

## SIŁY TARCIA COULOMBA PODCZAS WIROWANIA\*)

ALFRED ZMITROWICZ (GDAŃSK)

### 1. Wstęp

Dwa stykające się ciała mają zbiory punktów leżące jednocześnie na obu powierzchniach ograniczających te ciała. Część wspólną powierzchni ciał tworzącą skończony obszar zastępuje się zazwyczaj wycinkiem płaszczyzny stycznej do ciał. W takim styku możliwy jest względny ruch translacyjny (poślizg) i obrotowy (wirowy) wokół normalnej do powierzchni styku. Względnemu ruchowi ciał przy założeniu wzajemnego docisku siłami skierowanymi wzdłuż normalnej do powierzchni styku towarzyszą opory tarcia suchego. Uwzględnia się je przez wprowadzenie do opisu ruchu, sił tarcia oraz momentu sił tarcia.

Struktura geometryczna powierzchni ciał (t.zw. chropowatość) jest układem elementów geometrycznych powierzchni o określonym kształcie, rozmiarach oraz rozmieszczeniu wzniesień i wgłębień. Najczęściej chropowatość powierzchni jest śladem obróbki mechanicznej lub zużycia i zależy od rodzaju obróbki (struganie, toczenie, szlifowanie itd.), własności narzędzia i obrobionego materiału, jak również od warunków i parametrów obróbki. Chaotycznie rozłożone nierówności mają pewną ogólną kierunkowość, która na ogół pokrywa się z kierunkiem śladów obróbki. Mówimy o anizotropowej strukturze geometrycznej powierzchni gdy ma miejsce wyraźne ukierunkowanie usytuowania wzniesień i wgłębień. Struktura izotropowa powierzchni to układ nierówności nie wykazujący określonego ukierunkowania.

Tarcie suche towarzyszące poślizgowi zależne od kierunku ślizgania na skutek anizotropowej chropowatości jednej ze stykających się powierzchni, nazwano tarcie anizotropowym [1, 2, 3]. Cechą charakterystyczną układów z tarcie anizotropowym jest to, iż kierunek siły tarcia nie pokrywa się z kierunkiem poślizgu, z wyjątkiem kierunków zwanych głównymi. W przypadku tarcia izotropowego kierunek siły tarcia zawsze jest przeciwny kierunkowi ślizgania.

Uwzględnienie kierunkowości tarcia (zwłaszcza gdy anizotropia jest dość wyraźna) jest szczególnie ważne w przypadku ruchu, ponieważ istotnie zmienia przebieg zjawiska. Tarcie anizotropowe należy uwzględnić tak w ruchu translacyjnym, jak i obrotowym dookoła osi prostopadłej do chropowatego styku.

Wpływ tarcia ortotropowego (gdy kierunki główne są wzajemnie ortogonalne) na ruch translacyjny punktu materialnego i bryły sztywnej przedstawiono między innymi

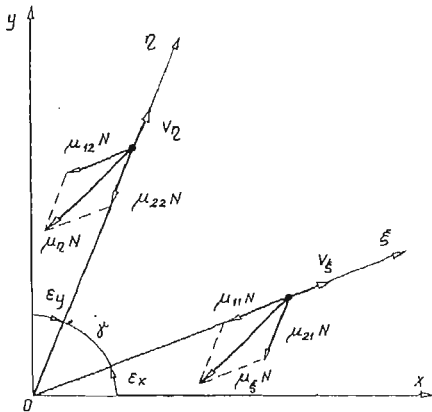
\*) Praca wykonana w ramach planu badań MR I/26, temat 09.3

w [1, 2, 3]. Pewne szczególne przypadki ruchu wirowego dla prostych kształtów obszaru styku oraz tarcia izotropowego omówiono w [1, 4, 5].

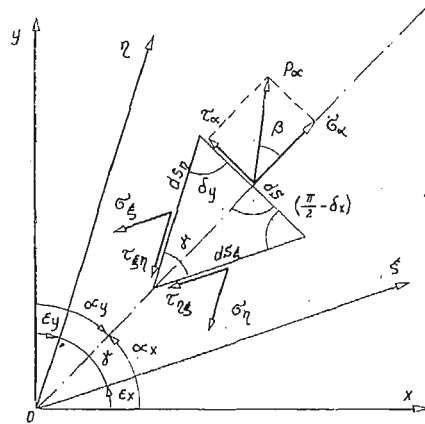
W niniejszej pracy rozszerzono opis tensora tarcia Coulomba [6] przez sformułowanie reprezentacji tensora dla przypadku styku powierzchni o izotropowej i anizotropowej chropowatości, jak również styku dwóch powierzchni o różnych anizotropowych strukturach geometrycznych. Korzystając z tak wprowadzonego opisu tarcia anizotropowego sformułowano wektory siły i momentu tarcia podczas wirowania.

## 2. Siły tarcia w styku powierzchni o izotropowej i anizotropowej chropowatości

Założmy, że siły tarcia suchego podczas względnego poślizgu ciała o izotropowej chropowatości po powierzchni ciała o dowolnej chropowatości określone są przez zbiór czterech wielkości  $\mu_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) zwanych współczynnikami tarcia, docisk wzajemny ciał  $N$  oraz wektor wektora prędkości poślizgu  $v$ . Przyjmijmy model tarcia suchego wg Amontonsa i Coulomba zakładający liniową zależność siły tarcia od wektora prędkości względnej i od wielkości docisku.



Rys. 1. Rozkład sił tarcia  $T_\xi = \mu_\xi N$  i  $T_\eta = \mu_\eta N$  na kierunki pomiarowe



Rys. 2. Analogia sił tarcia z płaskim stanem naprężeń

Podczas poślizgu w dwóch dowolnych kierunkach  $O\xi$  i  $O\eta$  należy określić wielkość i kierunki działania sił tarcia  $T_\xi = \mu_\xi N$  i  $T_\eta = \mu_\eta N$ . Z rozkładu sił tarcia  $T_\xi$  i  $T_\eta$  na kierunki  $O\xi$  i  $O\eta$  wyznacza się wielkość współczynników tarcia  $\mu_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) dla danego styku rys. 1. Kierunki pomiarowe tarcia  $O\xi$  i  $O\eta$  należy zorientować względem ortogonalnego układu odniesienia  $Oxy$ , związanego z powierzchnią jednego z ciał, poprzez kąty  $\epsilon_x$  i  $\epsilon_y$ , rys. 1. W szczególnym przypadku kierunki pomiarowe mogą być wzajemnie ortogonalne i pokrywać się z założonym układem odniesienia  $Oxy$ .

Założmy, że siłę tarcia podczas przesuwu odcinka  $ds$  w kierunku nachylonym do osi  $x$ -ów układu odniesienia pod kątem  $\alpha_x$  można przedstawić jako sumę dwóch sił tarcia powstałych przy przesuwaniu rzutów tego odcinka na osie układu  $O\xi\eta$  w kierunkach rów-

noległych do  $O\xi$  i  $O\eta$ . Wzory niezbędne do opisanie stanu sił tarcia, przy powyższych założeniach, są analogiczne jak związki między naprężeniami na bokach trójkątnego elementu wydzielonego z napiętej płaszczyzny, o bokach równoległych do osi układu  $O\xi\eta$  (rys. 2). Naprężenia całkowite  $p_\alpha$  na boku  $ds$  równoważą się z naprężeniami na bokach  $ds_\xi$  i  $ds_\eta$  rozłożonymi na składowe równoległe do kierunków  $O\xi$  i  $O\eta$ . Ponieważ nie korzystamy z warunku równowagi momentów, dlatego sformułowane związki między naprężeniami dotyczą niesymetrycznego stanu naprężenia. Naprężenia  $p_\alpha$  określa relacja

$$(2.1) \quad p_\alpha = \sqrt{(\sigma_\alpha)^2 + (\tau_\alpha)^2},$$

gdzie

$$(2.2) \quad \sigma_\alpha = \frac{1}{\cos(\varepsilon_x + \varepsilon_y)} [\sigma_\xi \cos^2(\alpha_x - \varepsilon_x) + \sigma_\eta \cos^2(\alpha_y - \varepsilon_y) + (\tau_{\eta\xi} + \tau_{\xi\eta}) \cos(\alpha_x - \varepsilon_x) \cos(\alpha_y - \varepsilon_y)],$$

$$(2.3) \quad \tau_\alpha = \frac{1}{\cos(\varepsilon_x + \varepsilon_y)} \left[ \frac{1}{2} \sigma_\eta \sin(2\alpha_y - 2\varepsilon_y) - \frac{1}{2} \sigma_\xi \sin(2\alpha_x - 2\varepsilon_x) - \tau_{\xi\eta} \sin(\alpha_y - \varepsilon_y) \cos(\alpha_x - \varepsilon_x) - \tau_{\eta\xi} \sin(\alpha_x - \varepsilon_x) \cos(\alpha_y - \varepsilon_y) \right].$$

Występujące w (2.2) i (2.3) oznaczenia zilustrowano na rys. 2. Ponadto zachodzą następujące zależności

$$(2.4) \quad \delta_x = \alpha_x - \varepsilon_x, \quad \delta_y = \frac{\pi}{2} - \alpha_y + \varepsilon_y,$$

$$(2.5) \quad ds_\xi = \frac{\sin \delta_y}{\sin \gamma}, \quad ds_\eta = \frac{\cos \delta_x}{\sin \gamma}.$$

Naprężenie całkowite  $p_\alpha$  odchylone jest od kierunku normalnego do boku  $ds$  o kąt  $\beta$ ,

$$(2.6) \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\tau_\alpha}{\sigma_\alpha}.$$

Korzystając z analogii między naprężeniami w płaskim stanie napięcia a siłami tarcia, całkowitą siłę tarcia podczas poślizgu w kierunku  $\alpha_x$  określa współczynnik tarcia opisany jak (2.1), gdzie za  $p_\alpha$ ,  $\sigma_\xi$ ,  $\tau_{\eta\xi}$ ,  $\tau_{\xi\eta}$ ,  $\sigma_\eta$  podstawiono odpowiednio  $\mu_\alpha$ ,  $\mu_{11}$ ,  $\mu_{12}$ ,  $\mu_{21}$  i  $\mu_{22}$ ,

$$(2.7) \quad \mu_\alpha = \frac{1}{\cos(\varepsilon_x + \varepsilon_y)} \left\{ [\mu_{11} \cos^2(\alpha_x - \varepsilon_x) + \mu_{22} \cos^2(\alpha_y - \varepsilon_y) + (\mu_{12} + \mu_{21}) \cos(\alpha_x - \varepsilon_x) \cos(\alpha_y - \varepsilon_y)]^2 + \left[ \frac{1}{2} \mu_{11} \sin(2\alpha_x - 2\varepsilon_x) + \mu_{12} \sin(\alpha_x - \varepsilon_x) \cos(\alpha_y - \varepsilon_y) - \mu_{21} \cos(\alpha_x - \varepsilon_x) \sin(\alpha_y - \varepsilon_y) - \frac{1}{2} \mu_{22} \sin(2\alpha_y - 2\varepsilon_y) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Siła tarcia zbacza z kierunku ruchu o kąt  $\beta$  określony podobnie jak (2.6).

$$(2.8) \quad \operatorname{tg} \beta = \left[ -\frac{1}{2} \mu_{11} \sin(2\alpha_x - 2\varepsilon_x) - \mu_{12} \sin(\alpha_x - \varepsilon_x) \cos(\alpha_y - \varepsilon_y) + \mu_{21} \cos(\alpha_x - \varepsilon_x) \sin(\alpha_y - \varepsilon_y) + \frac{1}{2} \mu_{22} \sin(2\alpha_y - 2\varepsilon_y) \right] [\mu_{11} \cos^2(\alpha_x - \varepsilon_x) + (\mu_{12} + \mu_{21}) \cos(\alpha_x - \varepsilon_x) \cos(\alpha_y - \varepsilon_y) + \mu_{22} \cos^2(\alpha_y - \varepsilon_y)]^{-1}.$$

Wielkości  $\mu_\alpha$  i  $\beta$  umożliwiają wyznaczenie składowych siły tarcia w układzie  $Oxy$  podczas poślizgu w kierunku  $\alpha_x$ . Zgodnie z opisem zaproponowanym w [6] składowe siły tarcia określają równania

$$(2.9) \quad T^i = -NQ^{ij}v_j, \quad i, j = 1, 2$$

gdzie,  $Q^{ij}$  są elementami reprezentacji tensora tarcia Coulomba  $\mathbf{Q}$ ,  $v_i$  składowymi kowariantnymi wersora prędkości poślizgu  $\mathbf{v}$ . Jeśli polibazę tensora tarcia  $\mathbf{Q}$  tworzą bazy układów odniesienia ( $Oxy$ )  $\mathbf{k}_i$  ( $i = 1, 2$ ) i układu pomiarowego ( $O\xi\eta$ )  $\mathbf{e}_j$  ( $j = 1, 2$ ) to reprezentacją macierzową tensora tarcia

$$(2.10) \quad \mathbf{Q} = Q^{ij}\mathbf{k}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad i, j = 1, 2$$

jest macierz

$$(2.11) \quad [Q^{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{\mu_{11}\cos\epsilon_x + \mu_{21}\sin\epsilon_y}{\cos(\epsilon_x + \epsilon_y)} & \frac{\mu_{12}\cos\epsilon_x + \mu_{22}\sin\epsilon_y}{\cos(\epsilon_x + \epsilon_y)} \\ \frac{\mu_{21}\cos\epsilon_y + \mu_{11}\sin\epsilon_x}{\cos(\epsilon_x + \epsilon_y)} & \frac{\mu_{22}\cos\epsilon_y + \mu_{12}\sin\epsilon_x}{\cos(\epsilon_x + \epsilon_y)} \end{bmatrix},$$

gdzie,  $\cos(\epsilon_x + \epsilon_y) \neq 0$ . Wektor siły tarcia przy docisku  $N$  zgodnie z [6] zdefiniowany jest równaniem

$$(2.12) \quad \mathbf{T} = -NQ\mathbf{v} = T^i\mathbf{k}_i, \quad i = 1, 2.$$

Składowe kowariantne  $v_j$ , wersora prędkości poślizgu w bazie  $\mathbf{e}_j$  ( $j = 1, 2$ ) są postaci

$$(2.13) \quad [v_j] = [\cos(\alpha_x - \epsilon_x), \cos(\alpha_y - \epsilon_y)]^T, \quad j = 1, 2.$$

Własności tensora tarcia anizotropowego o reprezentacji (2.11).

1. Tensor tarcia anizotropowego może mieć dwie, jedną lub zero rzeczywistych wartości własnych i tyle samo wektorów własnych.

Dowód: Korzystając z transformacji bazy  $\mathbf{e}_j$  ( $j = 1, 2$ ) do układu odniesienia  $Oxy$  otrzymujemy reprezentację tensora tarcia w postaci macierzy  $[Q^{ik}]$  ( $i, k = 1, 2$ ) o następujących elementach

$$(2.14) \quad \begin{aligned} Q^{11} &= \frac{1}{\cos(\epsilon_x + \epsilon_y)} [\mu_{11}\cos^2\epsilon_x + (\mu_{12} + \mu_{21})\sin\epsilon_y\cos\epsilon_x + \mu_{22}\sin^2\epsilon_y], \\ Q^{12} &= \frac{1}{\cos(\epsilon_x + \epsilon_y)} \left[ \frac{1}{2}(\mu_{11}\sin 2\epsilon_x + \mu_{22}\sin 2\epsilon_y) + \mu_{12}\cos\epsilon_x\cos\epsilon_y + \mu_{21}\sin\epsilon_x\sin\epsilon_y \right], \\ Q^{21} &= \frac{1}{\cos(\epsilon_x + \epsilon_y)} \left[ \frac{1}{2}(\mu_{11}\sin 2\epsilon_x + \mu_{22}\sin 2\epsilon_y) + \mu_{12}\sin\epsilon_x\sin\epsilon_y + \mu_{21}\cos\epsilon_x\cos\epsilon_y \right], \\ Q^{22} &= \frac{1}{\cos(\epsilon_x + \epsilon_y)} [\mu_{11}\sin^2\epsilon_x + (\mu_{12} + \mu_{21})\sin\epsilon_x\cos\epsilon_y + \mu_{22}\cos^2\epsilon_y]. \end{aligned}$$

Wartości własne tensora tarcia określa równanie

$$(2.15) \quad \det(\mathbf{Q} - \lambda\mathbf{I}) = 0.$$

Po rozpisaniu (2.15) otrzymujemy równanie kwadratowe

$$(2.16) \quad \lambda^2 - \lambda(Q^{11} + Q^{22}) + Q^{11}Q^{22} - Q^{12}Q^{21} = 0.$$

O liczbie rzeczywistych wartości własnych tensora tarcia decyduje wyróżnik równania (2.16). Tensor tarcia anizotropowego posiada dwie rzeczywiste wartości własne i dwa wektory własne gdy

$$(2.17) \quad \Delta = (Q^{11} - Q^{22})^2 + 4Q^{12}Q^{21} > 0,$$

jedną rzeczywistą wartość własną i jeden wektor własny gdy  $\Delta = 0$  oraz nie ma wartości własnej ani wektora własnego gdy  $\Delta < 0$ .

Jeśli ponadto elementy  $Q^{ik}$  ( $i, k = 1, 2$ ) reprezentacji tensora tarcia spełniają warunki:

$$(2.18) \quad Q^{11} = Q^{22} \text{ i } Q^{12} = Q^{21} = 0,$$

to zgodnie z równaniem

$$(2.19) \quad (\lambda - Q^{11})^2 = 0,$$

tensor ten ma wartość własną podwójną równą  $Q^{11}$  a jego wektorem własnym jest dowolny wektor. Taki tensor kulisty opisuje tarcie izotropowe w styku ciał.

2. Tensor tarcia o reprezentacji (2.11) gdy  $\mu_{12} = \mu_{21}$  opisuje ogólny przypadek tarcia ortotropowego.

Dowód: Reprezentacją macierzową tensora tarcia typu (2.14) jest w tym przypadku macierz symetryczna. Istnieją dla tego tensora dwie rzeczywiste wartości własne a odpowiadające im wektory własne są wzajemnie ortogonalne.

Na prostych przykładach ruchu punktu materialnego po chropowatej płaszczyźnie zbadano między innymi wpływ na ruch siły odpowiadającej części antysymetrycznej tensora tarcia. Rozpatrzono trzy różne przypadki struktury geometrycznej powierzchni ruchu. Przypadek gdy chropowatość ma charakter izotropii  $\mu_{11} = \mu_{22} = 0,05$ ,  $\mu_{12} = \mu_{21} = 0$ . Gdy struktura geometryczna powierzchni jest anizotropią bez kierunku głównego  $\mu_{11} = 0,04$ ,  $\mu_{12} = -0,09$ ,  $\mu_{21} = 0,05$ ,  $\mu_{22} = 0,10$ . Badano również przypadek ortotropii odpowiadającej części symetrycznej tensora tarcia anizotropowego jak w przykładzie poprzednim. Współczynnikami tarcia dla części symetrycznej tensora tarcia są  $\mu_{11} = 0,04$ ,  $\mu_{12} = \mu_{21} = -0,02$ ,  $\mu_{22} = 0,10$ . Przyjęto, że pomiaru współczynników  $\mu_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) dokonano w kierunkach osi układu odniesienia  $Oxy$  założonego na powierzchni ruchu ( $\varepsilon_x, \varepsilon_y = 0$ ). Układ nieliniowych różniczkowych równań ruchu rozwiązano metodą Rungego-Kutty czwartego rzędu.

Zbadano tor punktu poruszającego się po płaszczyźnie zgodnie z równaniem

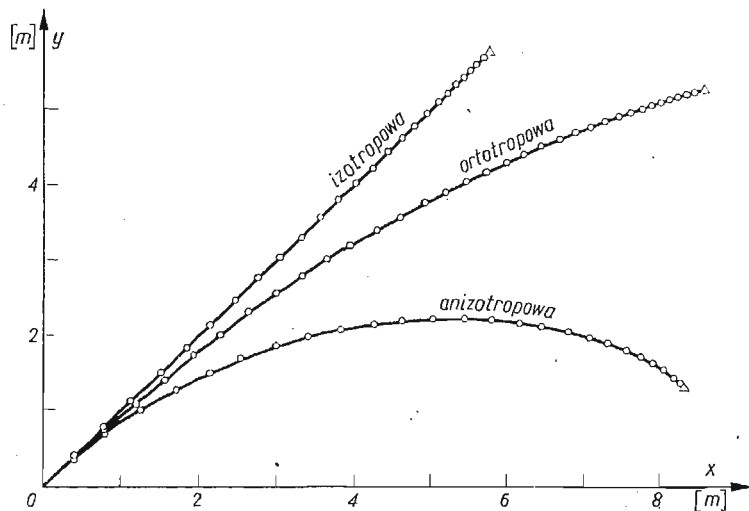
$$(2.20) \quad m\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{T},$$

gdzie,  $m$  jest masą punktu,  $\mathbf{q} = [q^1, q^2]^T$  wektorem położenia,  $\mathbf{T}$  wektorem siły tarcia. Równanie (2.20) po rozpisaniu jest postaci

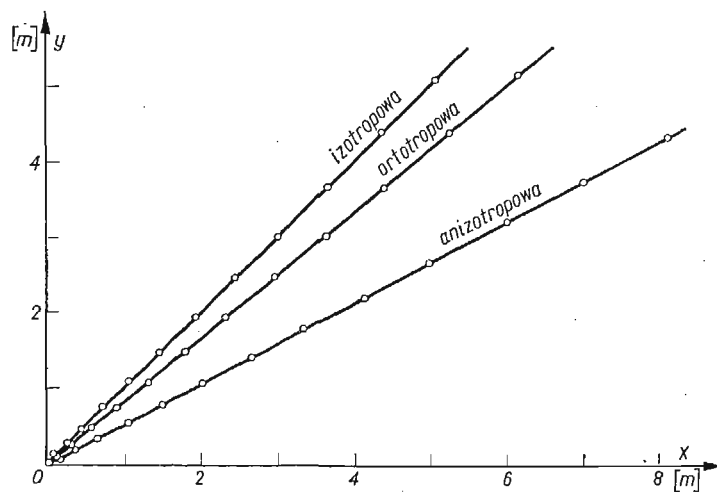
$$(2.21) \quad m \begin{bmatrix} \ddot{q}^1 \\ \ddot{q}^2 \end{bmatrix} = -N \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\dot{q}^1}{\sqrt{(\dot{q}^1)^2 + (\dot{q}^2)^2}} \\ \frac{\dot{q}^2}{\sqrt{(\dot{q}^1)^2 + (\dot{q}^2)^2}} \end{bmatrix}$$

Przyjęto masę punktu 1 [kg] a docisk równy ciężarowi punktu materialnego. Ruch wywołany został warunkami początkowymi  $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_0 = 2(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$  [m/s]. Na rys. 3 przedsta-

wiono tory punktu w przypadku izotropii, ortotropii i anizotropii. Odległości między punktami odpowiadają jednakowym przedziałom czasu  $\Delta t = 0,2$  [s]. Trójkątami oznaczono miejsca zatrzymania się punktu. W przypadku izotropii punkt porusza się w kierunku zgodnym z kierunkiem prędkości początkowej  $\dot{q}_0$ . W przypadku ortotropii tor punktu



Rys. 3. Tor punktu o danej prędkości początkowej poruszającego się po chropowatej płaszczyźnie



Rys. 4. Tor punktu poruszającego się po chropowatej płaszczyźnie pod działaniem stałej siły

zakrzywia się. Siła tarcia odpowiadająca części antysymetrycznej tensora tarcia anizotropowego powoduje jeszcze większe zakrzywienie toru punktu niż ma to miejsce w przypadku siły tarcia odpowiadającej tylko części symetrycznej tego tensora (czyli w przypadku ortotropii).

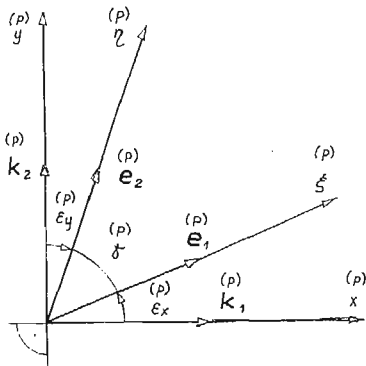
Analizowano również tor punktu podczas ruchu opisanego równaniem

$$(2.22) \quad m\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F} + \mathbf{T},$$

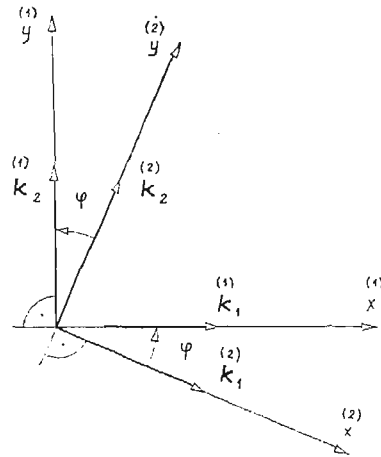
gdzie,  $\mathbf{F} = (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$  [N] jest stałą w czasie siłą czynną, rys. 4. Przyjęto zerowe warunki początkowe oraz masę punktu 0,5 [kg]. W przypadku izotropii tor punktu pokrywa się z kierunkiem działania siły czynnej. Dla ortotropii tor punktu odchyła się od kierunku działania siły  $\mathbf{F}$ . Siła tarcia odpowiadająca części antysymetrycznej tensora tarcia anizotropowego powoduje większe odchylenie prostoliniowego toru od kierunku działania siły  $\mathbf{F}$ , w porównaniu z przypadkiem siły tarcia odpowiadającej części symetrycznej tego tensora.

### 3. Siły tarcia w styku powierzchni o różnych anizotropowych chropowatościach

Na obu stykających się powierzchniach wyznacza się ortogonalne układy odniesienia. Przesuwając to samo ciało o izotropowej chropowatości po powierzchni każdego z ciał określa się współczynniki tarcia  $\mu_{ij}^l$  ( $i, j = 1, 2$ ). Ponadto należy zorientować kierunki



Rys. 5. Wersory baz układów odniesienia i pomiarowego p-tej powierzchni



Rys. 6. Wzajemne usytuowanie układów odniesienia po zetknięciu ze sobą powierzchni (1) i (2)

pomiarowe względem układów odniesienia. Z wyznaczonych wielkości  $\mu_{ij}$ ,  $\varepsilon_x$  i  $\varepsilon_y$  w oparciu o (2.11) tworzy się reprezentacje macierzowe tensorów tarcia  $\mathbf{Q}^{(1)}$ ,  $\mathbf{Q}^{(2)}$  odpowiednio dla powierzchni (1) i (2).

Wprowadzimy następujące oznaczenia wersorów baz układów odniesienia  $Oxy$  i układów pomiarowych  $O\xi\eta$  stykających się powierzchni (1) i (2), rys. 5.

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \mathbf{k}_1^{(1)}, \mathbf{k}_2^{(1)} &\equiv (\mathbf{k}_i), & \mathbf{e}_1^{(1)}, \mathbf{e}_2^{(1)} &\equiv (\mathbf{e}_j), & j, l &= 1, 2 \\ \mathbf{k}_1^{(2)}, \mathbf{k}_2^{(2)} &\equiv (\mathbf{k}_J), & \mathbf{e}_1^{(2)}, \mathbf{e}_2^{(2)} &\equiv (\mathbf{e}_J), & J, L &= 1, 2 \end{aligned}$$

Zachodzą następujące związki transformacyjne między wersorami baz układów  $Oxy$  i  $O\xi\eta$ ,

$$(3.2) \quad \mathbf{e}_j = C_j^l \mathbf{k}_l, \quad j, l = 1, 2$$

$$(3.3) \quad \mathbf{e}_J = C_J^L \mathbf{k}_L, \quad J, L = 1, 2$$

gdzie współczynniki transformacji tworzą macierze

$$(3.4) \quad [C_j^l] = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon_x^{(1)} & \sin \varepsilon_x^{(1)} \\ \sin \varepsilon_y^{(1)} & \cos \varepsilon_y^{(1)} \end{bmatrix} \equiv \mathbf{C}^{(1)}$$

$$(3.5) \quad [C_J^L] = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon_x^{(2)} & \sin \varepsilon_x^{(2)} \\ \sin \varepsilon_y^{(2)} & \cos \varepsilon_y^{(2)} \end{bmatrix} \equiv \mathbf{C}^{(2)}$$

Kąt wzajemnego usytuowania układów odniesienia po zetknięciu ze sobą obu powierzchni oznaczamy przez  $\varphi$ , rys. 6. Ma miejsce następujący związek transformacyjny między wersorami baz układów odniesienia

$$(3.6) \quad \mathbf{k}_I = B_I^i \mathbf{k}_i, \quad i, I = 1, 2$$

gdzie macierzą współczynników transformacji jest

$$(3.7) \quad [B_I^i] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \equiv \mathbf{B}$$

Związek transformacyjny między składowymi kowariantnymi wersora prędkości poślizgu zapisanymi w układach odniesienia powierzchni (1) i (2) ma postać

$$(3.8) \quad v_K = B_K^n v_n, \quad K, n = 1, 2.$$

Założmy, że siła tarcia w styku zetkniętych ze sobą powierzchni podczas ich względnego poślizgu, przy danym docisku równa jest iloczynowi „współczynnika złożenia” i sumy sił tarcia wziętych dla każdej powierzchni z osobna,

$$(3.9) \quad \mathbf{T} = \varkappa(\mathbf{T}^{(1)} + \mathbf{T}^{(2)}).$$

Siły  $\mathbf{T}^{(1)}$  i  $\mathbf{T}^{(2)}$  odpowiadają tarcii podczas przesuwania w danym kierunku poślizgu, przy ustalonym docisku, po każdej z powierzchni tej samej próbnej powierzchni o izotropowej chropowatości. Współczynnik  $\varkappa$  nazwano *współczynnikiem złożenia*, zapewnia on zgodność z obserwacją wielkości siły tarcia opisanej wzorem (3.9). Wartość współczynnika  $\varkappa$  nie ma wpływu na opis, powstałej w wyniku złożenia powierzchni, kierunkowości tarcia. Dla styku dwóch jednakowych izotropowych powierzchni  $\varkappa = 0,5$ .

Reguła (3.9) jest hipotezą rozkładu sił tarcia w styku ciał i wymaga weryfikacji eksperymentalnej.

Tensory tarcia związane z powierzchniami (1) i (2) przedstawimy w postaci

$$(3.10) \quad \mathbf{Q}^{(1)} = Q^{ij} \mathbf{k}_i \otimes \mathbf{e}_j = Q^{ij} C_j^k \mathbf{k}_i \otimes \mathbf{k}_k, \quad i, j, k = 1, 2$$

$$(3.11) \quad \mathbf{Q}^{(2)} = Q^{IJ} \mathbf{k}_I \otimes \mathbf{e}_J = Q^{IJ} C_J^K \mathbf{k}_I \otimes \mathbf{k}_K, \quad I, J, K = 1, 2.$$



Uzyskany w wyniku złożenia powierzchni tensor tarcia niech będzie związany np. z powierzchnią (1),

$$(3.12) \quad \mathbf{Q} = Q^{rs} \mathbf{k}_r \otimes \mathbf{k}_s, \quad r, s = 1, 2.$$

Zgodnie z definicją sił tarcia (2.12) równanie (3.9) można zapisać następująco

$$(3.13) \quad -N\mathbf{Q}\mathbf{v} = -\varkappa(N\mathbf{Q}\mathbf{v}^{(1)} + N\mathbf{Q}\mathbf{v}^{(2)}),$$

gdzie,  $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}^{(1)}$  i  $\mathbf{v}^{(2)}$  określają ten sam wersor wektora prędkości poślizgu zapisany w bazach powierzchni (1) i (2). W dalszej części korzystamy z opisu tensorów tarcia w polibazach utworzonych z baz układów odniesienia  $Oxy$ . Wobec tego równanie w wersory prędkości występujące w (3.13) należy przedstawić w bazach układów odniesienia.

$$(3.14) \quad \mathbf{v} \equiv \mathbf{v}^{(1)} = v^I \mathbf{k}_I, \quad \mathbf{v}^{(2)} = v^L \mathbf{k}_L, \quad I, L = 1, 2$$

Po podstawieniu (3.10), (3.11) i (3.14) do równania (3.13) otrzymujemy

$$(3.15) \quad Q^{rs} \delta_{st} v^I \mathbf{k}_r = \varkappa(Q^{ij} C_j^k \delta_{kl} v^I \mathbf{k}_i + Q^{IJ} C_J^K \delta_{KL} v^L \mathbf{k}_I),$$

stąd

$$(3.16) \quad Q^{rs} v_s \mathbf{k}_r = \varkappa(Q^{ij} C_j^k v_k \mathbf{k}_i + Q^{IJ} C_J^K v_K \mathbf{k}_I), \quad i, j, k, l, r, s = 1, 2 \quad I, J, K, L = 1, 2.$$

przy czym  $\delta_{st}$ ,  $\delta_{kl}$  i  $\delta_{KL}$  są symbolami Kroneckera.

Wykorzystując związki (3.6), (3.8) oraz fakt, że  $v_s \equiv v_k$ ,  $\mathbf{k}_r \equiv \mathbf{k}_i$ , równanie (3.16) otrzymamy w postaci

$$(3.17) \quad Q^{ik} v_k \mathbf{k}_i = \varkappa(Q^{ij} C_j^k v_k \mathbf{k}_i + Q^{IJ} C_J^K B_K^k v_K B_i^j \mathbf{k}_i), \quad i, j, k, I, J, K = 1, 2.$$

Stąd elementy reprezentacji tensora tarcia po złożeniu ze sobą powierzchni (1) i (2) określone są następująco

$$(3.18) \quad Q_{ik}^{ik} = \varkappa(Q^{ij} C_j^k + Q_{IJ}^I C_J^K B_K^k B_i^j), \quad i, j, k, I, J, K = 1, 2.$$

Zgodność wskaźników z założonym opisem (3.12) uzyskamy podstawiając

$$(3.19) \quad Q^{rs} = \delta_i^r \delta_k^s Q^{ik}, \quad i, k, r, s = 1, 2$$

Elementy reprezentacji tensora tarcia (3.12) można również przedstawić w zapisie macierwowym.

$$(3.20) \quad [\mathbf{Q}] = \varkappa[\mathbf{Q}^{(1)} + \mathbf{B}^T \mathbf{Q}^{(2)} \mathbf{C} \mathbf{B}]$$

gdzie,  $[\mathbf{Q}^{(1)}]$  i  $[\mathbf{Q}^{(2)}]$  są macierzowymi reprezentacjami tensorów tarcia powierzchni (1) i (2),

$$(3.21) \quad [\mathbf{Q}^{(p)}] = \begin{bmatrix} \frac{\mu_{11}^{(p)} \cos \varepsilon_x + \mu_{21}^{(p)} \sin \varepsilon_y}{\cos(\varepsilon_x + \varepsilon_y)} & \frac{\mu_{12}^{(p)} \cos \varepsilon_x + \mu_{22}^{(p)} \sin \varepsilon_y}{\cos(\varepsilon_x + \varepsilon_y)} \\ \frac{\mu_{21}^{(p)} \cos \varepsilon_y + \mu_{11}^{(p)} \sin \varepsilon_x}{\cos(\varepsilon_x + \varepsilon_y)} & \frac{\mu_{22}^{(p)} \cos \varepsilon_y + \mu_{12}^{(p)} \sin \varepsilon_x}{\cos(\varepsilon_x + \varepsilon_y)} \end{bmatrix}, \quad p = 1, 2$$

oraz

$$(3.22) \quad \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

Rozpatrzmy dla przykładu pewne szczególne przypadki tensora tarcia w styku zetkniętych ze sobą powierzchni. Jeśli zostaną złożone ze sobą dwie powierzchnie o różnych izotropowych chropowatościach, przy założeniu  $\varepsilon_x^{(1)}, \varepsilon_y^{(1)}, \varepsilon_x^{(2)}, \varepsilon_y^{(2)} = 0$ , to reprezentacją macierzową otrzymanego tensora tarcia izotropowego jest

$$(3.23) \quad [\mathbf{Q}] = \varkappa[\mu^{(1)}\mathbf{I} + \mu^{(2)}\mathbf{B}^T\mathbf{I}\mathbf{B}] = \varkappa(\mu^{(1)} + \mu^{(2)})\mathbf{I},$$

gdzie  $\mathbf{I}$  jest macierzą jednostkową. Gdy złożą się ze sobą powierzchnie o różnych anizotropowych chropowatościach to w wyniku otrzymuje się tensor określający tarcie anizotropowe w danym styku. Równania (3.18) i (3.20) umożliwiają przedstawienie reprezentacji takiego tensora tarcia w postaci macierzy  $[\mu_{ij}^{(*)}]$  ( $i, j = 1, 2$ ). Elementami macierzy reprezentacji dla przypadku  $\varepsilon_x^{(1)}, \varepsilon_y^{(1)}, \varepsilon_x^{(2)}, \varepsilon_y^{(2)} = 0$ , są

$$(3.24) \quad \begin{aligned} \mu_{11}^{(*)} &= \varkappa \left[ \mu_{11}^{(1)} + \mu_{11}^{(2)} \cos^2 \varphi + \mu_{22}^{(2)} \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} (\mu_{12}^{(2)} + \mu_{21}^{(2)}) \sin 2\varphi \right], \\ \mu_{12}^{(*)} &= \varkappa \left[ \mu_{12}^{(1)} + \mu_{12}^{(2)} \cos^2 \varphi - \mu_{21}^{(2)} \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} (\mu_{11}^{(2)} - \mu_{22}^{(2)}) \sin 2\varphi \right], \\ \mu_{21}^{(*)} &= \varkappa \left[ \mu_{21}^{(1)} - \mu_{12}^{(2)} \sin^2 \varphi + \mu_{21}^{(2)} \cos^2 \varphi - \frac{1}{2} (\mu_{11}^{(2)} - \mu_{22}^{(2)}) \sin 2\varphi \right], \\ \mu_{22}^{(*)} &= \varkappa \left[ \mu_{22}^{(1)} + \mu_{11}^{(2)} \sin^2 \varphi + \mu_{22}^{(2)} \cos^2 \varphi - \frac{1}{2} (\mu_{12}^{(2)} + \mu_{21}^{(2)}) \sin 2\varphi \right]. \end{aligned}$$

Jak łatwo zauważyć w przypadku składania powierzchni o różnych ortotropowych strukturach geometrycznych, w (3.24) należy podstawić  $\mu_{12}^{(1)} = \mu_{21}^{(1)}$  oraz  $\mu_{12}^{(2)} = \mu_{21}^{(2)}$  a otrzymany wówczas tensor tarcia w ogólnym przypadku określa tarcie ortotropowe.

#### 4. Siły tarcia w styku wirujących względem siebie powierzchni

Załóżmy, że styk dwóch ciał jest obszarem płaszczyzny oraz, że ruch względny ciał jest ruchem wirowym z wektorem prędkości wirowania  $\omega$ , wokół normalnej do styku. Oś wirowania przechodzi przez punkt E styku zwany środkiem wirowania. Niech  $\mathbf{n}$  jest wektorem normalnej do styku, tworzącym z bazą  $\mathbf{k}_i$  ( $i = 1, 2$ ) układu odniesienia w płaszczyźnie styku, prawoskrętny układ wersorów.

Na skutek ruchu wirowego cząstki ciał kontaktujące się w punkcie P styku S mają względną liniową prędkość przemieszczenia. Wersor tej prędkości wraz z wzajemnym dociskiem i współczynnikiem tarcia określa tarcie suche w punkcie P, opisane wektorami siły tarcia  $\mathbf{T}_P$  i momentu tarcia  $\mathbf{M}_P$  względem osi wirowania. Tarcie suche towarzyszące wirowaniu nazywa się tarcie wirowania. Używa się również takich nazw jak obrotowe, krętne, wiertne, wiercenia obrotowego [1]. Położenie punktu P styku S względem środka wirowania E, określa wektor  $\mathbf{r} = [r^1, r^2]$ , rys. 7. Wersor liniowej prędkości dowolnego punktu styku na skutek wirowania z wektorem prędkości kątowej  $\omega = \omega \mathbf{n} = \pm 1 \mathbf{n}$ , opisuje następujące równanie

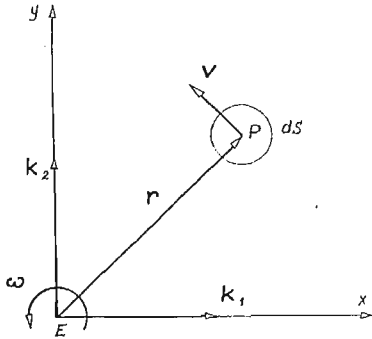
$$(4.1) \quad \mathbf{v} = \frac{\omega \times \mathbf{r}}{|\omega \times \mathbf{r}|} = v^j \mathbf{k}_j, \quad j = 1, 2$$

gdzie składowymi  $v^j$  są

$$(4.2) \quad v^1 = -\frac{\omega r^2}{\sqrt{(r^1)^2 + (r^2)^2}}, \quad v^2 = \frac{\omega r^1}{\sqrt{(r^1)^2 + (r^2)^2}}.$$

Wektorem siły tarcia Coulomba w punkcie P styku S w którym panuje docisk  $N(\mathbf{r})$  jest

$$(4.3) \quad \mathbf{T}_P = -N(\mathbf{r})\mathbf{Q}\mathbf{v} = T_P^i \mathbf{k}_i, \quad i = 1, 2$$



Rys. 7. Pole wektorów prędkości liniowej w styku podczas wirowania z wektorem prędkości kątowej  $\omega$ .

Niech reprezentacją macierzową tensora tarcia  $\mathbf{Q}$  o polibazie utworzonej z baz układu odniesienia, jest macierz  $[Q^{ik}]$  ( $i, k = 1, 2$ ) której elementy określa równanie (3.18). Wówczas składowymi siły tarcia  $\mathbf{T}_P$  są,

$$(4.4) \quad T_P^i = -N(\mathbf{r})Q^{ik}\delta_{jk}v^j = -N(\mathbf{r})R_P^i\omega, \quad i, j, k = 1, 2$$

gdzie

$$(4.5) \quad R_P^1 = -Q^{11}\frac{r^2}{\sqrt{(r^1)^2 + (r^2)^2}} + Q^{12}\frac{r^1}{\sqrt{(r^1)^2 + (r^2)^2}}$$

$$R_P^2 = -Q^{21}\frac{r^2}{\sqrt{(r^1)^2 + (r^2)^2}} + Q^{22}\frac{r^1}{\sqrt{(r^1)^2 + (r^2)^2}}$$

Momentem siły tarcia  $\mathbf{T}_P$  względem środka wirowania jest

$$(4.6) \quad \mathbf{M}_P = \mathbf{r} \times \mathbf{T}_P = M_P \mathbf{n},$$

gdzie

$$(4.7) \quad M_P = -N(\mathbf{r})R_P^3\omega,$$

$$(4.8) \quad R_P^3 = Q^{11}\frac{(r^2)^2}{\sqrt{(r^1)^2 + (r^2)^2}} + Q^{22}\frac{(r^1)^2}{\sqrt{(r^1)^2 + (r^2)^2}} - (Q^{12} + Q^{21})\frac{r^1 r^2}{\sqrt{(r^1)^2 + (r^2)^2}}.$$

Całkowite tarcie panujące w styku S można opisać wzorami

$$(4.9) \quad \mathbf{T} = \int_S \mathbf{T}_P dS = T^i \mathbf{k}_i, \quad i = 1, 2$$

$$(4.10) \quad \mathbf{M} = \int_S \mathbf{M}_P dS = M \mathbf{n},$$

gdzie składowymi wektorów są

$$(4.11) \quad T^i = \int_S T_p^i dS = -\omega R^i, \quad i = 1, 2$$

$$(4.12) \quad M = \int_S M_p dS = -\omega R^3.$$

Wielkości zdefiniowane wzorem

$$(4.13) \quad R^l = \int_S N(\mathbf{r}) R_p^l dS, \quad l = 1, 2, 3$$

gdzie  $R_p^l$  określają równania (4.5) i (4.8) nazywamy charakterystykami tarciovymi styku. Opisują one wpływ wielkości niezależnych od ruchu takich jak rozkład i wielkość docisku, typ tarcia oraz kształt obszaru styku na wielkość siły i momentu tarcia wirowania.

Powyższe ogólne rozważania zilustrujemy rozpatrując przypadki szczególne. Założmy jednakowy docisk na całej powierzchni styku  $N(\mathbf{r}) = N = \text{const}$ . Wówczas charakterystyki tarciove mają postać

$$(4.14) \quad \begin{aligned} R^1 &= N(-Q^{11}A_1 + Q^{12}A_2), \\ R^2 &= N(-Q^{21}A_1 + Q^{22}A_2), \\ R^3 &= N[Q^{11}A_3 + Q^{22}A_4 - (Q^{12} + Q^{21})A_5], \end{aligned}$$

gdzie

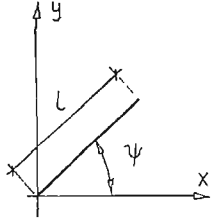
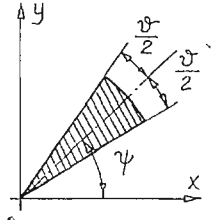
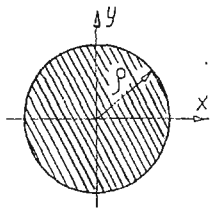
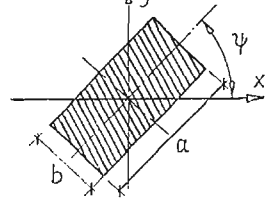
$$(4.15) \quad \begin{aligned} A_1 &= \int_S \frac{r^2}{\sqrt{(r^1)^2 + (r^2)^2}} dS, & A_2 &= \int_S \frac{r^1}{\sqrt{(r^1)^2 + (r^2)^2}} dS \\ A_3 &= \int_S \frac{(r^2)^2}{\sqrt{(r^1)^2 + (r^2)^2}} dS, & A_4 &= \int_S \frac{(r^1)^2}{\sqrt{(r^1)^2 + (r^2)^2}} dS \\ A_5 &= \int_S \frac{r^1 r^2}{\sqrt{(r^1)^2 + (r^2)^2}} dS. \end{aligned}$$

Współrzędne punktów styku  $(r^1, r^2)$  należy podać w przyjętym układzie odniesienia  $Oxy$  związanym z powierzchnią jednego ze stykających się ciał. Przy tym możliwy jest przypadek gdy  $(r^1, r^2)$  są wielkościami stałymi w czasie. Można wówczas, w celu ułatwienia obliczeń, wyznaczyć pomocnicze wielkości  $A'_i$  w układzie osi symetrii styku  $S$  zgodnie z (4.15) a następnie przetransformować do założonego układu  $Oxy$ . Obowiązuje następujące przekształcenie

$$(4.16) \quad \begin{aligned} A_1 &= A'_1 \cos \psi + A'_2 \sin \psi, \\ A_2 &= -A'_1 \sin \psi + A'_2 \cos \psi, \\ A_3 &= A'_3 \cos^2 \psi + A'_4 \sin^2 \psi + A'_5 \sin 2\psi, \\ A_4 &= A'_3 \sin^2 \psi + A'_4 \cos^2 \psi - A'_5 \sin 2\psi, \\ A_5 &= \frac{1}{2}(A'_4 - A'_3) \sin 2\psi + A'_5 \cos 2\psi. \end{aligned}$$

gdzie  $\psi$  jest kątem między układem osi symetrii a układem odniesienia  $Oxy$ . W tablicy 1 podano wielkości  $A_i (i = 1, \dots, 5)$  dla kilku wybranych kształtów obszaru styku. Możliwy

Tabl. 1. Współczynniki charakterystyk tarciovych styku

$A_L$				
$A_1$	$l \sin \psi$	$r^2 \sin \frac{\psi}{2} \sin \psi$	0	0
$A_2$	$l \cos \psi$	$r^2 \sin \frac{\psi}{2} \cos \psi$	0	0
$A_3$	$\frac{1}{2} l^2 \sin^2 \psi$	$\frac{1}{6} r^3 (\psi - \sin \psi \cos 2\psi)$	$\frac{1}{3} \pi \rho^3$	$\frac{1}{12} [ab^2 \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 1} - b^3 \ln(\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 1}) + 2a^3 \ln(\frac{b}{a} + \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1})] \sin^2 \psi + [a^2 b \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1} - a^3 \ln(\frac{b}{a} + \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1}) + 2b^3 \ln(\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 1})] \cos^2 \psi$
$A_4$	$\frac{1}{2} l^2 \cos^2 \psi$	$\frac{1}{6} r^3 (\psi + \sin \psi \cos 2\psi)$	$\frac{1}{3} \pi \rho^3$	$\frac{1}{12} [ab^2 \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 1} - b^3 \ln(\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 1}) + 2a^3 \ln(\frac{b}{a} + \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1})] \cos^2 \psi + [a^2 b \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1} - a^3 \ln(\frac{b}{a} + \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1}) + 2b^3 \ln(\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 1})] \sin^2 \psi$
$A_5$	$\frac{1}{4} l^2 \sin 2\psi$	$\frac{1}{6} r^3 \sin \psi \sin 2\psi$	0	$\frac{1}{24} [ab^2 \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 1} - a^2 b \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1} - 3b^3 \ln(\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 1}) + 3a^3 \ln(\frac{b}{a} + \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1})] \sin 2\psi$

jest przypadek w którym współrzędne punktów styku są funkcjami czasu  $r^1 = r^1(t)$ ,  $r^2 = r^2(t)$  a jednocześnie styk  $S$  zachowuje swój kształt i wymiary w każdej chwili czasu  $t$ . Wtedy współrzędne  $(r^1, r^2)$  można przedstawić jako funkcje kąta wirowania  $\varphi$  zetkniętych ze sobą powierzchni,  $r^1 = r^1(\varphi)$ ,  $r^2 = r^2(\varphi)$ . W tym przypadku, wygodnie jest policzyć  $A'_i$  w układzie osi symetrii i następnie przetransformować do układu  $Oxy$  korzystając z (4.16), gdzie  $\psi = \varphi$ . W ogólnym przypadku współrzędne punktów styku są funkcjami czasu a styk zmienia podczas ruchu swój kształt i wymiary. Należy wówczas w oparciu o obserwacje określić współrzędne punktów styku jako funkcje czasu.

### 5. Własności sił tarcia podczas wirowania

1. Całkowita siła tarcia  $\mathbf{T}$  w styku  $S$  jest zerem gdy ruch względny jest obrotem wokół tzw. bieguna wirowania [7] będącego punktem przecięcia się co najmniej dwóch wzajemnie ortogonalnych osi symetrii danego obszaru styku  $S$ . Dowód: W tym przypadku  $A_1$  i  $A_2$  są zerami, stąd również  $R^1 = R^2 = 0$ .
2. Siła tarcia odpowiadająca części antysymetrycznej tensora tarcia nie ma wpływu na wielkość momentu tarcia wirowania. Dowód: Część symetryczna tensora tarcia anizotropowego  $\mathbf{Q}$  o reprezentacji  $[Q^{ik}]$  ( $i, k = 1, 2$ ) ma postać

$$(4.17) \quad [\mathbf{Q}^s] = \begin{bmatrix} Q^{11} & \frac{1}{2}(Q^{12} + Q^{21}) \\ \frac{1}{2}(Q^{12} + Q^{21}) & Q^{22} \end{bmatrix}.$$

Wektorem momentu tarcia wirowania w przypadku tarcia anizotropowego przy założeniu  $N(\mathbf{r}) = N$ , jest

$$(4.18) \quad \mathbf{M} = -N[Q^{11}A_3 + Q^{22}A_4 - (Q^{12} + Q^{21})A_5]\omega,$$

zaś w przypadku tarcia ortotropowego odpowiadającego części symetrycznej tensora tarcia anizotropowego

$$(4.19) \quad \mathbf{M} = -N\left[Q^{11}A_3 + Q^{22}A_4 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (Q^{12} + Q^{21})A_5\right]\omega.$$

Identyczność wektorów momentu tarcia (4.18) i (4.19) wskazuje na brak wpływu części antysymetrycznej tensora tarcia na ruch wirowy.

Sformułujemy opisy sił tarcia w prostych przypadkach izotropii i ortotropii, gdy styk  $S$  zachowuje podczas ruchu kształt i wymiary a współrzędne punktów styku są wielkościami zależnymi od kąta wirowania  $\varphi$ . Załóżmy, że układ odniesienia  $Oxy$  związany jest z nieruchomym podłożem o izotropowej lub ortotropowej chropowatości. Niech wirujące ciało posiada izotropową chropowatość. Współczynniki tarcia  $\mu_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) w styku określono podczas poślizgów w kierunkach osi układu odniesienia. Wobec tego charakterystykami tarciovymi styku są następujące wielkości: dla styku powierzchni izotropowych

$$(4.20) \quad R^1 = -\mu N A_1, \quad R^2 = -\mu N A_2, \quad R^3 = \mu N (A_3 + A_4),$$

dla styku powierzchni izotropowej z ortotropową

$$(4.21) \quad \begin{aligned} R^1 &= (-\mu_{11} A_1 + \mu_{12} A_2)N, \\ R^2 &= (-\mu_{21} A_1 + \mu_{22} A_2)N, \\ R^3 &= (\mu_{11} A_3 + \mu_{22} A_4 - 2\mu_{12} A_5). \end{aligned}$$

Zgodnie z powyższymi założeniami, korzystając z wzorów podanych w tabl. 1, określono wektory siły i momentu tarcia podczas wirowania. Dla wirującego odcinka o długości  $l$  w przypadku izotropii

$$(4.22) \quad \begin{aligned} \mathbf{T} &= \mu N l \omega (\sin \varphi \mathbf{k}_1 - \cos \varphi \mathbf{k}_2), \\ \mathbf{M} &= -\frac{1}{2} \mu N l^2 \omega, \end{aligned}$$

w przypadku ortotropii

$$(4.23) \quad \begin{aligned} \mathbf{T} &= N l \omega [(\mu_{11} \sin \varphi - \mu_{12} \cos \varphi) \mathbf{k}_1 + (\mu_{12} \sin \varphi - \mu_{22} \cos \varphi) \mathbf{k}_2], \\ \mathbf{M} &= -\frac{1}{2} N l^2 (\mu_{11} \sin^2 \varphi - \mu_{12} \sin 2\varphi + \mu_{22} \cos^2 \varphi) \omega. \end{aligned}$$

Dla koła o promieniu  $\varrho$  w przypadku izotropii

$$(4.24) \quad \mathbf{T} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M} = -\frac{2}{3} \mu N \pi \varrho^3 \omega,$$

(wynik ten jest zgodny z uproszczoną analizą znaną z literatury np. [4, 5]), natomiast w przypadku ortotropii

$$(4.25) \quad \mathbf{T} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M} = -\frac{1}{3} \pi \varrho^3 N (\mu_{11} + \mu_{22}) \omega.$$

Dla kwadratu o boku  $a$  w przypadku izotropii

$$(4.26) \quad \mathbf{T} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M} \cong -0,3826 \mu N a^3 \omega,$$

w przypadku ortotropii

$$(4.27) \quad \mathbf{T} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M} \cong -N a^3 [0,2938 (\mu_{11} \sin^2 \varphi + \mu_{22} \cos^2 \varphi) + 0,0888 (\mu_{11} \cos^2 \varphi + \mu_{22} \sin^2 \varphi)] \omega.$$

Wprowadzony opis tarcia wykorzystano do obliczenia ruchu sztywnego ciała stykającego się z chropowatą płaszczyzną i wirującego wokół osi przechodzącej przez środek masy podstawy ciała o kształcie prostokąta. Przyjęto układ odniesienia związany z podstawą wirującego ciała. Wobec tego współrzędne punktów styku oraz wymiary styku nie zależą od czasu. Wielkości współczynników tarcia zgodnie z (3.24) zależą od kąta wzajemnego usytuowania chropowatości stykających się powierzchni, w analizowanym przypadku od współrzędnej wektora kąta wirowania ( $\varphi$ ). Założono anizotropową strukturę geometryczną powierzchni podstawy ciała  $\mu_{11}^{(1)} = 0,12$ ,  $\mu_{12}^{(1)} = 0,04$ ,  $\mu_{21}^{(1)} = 0,05$ ,  $\mu_{22}^{(1)} = 0,07$  oraz anizotropową strukturę płaszczyzny ruchu  $\mu_{11}^{(2)} = 0,04$ ,  $\mu_{12}^{(2)} = -0,09$ ,  $\mu_{21}^{(2)} = 0,05$ ,  $\mu_{22}^{(2)} = 0,10$ , po złożeniu powierzchni ze sobą ( $\varkappa = 0,5$ ) otrzymano tarcie anizotropowe. Rozpatrzono również przypadek zetknięcia powierzchni o jednakowych izotropowych strukturach geometrycznych  $\mu_{11} = \mu_{22} = 0,05$  lub  $\mu_{11} = \mu_{22} = 0,07$  i  $\mu_{12} = \mu_{21} = 0$ .

Nieliniowe różniczkowe równanie ruchu rozwiązano metodą Rungego-Kutty czwartego rzędu.

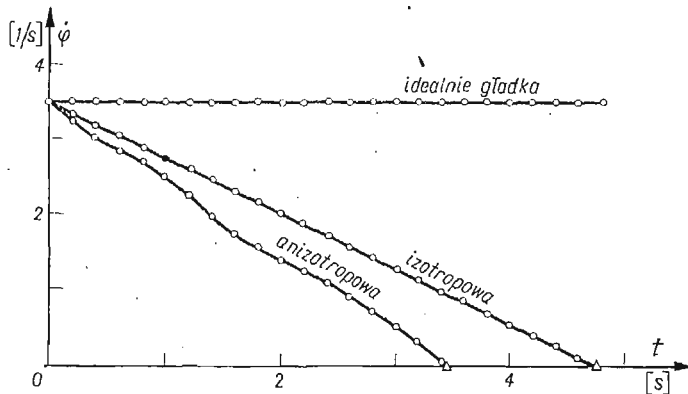
Zbadano przebieg prędkości wirowania ciała poruszającego się zgodnie z równaniem

$$(4.28) \quad I\dot{\varphi} = \mathbf{M},$$

gdzie

$$(4.29) \quad \mathbf{M} = -NR^3\boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{\dot{\boldsymbol{\varphi}}}{|\dot{\boldsymbol{\varphi}}|}.$$

$I$  jest momentem bezwładności ciała względem osi wirowania,  $\boldsymbol{\varphi}$  wektorem kąta wirowania,  $\mathbf{M}$  wektorem momentu sił tarcia,  $R^3 = R^3(\boldsymbol{\varphi})$  charakterystyką tarciovą styku w funkcji kąta wirowania. Postać  $R^3$  wyznaczono korzystając z  $A_3$ ,  $A_4$  i  $A_5$  podanych dla prostokąta w tabl. 1 (gdy  $\psi = 0$ ) oraz wzorów (4.14) i (3.24). Rozpatrzono ruch ciała o podstawie  $a = 2$  [m],  $b = 0,05$  [m], masie  $m = 5$  [kg] oraz docisku równym ciężarowi ciała. Ruch wywołany został warunkami początkowymi  $\boldsymbol{\varphi}_0 = \mathbf{0}$ ,  $\dot{\boldsymbol{\varphi}}_0 = 3,5 \mathbf{n}$  [1/s]. Na rys. 8 przedstawiono wykres prędkości wirowania dla przypadku styku idealnie gładkiego



Rys. 8. Prędkość wirowania bryły stykającej się z chropowatą płaszczyzną podczas ruchu wywołanego prędkością początkową

(bez udziału tarcia), styku o izotropowej chropowatości ( $\mu = 0,05$ ) i styku o anizotropowej chropowatości. Trójkątami oznaczono moment zatrzymania się ciała. Krzywoliniowy charakter wykresu prędkości wirowania dla styku anizotropowego wynika z różnic między siłami tarcia na kierunkach ekstremalnego tarcia.

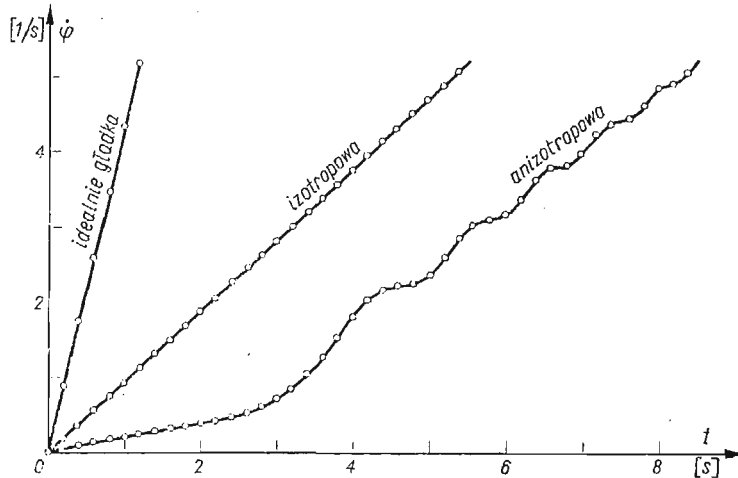
Analizowano również przebieg prędkości wirowania podczas ruchu opisanego równaniem

$$(4.30) \quad I\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{M} + \mathbf{M}_c,$$

gdzie  $\mathbf{M}_c = 0,725\mathbf{n}$  [Nm] jest stałym w czasie momentem sił czynnych. Ruch rozpoczęto bez warunków początkowych. W tym przypadku przyjęto ciało o podstawie  $a = 0,6$  [m],  $b = 0,2$  [m] i masie oraz docisku jak poprzednio. Na rys. 9 przedstawiono wykres prędkości wirowania dla styku idealnie gładkiego, o izotropowej chropowatości ( $\mu = 0,07$ ) i anizotropowej chropowatości. Wpływ sił tarcia na charakter zmienności prędkości



wirowania jest znaczny dla małych prędkości, w miarę wzrostu prędkości staje się coraz mniejszy. Zmienność momentu sił tarcia wirowania wynika ze zmieniających się wielkości sił tarcia w miarę zmian kąta wirowania.



Rys. 9. Prędkość wirowania bryły stykającej się z chropowatą płaszczyzną podczas ruchu wywołanego stałym momentem wirowania

#### Literatura cytowana w tekście

1. M. T. HUBER, *Opory tarcia i ich rola w niektórych zagadnieniach kolejnictwa*, Pisma t. III, PWN Warszawa 1957.
2. W. MOSZYŃSKI, *O zagadnieniu tarcia między ciałami stałymi izotropowymi i anizotropowymi*, Przegląd Mech., z. 1—3, 9 (1950), 3—11.
3. S. ZIEMBA, *O pewnych przypadkach anizotropii tarcia*, Arch. Mech. Stos., 4 (1952), 105—121.
4. Л. А. ГАЛИН, *Контактные задачи теории упругости*, Изд. Технико-Теоретической Литературы, Москва 1953.
5. А. И. ЛУРЬЕ, *Аналитическая механика*, Изд. Физико-Математической Литературы, Москва 1961
6. A. ZMITROWICZ, *Tensor tarcia Coulomba*, Mech. Teor. i Stos., 4, 15 (1977), 517—527.
7. Г. К. ПОЖАРИЦКИЙ, *Распространение принципа Гаусса на системы с сухим трением*, ПММ, 3, 25 (1961), 391 - 406.

#### Резюме

#### СИЛЫ ТРЕНИЯ КУЛОМБА ПРИ ВРАЩЕНИИ

В работе представлено обобщение тензора трения Куломба [6] для случая контакта поверхностей о изотропной и анизотропной шероховатости, а также для случая контакта поверхностей о разных анизотропных шероховатостях.

Сделано примерные расчеты траекторий точки движущейся по плоскостях о разных шероховатостях.

В работе дано определение векторов силы и момента трения при вращении как величины зависящих от характеристик трения поверхности контакта и единичного вектора скорости враще-

ния. При этом принято во внимание произвольную форму поверхности контакта и произвольный тип трения. Для выбранных случаев контакта определены векторы сил трения при вращении.

Сделаны примерные расчеты скорости вращения твердого тела контактирующего прямоугольным основанием с плоскостями с идеальной, изотропной, и анизотропной шероховатости.

#### S u m m a r y

#### COULOMB FRICTION FORCES DURING ROTATION

In this paper the description of the Coulomb's friction tensor [6] is extended to the case of contact between surfaces, with isotropic and anisotropic roughness and to the case of the contact between surfaces of various anisotropic roughness.

Numerical calculations of trajectories of a point over surfaces of various roughness have been made.

The vectors of force and moment of friction during rotation are defined as quantities depending on the frictional characteristic of the contact surface and the rotation speed versor. The definition is valid for any form of contact and any kind of friction. Vectors of the friction forces during rotation have been calculated for selected cases.

Numerical calculations of the rotation speed of a solid body with a rectangular base being in contact with an ideal surface, and with surface with isotropic and anisotropic roughness have been made.

PAN

INSTYTUT MASZYN PRZEPLYWOWYCH GDAŃSK

*Praca została złożona w Redakcji 13 marca 1978 r.*

---