MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1, 15 (1977)

OPTYMALNE KSZTAŁTOWANIE PRĘTA METODĄ PROGRAMOWANIA DYNAMICZNEGO

JAN BŁACHUT (KRAKÓW)

1. Wstęp

Metodę programowania dynamicznego wykorzystuje się w mechanice nie tylko do rozwiązywania jedno i dwuwymiarowych elementów konstrukcyjnych, lecz również do ich optymalnego kształtowania.

W pracy [1] rozwiązano nieliniowe zadanie statyki pręta. Wychodząc z minimum energii potencjalnej wyznaczono linię ugięcia pręta sprężystego, jednostronnie sztywnie utwierdzonego, dowolnie obciążonego momentem i siłą skupioną oraz obciążeniem ciągłym, przy ograniczeniach geometrycznych. Stosując programowanie dynamiczne POCZTMAN podał [2] optymalny kształt belki wspornikowej o przekroju prostokątnym, stałej szerokości, ze względu na minimum objętości, przy ograniczeniach nałożonych na geometrię belki z materiału pełzającego.

Znane są rozwiązania zadań wariacyjnych o pochodnych cząstkowych, które sprowadzają się do liniowych równań różniczkowych typu parabolicznego lub eliptycznego, określonych na obszarach regularnych i nieregularnych [4, 5]. Próba użycia metody programowania dynamicznego do optymalnego kształtowania elementów konstrukcji prowadzi do nieliniowego równania Hamiltona–Jacobiego lub posługując się koncepcją dyskretnej aproksymacji procesu ciągłego otrzymuje się równanie funkcyjne rozwiązywane numerycznie w sposób odmienny od bezpośrednich obliczeń maszynowych. Pomimo wielu trudności [6] metoda ta posiada dużo zalet, które wynikają z procesu «poszukiwania» rozwiązania optymalnego, a nie otrzymywania go za pomocą rachunku. Umożliwia to pokonanie wielu trudności związanych ze stosowaniem zwykłego podejścia rachunku wariacyjnego.

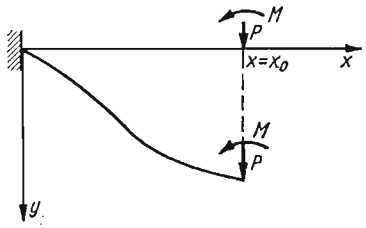
W pracy [3] przedstawiono rozwiązanie dwugranicznego zadania wariacyjnego dla pręta sprężystego, jednorodnego z uwzględnieniem ograniczeń geometrycznych, jako zadanie sterowania optymalnego. Poszukując minimum energii potencjalnej zdeformowanego pręta o stałym przekroju metodą równania funkcyjnego Bellmana, otrzymano linię ugięcia pręta dla kilku obciążeń zewnętrznych siłą skupioną.

2. Sformułowanie problemu

Celem tej pracy jest próba optymalnego kształtowania pręta przy dużych przemieszczeniach, z tym, że przedstawione zostaną głównie szczegóły obliczeń maszynowych zastosowanej metody. Rozważać będziemy ścisłe równanie linii ugięcia, a jako kryterium optymalności przyjmiemy minimum objętości.

Niech będzie dany jednorodny, sprężysty pręt, jednostronnie sztywno utwierdzony, obciążony momentem M oraz siłą skupioną P w punkcie $x = x_0$. Rozwiązań poszukiwać będziemy dla $M \neq 0$ i $P \neq 0$. Moment M i siła P mogą przemieszczać się tylko wzdłuż prostej $x = x_0$, zaś pręt bez tarcia może przesuwać się przez prawe zamocowanie.

Taki charakter obciążenia sprawia, że długość l pręta jest pierwotnie nieustalona i każdorazowo wyznacza ją wielkość obciążenia. Dodatkowo zażądajmy, aby w stanie równowagi prawy koniec pręta pozostał poziomy (rys. 1). Przy takim sposobie obcią-



Rys. 1. Sposób obciążenia pręta

żenia siłą P i momentem M należy znaleźć przekrój, który zapewni minimum objętości przy spełnieniu równania równowagi i warunków brzegowych. Zadanie to sformułujemy poniżej w kategoriach teorii optymalnego sterowania [8]. Zaś do jego rozwiązania użyta zostanie wersja dyskretna programowania dynamicznego.

a) *Równanie stanu.* Równanie stanu będzie równaniem równowagi pręta, które w układzie współrzędnych (s, φ) można zapisać

$$\varphi' = \frac{M(s)}{\alpha}, \qquad \varphi' = \frac{d\varphi}{ds}. \tag{1}$$

b) *Warunki brzegowe.* Na sztywno zamocowanym końcu będzie

$$\varphi(0) = \frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

c) *Ograniczenia.* Zbiór ograniczeń U_d będzie zawierał ograniczenia nałożone na:

— kąt, tj. $a \leqslant |\varphi| \leqslant \Phi$, $a > 0$, $\Phi < \pi/2$, przy czym w całym przedziale całkowania $0 < s < 1$ przyjęto $a = 0{,}1$ oraz $\Phi = 1{,}54$,

— geometrię pręta, tj. siła P oraz moment M mogą przesuwać się po prostej $x = x_0$; prawy koniec pręta pozostaje poziomy

$$\varphi(1) = \frac{\pi}{2}; \tag{3}$$

— sposób wykonania (pręt może swobodnie, bez tarcia przesuwać się pod siłą P).

d) *Funkcja celu.* Niech przekrój poprzeczny pręta będzie prostokątny o stałej wysokości. Objętość jest wtedy proporcjonalna do sztywności $\alpha(s)$. Poszukiwać będziemy takiej sztywności $\alpha(s)$, aby zapewnić minimum objętości $c_0 \int_0^l \alpha(s)ds$ to jest

$$V^* = \min_{\alpha} c_0 \int_0^l \alpha(s)ds. \tag{4}$$

Sposób rozwiązania. Z uwagi na kształt równania stanu wygodniej jest wyeliminować $\alpha(s)$ z (1) i wstawić do (4). Otrzymamy równoważny problem, w którym rolę zmiennej sterowania spełniać będzie kąt φ. Zbiór dopuszczalnych wartości sterowań U_d wyznaczą ograniczenia i warunek brzegowy, to jest c) oraz b). Proces poszukiwania optymalnego sterowania prowadzić będziemy ze stałym krokiem długości Δ. Ponieważ nie znamy długości l odkształconego pręta, a zatem nie wiemy z ilu etapów będzie składał się nasz proces, konieczne jest przyjęcie z góry pewnej liczby etapów. Niech kk oznacza tę liczbę. Wtedy wstawiając (1) do (4) otrzymujemy

$$V = c_0 \int_0^l \frac{M}{\varphi'}\, ds. \tag{5}$$

Zastępując całkowanie w (5) sumą kk składników mamy

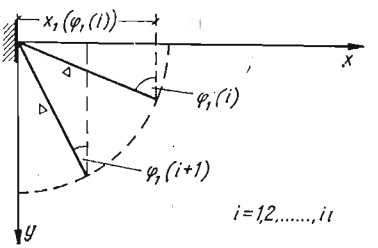
$$V \approx c_0 \sum_{k=1}^{kk} \frac{M_k}{\varphi'_k} \Delta. \tag{6}$$

Dalej podzielmy cały zbiór sterowań dopuszczalnych U_d na ii części, niekoniecznie równych. Równanie Bellmana przyjmie w naszym przypadku postać

$$f_k(c) = \min_{\varphi_k \in U_d} \left\{ c_0 \frac{M - P[x_0 - (x(c) + \Delta \sin \varphi_k)]}{(\varphi_k - c)/\Delta} \Delta + f_{k-1}(\varphi_k) \right\}, \tag{7}$$

gdzie $f_0 = 0$, $k = 1, 2, \ldots, kk$, P, M — stała siła i moment przyłożony na końcu, k — numer etapu.

Rozważmy kilka aspektów związanych najpierw z tablicowaniem funkcji $f(c)$, a potem z określeniem optymalnego kształtu $\alpha(s)$ i linii ugięcia $y = y(x)$.



Rys. 2. Wyznaczanie współrzędnych wektora stanu x_1 na etapie pierwszym ($k = 1$)

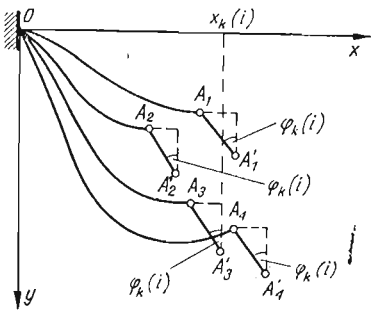
Etap pierwszy ($k = 1$) $\varphi_1(i)$ — i-ta wartość sterowania ze zbioru U_d, $\varphi_1(i+1)$ — $i+1$-sza wartość sterowania ze zbioru U_d, $x_1(\varphi_1(i)) = \Delta \sin(\varphi_1(i))$ — i-ta współrzędna wektora stanu w układzie współrzędnych (x, y) na etapie pierwszym, $X_1(\varphi_1(i+1)) = \Delta \sin(\varphi_1(i+1))$ — $i+$pierwsza składowa wektora stanu w układzie współrzędnych (x, y) na etapie pierwszym.

Z równania (7) otrzymujemy dla $k = 1$ następującą postać $f_1(c)$:

$$f_1(c) = c_0 \frac{M - P[x_0 - \Delta \sin(\varphi_1)]}{(\varphi_1 - \frac{\pi}{2})/\Delta} \Delta. \tag{8}$$

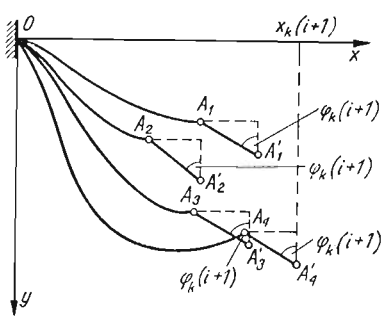
W wyniku zrealizowania pierwszego kroku otrzymujemy ii wartości $f_1(\varphi_1)$ oraz tyle samo wartości $x_1(\varphi_1)$. Wartości $x_1(\varphi_1)$ oraz $f_1(\varphi_1)$ wpisujemy do tablicy dwuwymiarowej $x[1, i]$ oraz $f[1, i]$, gdyż będą potrzebne do określenia ścieżki optymalnej przy ruchu powrotnym.

Dowolny etap k. Na etapie k tablicujemy ii wartości $f_k(c)$ oraz ii wartości wektora stanu $x_k(c)$. Niech $OA_1, OA_2, \ldots, OA_{ii}$ będą krzywymi odpowiadającymi optymalnym przejściom z punktów $A_1, A_2, \ldots, A_{ii}$ do początku układu współrzędnych O. Krzywe te



Rys. 3. Wyznaczanie współrzędnych wektora stanu $x_k(i)$ na dowolnym etapie k (sterowanie $\varphi_k(i)$)

otrzymaliśmy w wyniku zrealizowania $k-1$ kroków do tyłu startując z punktu O. Nadajmy sterowaniu φ_k ze zbioru sterowań dopuszczalnych pierwszą wartość $\varphi_k(i)$. Wykorzystując (7) porównujemy $f_k(c)$ dla krzywej $OA_1A'_1$ z wartością $f_k(c)$ dla krzywej $OA_2A'_2$. Mniejszą z nich zapamiętuje się. Dalej kolejno porównuje się wartości f_k dla krzywych $OA_3A'_3, \ldots, OA_{ii}A'_{ii}$. Najmniejsza wartość funkcji celu wybiera odpowiednią krzywą. Niech będzie to np. $OA_3A'_3$. Wtedy współrzędna wektora stanu na etapie k jest współrzędną punktu A'_3. Powiemy wtedy, że sterowanie $\varphi_k(i)$ realizuje na krzywej $OA_3A'_3$ minimum funkcji celu ze względu na k etapów. W pamięci stałej lub operacyjnej maszyny zapisujemy wartość sterowania $\varphi_k(i)$, współrzędną x_3 oraz wartość funkcji celu.



Rys. 4. Wyznaczanie współrzędnych wektora stanu $x_k(i+1)$ na dowolnym etapie k (sterowanie $\varphi_k(i+1)$)

Po nadaniu sterowaniu nowej wartości $f_k(i+1) \in U_d$ ustalamy, na której krzywej zapewnia ono minimum (7). Niech będzie to $OA_4A'_4$. Wtedy kolejne współrzędne na etapie k wynoszą: dla wektora stanu będzie to odcinek $Ox_k(i+1)$, dla sterowania $\varphi_k(i+1)$, dla f_k wartość zrealizowana dla krzywej $OA_4A'_4$. Etap k kończy się, gdy wyczerpiemy wszystkie wartości dopuszczalne $\varphi_k \in U_d$.

Sposób obliczania (7) na etapie $k+1$ jest identyczny z tym, że zamiast OA_1 mamy teraz $OA_3A'_3$, zamiast OA_2 będzie $OA_4A'_4$ itd.

Etap ostatni. Nie znając liczby etapów na początku należy sprawdzać czy wartość każdej współrzędnej stanu etapu k nie przekracza x_0. Jeśli $x[k, i]$ oznacza stan i na etapie k, to proces rozwiązywania (7) kończy się z chwilą, gdy

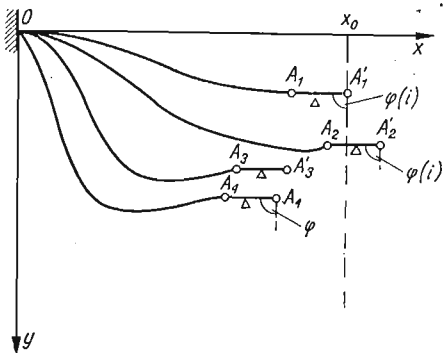
$$|x[k, i]-x_0| < \varepsilon, \tag{9}$$

gdzie ε jest pewną stałą.

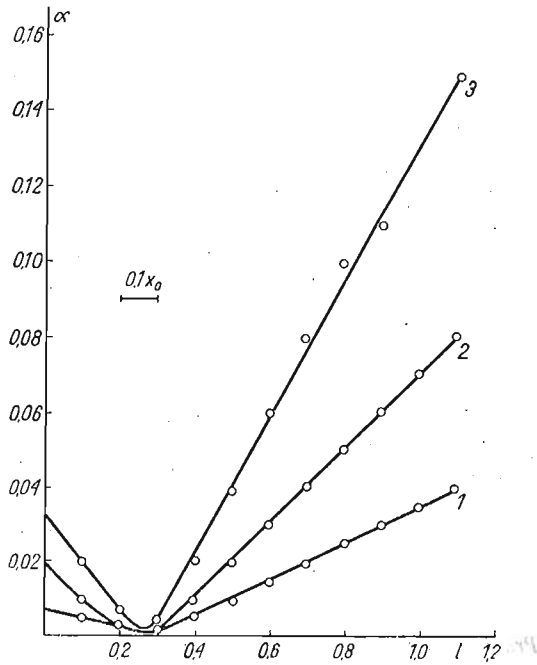
Zgodnie z nałożonym ograniczeniem koniec pręta powinien być poziomy. Ograniczenie to spełnimy jeśli równocześnie będzie

$$|x[k, i]-x_0| < \varepsilon \wedge \varphi_k(i) = \pi/2. \tag{10}$$

Na rys. 5 żądanie to spełnia stan odpowiadający OA_1A_1'. Z chwilą osiągnięcia prostej $x = x_0$ należy odtworzyć ścieżkę optymalną odpowiadającą na rys. 5 krzywej OA_1A_1'.



Rys. 5. Zakończenie procesu tablicowania funkcji celu przy ruchu «wstecz»



Rys. 6. Optymalny kształt pręta: $1-P = 0{,}5$, $M = 0{,}35$; $2-P = 1{,}0$, $M = 0{,}70$; $3-P = 2{,}0$, $M = 1{,}40$.

Wykorzystując zapisane wartości funkcji celu, współrzędnych wektora stanu oraz sterowania optymalnego na poszczególnych etapach, przy ruchu do «przodu» znajdujemy posługując się (5) i (7) przekrój pręta $\alpha(s)$ oraz linię ugięcia OA_1A_1'.

Rozwiązanie przeprowadzono dla $x_0 = 1$ m, przy obciążeniu siłą P równą 0,5; 1,0; 2,0 kG i momentem skupionym $M = 0{,}35$; 0,70; 1,40 kGm. Otrzymany przekrój optymalny przedstawiony jest na rys. 6. Cały przedział sterowań dopuszczalnych został podzielony na 40 części. Stała wartość kroku $\Delta = 0{,}1x_0$. Wartość ε w (10) przyjęto 0,01. Obliczenia przeprowadzono na EMC Odra 1204.

Literatura cytowana w tekście

1. A. Бараненко, Ю. М. Почтман, *Динамическое программирование и нелинейные задачи статики тонких стержней*, ДАН, 5, **185**; (1968), 1029 - 1031.
2. Ю. М. Почтман, *Динамическое программирование в задачах оптимизации конструкции подверженных ползучести*, Докл. Физ. Наук 1, **17** (1970), 29 - 30.
3. А. Бараненко, Ю. М. Почтман, *О решении некоторых нелинейных краевых задачи теории гибких стержней с помощью динамического программирования*, Прикл. Механика, 1, 7 (1971), 128 - 132.
4. N. Distefano, *Dynamic programming and the solution of the biharmonic equation*, Intern. J. for Numerical Methods in Eng., 2, 3 (1971), 199 - 213.
5. E. Angel, R. Bellman, *Dynamic programming and partial differential equations*, New York 1972.
6. R. Bellman, *Adaptacyjne procesy sterowania*, Warszawa 1965.
7. R. Bellman, *Programowanie dynamiczne*, Warszawa 1969.

Р е з ю м е

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТЕРЖНЯ МЕТОДОМ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В работе представлено решение задачи о минимизации объема стержня при больших перемещениях. Задача сформулирована в терминах теории управления и решена методом динамического программирования в дискретной постановке. В качестве иллюстрации приведены некоторые детали численных расчетов.

S u m m a r y

OPTIMUM DESIGN OF A FLEXIBLE BAR BY MEANS OF DYNAMIC PROGRAMMING

In this paper, the minimum-volume design of a flexible bar with large deflections is shown. The minimum-volume problem is formulated as an example of the control theory and solved by using the ideas of dynamic programming in its discrete version. To illustrate the method of solution, details of numerical calculations are presented.

INSTYTUT FIZYKI
POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 czerwca 1976 r.