = \underline{u}^{(v)}$ ,  $\underline{f}^{(v)} = \underline{f}^{(v)}$ .

Gdy wszystkie odcinki linii wałów wykazują kołową symetrię sztywności giętej i analiza prowadzona jest przy wirującej linii wałów w nieruchomym układzie współrzędnych, wykorzystać można zależności (2.34), (2.38) i (2.43) dla  $\mu = v$  z zamianą  $\underline{u}^{(v)}$  na  $\underline{\tilde{u}}^{(v)}$  i  $\underline{f}^{(v)}$  na  $\underline{f}^{(v)}$  oraz odniesieniem znanych sił wymuszających do nieruchomego układu współrzędnych.

<sup>5)</sup> Przy zmianach punktów przyłożenia sił wymuszających macierze  $\underline{\tilde{C}}^{(r)}$ ,  $\underline{\bar{C}}^{(r)}$ ,  $\underline{\bar{C}}^{(r)}$ ,  $K^{(r)}$ ,  $L^{(r)}$  i  $M^{(r)}$  nie ulegają zmianom, gdy podział linii wałów na odcinki obliczeniowe (p. 2) uwzględni wszystkie te punkty.

## 4. Uwagi końcowe

W celu zachowania ogólności rozważań nie uwzględniono w niniejszej pracy, że wpływ podatności fundamentów przy drganiach skrętnych linii wałów jest pomijalny i odpowiednie elementy macierzy podatności dynamicznej poza główną przekątną są równe zero, a na głównej przekątnej — zredukowane do członów dotyczących wpływu filmu olejowego w łożyskach. To samo dotyczy drgań podłużnych linii wałów gdy fundament nie przejmuje sił poosiowych, np. przy braku łożyska oporowego. Elementy macierzy podatności dynamicznej odnoszące się do drgań giętnych mogą być wyznaczone na podstawie  $4n(r+1)$  wariantów pomiarowych, a przy ograniczeniu się do drgań poprzecznych — na podstawie  $2n(r+1)$  wariantów (przy czym źródłem stałej siły wymuszającej w ruchomym układzie współrzędnych może być osadzona na wale niewyrównoważona masa, wirująca wraz z wałem). Pomiaru przy wirującym wale mają tę zaletę, że własności tworzącego się wówczas w łożyskach klina smarowego są bardziej zbliżone do analogicznych własności w warunkach eksploatacyjnych, niż charakterystyki warstwy oleju smarowego w łożyskach przy nieruchomym wale.

Przedstawiona powyżej metoda identyfikacji podatności dynamicznej konstrukcji podpierającej łącznie z filmem olejowym wymaga pomiarów przemieszczeń wału w łożyskach względem nieruchomego układu współrzędnych. Jeden ze sposobów realizacji tego zadania może polegać na równoczesnej rejestracji względnych przemieszczeń wału w łożysku (mierzonych np. czujnikiem bezkontaktowym) i drgań obudowy łożyska oraz na zsumowaniu wyników w/w pomiarów, odnoszących się do tego samego kierunku względem nieruchomego układu współrzędnych.

## Literatura cytowana w tekście

1. J. KOLENDA, *Metoda identyfikacji podatności dynamicznej fundamentów maszyn*, Mech. Teor. i Stos., 3, 16 (1978).
2. R. E. D. BISHOP, G. M. L. GLADWELL, S. MICHAELSON, *Macierzowa analiza drgań*, WNT, Warszawa 1972.

## Резюме

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВАЛОПРОВОДОВ С УЧЁТОМ АСИММЕТРИИ  
ИЗГИБНОЙ ЖЕСТКОСТИ И ПОДАТЛИВОСТИ ФУНДАМЕНТОВ. МЕТОД  
ИДЕНТИФИКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ ПОДАТЛИВОСТИ ФУНДАМЕНТОВ  
ВАЛОПРОВОДОВ

Работа касается колебаний валопроводов при периодических возмущениях, с учётом податливости масляного слоя в подшипниках и фундамента. Выведенные зависимости относятся к несомпряжённым изгибным, крутильным и продольным колебаниям, описанным линейными дифференциальными уравнениями в частных производных. При этом не требуется симметрия изгибной жесткости. Для уменьшения размеров матриц системы применяются матрицы перехода, связывающие коэффициенты решений соседних участков валопровода. Такие матрицы перехода проще матриц перехода связывающих векторы перемещений и усилий, а их умножение может быть в случае участков с одинаковыми физическими параметрами заменено суммированием аргументов

функции, находящихся в этих матрицах. Решение получается из системы сопряжённых матричных уравнений, относящихся к всем рассматриваемым гармоническим составляющим.

Представляется метод определения коэффициентов динамической податливости фундамента вместе с масляным слоем на основе результатов измерений колебаний валопровода при известных возмущениях, прикладываемых в любых точках валопровода.

#### S u m m a r y

### FORCED VIBRATIONS OF SHAFTINGS WITH ASYMMETRY OF A BENDING RIGIDITY ON FLEXIBLE FOUNDATIONS. IDENTIFICATION METHOD OF THE DYNAMICAL RECEPTANCES OF SHAFTING FOUNDATIONS

In this paper the periodically excited vibrations of shaftings are considered with the flexibility of an oil film in bearings and of a foundation taken into account. The derived formulae are concerned with uncoupled bending, torsional and longitudinal vibrations governed by linear partial differential equations, for which the symmetry of a bending rigidity is not assumed. The size of system matrices is reduced by means of the transfer matrices related to solution coefficients for adjacent shaft pieces. Such transfer matrices have simpler form than ones related to state vectors and their multiplication in the case of shaft pieces with equal physical properties can be replaced by adding arguments of functions existing in these matrices. Solutions are obtained from the set of coupled matrix equations relating to all the harmonics considered.

The identification method of dynamical receptances of a foundation together with an oil film is presented which is based on measurements of shafting vibrations caused by known excitations being put in arbitrary shafting points.

POLITECHNIKA GDAŃSKA  
INSTYTUT OKRĘTOWY

*Praca została złożona w Redakcji 16 stycznia 1978 r.*

---