MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1, 15 (1977)

STAN NAPRĘŻEŃ W WALCU KOŁOWYM WYWOŁANY PRZYŁOŻENIEM STAŁEJ TEMPERATURY NA POBOCZNICY

KRZYSZTOF GRYSA, MARIA KWIEK (POZNAŃ)

W pracy rozpatruje się długi walec kołowy o promieniu a, do pobocznicy którego w pewnej chwili czasu $t_0 = 0$ zostaje przyłożona stała temperatura T_0, mierzona od temperatury stanu naturalnego walca. Zagadnienie rozpatrywane jest w walcowym układzie współrzędnych r, φ, z, przy czym za oś z obrano oś walca. Rozważania prowadzone są dla punktów walca dostatecznie odległych od jego końców, w związku z czym można założyć płaski stan odkształcenia. Zagadnienie jest kołowo-symetryczne, tzn. $u_r = u_r(r, t)$, $u_\varphi = u_z = 0$, $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}(r, t)$, gdzie u_r, u_φ, u_z — współrzędne wektora przemieszczenia; wskaźniki α, β mogą przyjmować wartości r, φ lub z.

Naprężenia $\sigma_{\alpha\beta}$ można wyrazić przez przemieszczenie u_r i temperaturę θ związkami [1]:

$$\sigma_{rr} = (\lambda+2\mu)\frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda\frac{u_r}{r} - \gamma\theta, \tag{1}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = (\lambda+2\mu)\frac{u_r}{r} + \lambda\frac{\partial u_r}{\partial r} - \gamma\theta, \tag{2}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}(\sigma_{rr}+\sigma_{\varphi\varphi}) - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\gamma\theta, \tag{3}$$

$$\sigma_{r\varphi} = \sigma_{rz} = \sigma_{\varphi z} = 0, \tag{4}$$

gdzie

λ, μ — stałe Lamégo, $\gamma = (3\lambda+2\mu)\alpha_t$, α_t — współczynnik rozszerzalności cieplnej, $\theta = \theta(r, t)$ — temperatura punktów przekroju poprzecznego walca, mierzona od temperatury stanu naturalnego.

Rozkład temperatury θ wewnątrz walca opisany jest równaniem przewodnictwa cieplnego, [1]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\theta r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial t}\right)\theta = 0, \tag{5}$$

gdzie $\varkappa$ — współczynnik przewodzenia temperatury.

Stan przemieszczeń w walcu określa równanie [1]:

$$(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\right)u_r + F_r = \varrho_0\ddot{u}_r + \gamma\frac{\partial\theta}{\partial r}, \tag{6}$$

gdzie F_r — siła masowa, ϱ_0 — gęstość, $(\dot{\ }) = \frac{\partial(\ )}{\partial t}$, W rozpatrywanym zagadnieniu temperatura θ i przemieszczenie u_r muszą spełniać następujące warunki:

$t = 0$

$$\begin{aligned} \theta(r, 0) &= 0, \\ u_r(r, 0) &= 0, \\ \dot{u}_r(r, 0) &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

$r = a$

$$\begin{aligned} \theta(a, t) &= T_0, \\ (\lambda+2\mu)\frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda\frac{u_r}{r} &= \gamma T_0. \end{aligned} \tag{8}$$

Przy rozwiązywaniu tego problemu zostaną uwzględnione efekty inercyjne wynikłe ze zmiany temperatury w czasie, tzn. w odróżnieniu od rozważań zawartych m.in. w [1, 2], w równaniu (6) nie pomija się członu bezwładnościowego.

Prezentowane w pracy podejście do problemu nie jest nowe, gdyż stosowali je również MURA [3] i DERSKI [4]. W pracy [3] ograniczono się tylko do wyznaczenia przemieszczeń; w pracy [4] wyznaczono ponadto naprężenia w walcu, lecz wynik zawarty w tej pracy obarczony jest błędem, prawdopodobnie drukarskim (wskazywałby na to poprawny tok obliczeń w cytowanej pracy). Jednakże fakt przeoczenia tego błędu w korekcie świadczy o tym, że duża liczba oznaczeń użytych do skonstruowania wyniku utrudniła zweryfikowanie tegoż wyniku w porównaniu ze znanymi przypadkami szczególnymi. Ponadto użycie do opisu zarówno przemieszczeń w pracy [3], jak i naprężeń w pracy [4] funkcji Thomsona [6] utrudnia analizę otrzymanych wyników, o czym świadczy brak tejże analizy w obu cytowanych pracach.

W pracy niniejszej podaje się postaci naprężeń σ_{rr} i $\sigma_{\varphi\varphi}$ dane przez liczby bezwymiarowe zawierające stałe materiałowe. Wpływ sił masowych F_r na naprężenia pomija się. Pomija się również szczegółowe rachunki prowadzące do przedstawionych dalej wyników, gdyż pokrywają się one z obliczeniami przedstawionymi w pracy [4]. W ostatniej części pracy zawarta jest analiza otrzymanych wyników.

Rozwiązanie równania (5) z warunkami $(7)_1$ i $(8)_1$ jest następujące [1, 2]:

$$\theta(\mathrm{r}, \mathrm{t}) = T_0\left(1-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\mu_k\frac{r}{a}\right)}{\mu_k J_1(\mu_k)}\mathrm{e}^{-\mu_k^2\frac{\varkappa}{a^2}t}\right), \tag{9}$$

gdzie μ_k są miejscami zerowymi funkcji $J_0(\mu)$; $J_0(z)$ — funkcja Bessela pierwszego rodzaju zerowego rzędu.

Mając na uwadze związek (9) można rozwiązać równanie (6) z warunkami $(7)_2$, $(7)_3$ i $(8)_2$ na drodze pokazanej w pracy [4]. Wykorzystując następnie zależności (1) i (2) można naprężenia σ_{rr} i $\sigma_{\varphi\varphi}$ przedstawić w postaci następującej:

$$\sigma_{rr}(\varrho, \mathrm{Fo}) = \mathrm{c}^2\gamma T_0\Bigg\{1-\frac{2I_1(L)}{LI_0(L)}-2S_1(\varrho)+ \tag{10}$$

$$+4L^2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{J_1(\varrho\mu_k)}{\varrho J_1(\mu_k)}-1+\frac{\mu_k^3 J_0(\varrho\mu_k)}{L^2 J_1(\mu_k)}\right]\frac{\exp(-\mathrm{Fo}\,\mu_k^2)}{\mu_k^2(\mu_k^2+L^2)}+$$

$$+\sum_{l=1}^{\infty}\beta_l(\varrho)\sin(L\,\mathrm{Fo}\,\nu_l)\frac{L\nu_l}{\nu_l^2+L^2}\left(4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k^2-L^2}{\mu_k^4+L^2\nu_l^2}-\frac{1}{c^2}\right)-$$

$$-\sum_{l=1}^{\infty}\beta_l(\varrho)\cos(L\,\mathrm{Fo}\,\nu_l)\frac{\nu_l^2}{\nu_l^2+L^2}\left(\frac{4L^2}{\nu_l^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k^2+\nu_l^2}{\mu_k^4+L^2\nu_l^2}+\frac{1}{c^2}\right)\bigg\},$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(\varrho,\mathrm{Fo}) = c^2\gamma T_0\left\{1-\frac{2I_1(L)}{LI_0(L)}-2S_2(\varrho)+\right. \tag{11}$$

$$+4L^2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\mu_k^3 J_0(\varrho\mu_k)}{2c^2L^2J_1(\mu_k)}+\frac{\mu_k J_0(\varrho\mu_k)}{J_1(\mu_k)}-\frac{J_1(\varrho\mu_k)}{\varrho J_1(\mu_k)}-1\right]\frac{\exp(-\mathrm{Fo}\,\mu_k^2)}{\mu_k^2(\mu_k^2+L^2)}+$$

$$+\sum_{l=1}^{\infty}\hat{\beta}_l(\varrho)\sin(L\,\mathrm{Fo}\,\nu_l)\frac{L\nu_l}{\nu_l^2+L^2}\left(4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k^2-L^2}{\mu_k^4+L^2\nu_l^2}-\frac{1}{c^2}\right)-$$

$$-\sum_{l=1}^{\infty}\hat{\beta}(\varrho)\cos(L\,\mathrm{Fo}\,\nu_l)\frac{\nu_l^2}{\nu_l^2+L^2}\left(4\frac{L^2}{\nu_l^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k^2+\nu_l^2}{\mu_k^4+L^2\nu_l^2}+\frac{1}{c^2}\right)\bigg\},$$

gdzie

$$S_1(\varrho) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2L^2}{\mu_k^2(\mu_k^2+L^2)}\,\frac{\varrho\mu_k^2 I_0\left(\frac{\varrho\mu_k^2}{L}\right)-2cLI_1\left(\frac{\varrho\mu_k^2}{L}\right)}{\varrho\mu_k^2 I_0\left(\frac{\mu_k^2}{L}\right)-2c^2\varrho LI_1\left(\frac{\mu_k^2}{L}\right)},$$

$$S_2(\varrho) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2L^2}{\mu_k^2(\mu_k^2+L^2)}\,\frac{\varrho\mu_k^2(1-2c^2)I_0\left(\frac{\varrho\mu_k^2}{L}\right)+2c^2LI_1\left(\frac{\varrho\mu_k^2}{L}\right)}{\varrho\mu_k^2 I_0\left(\frac{\mu_k^2}{L}\right)-2c^2\varrho LI_1\left(\frac{\mu_k^2}{L}\right)},$$

$$\beta_l(\varrho) = 2\,\frac{\varrho\nu_l J_0(\varrho\nu_l)-2c^2J_1(\varrho\nu_l)}{\varrho J_1(\nu_l)\,[\nu_l^2-4c^2(1-c^2)]},$$

$$\hat{\beta}_l(\varrho) = 2\,\frac{(1-2c^2)\varrho\nu_l J_0(\varrho\nu_l)+2c^2J_1(\varrho\nu_l)}{\varrho J_1(\nu_l)\,[\nu_l^2-4c^2(1-c^2)]},$$

$\varrho = r/a$ — bezwymiarowy promień, $\mathrm{Fo} = \dfrac{\varkappa t}{a^2}$ — liczba kryterialna Fouriera, będąca jednocześnie bezwymiarowym czasem, $c^2 = \dfrac{\mu}{\lambda+2\mu} = \dfrac{c_2^2}{c_1^2}$, $c_2^2 = \dfrac{\mu}{\varrho_0}$, $c_1^2 = \dfrac{\lambda+2\mu}{\varrho_0}$, ϱ_0 — gęstość, ν_l — pierwiastki równania $J_0(\nu) - \dfrac{2c^2}{\nu}J_1(\nu) = 0$, $L = \dfrac{ac_1}{\varkappa}$ — bezwymiarowa liczba, określająca wpływ wielkości ϱ_0, $\varkappa$ i a na wielkość i charakter naprężeń. Wśród parametrów określających tę liczbę znajdują się również stałe λ i μ, lecz ich wpływ na naprężenia lepiej charakteryzuje wyżej wprowadzona bezwymiarowa wielkość c. Liczba L szerzej omówiona jest w dalszych częściach pracy; warto nadmienić, że analiza wpływu tej liczby na pewne rozwiązania problemów termosprężystości zawarta jest w pracy [5] s. 420—421; $J_n(z)$ — funkcja Bessela pierwszego rodzaju n-tego rzędu [6], $I_n(z)$ — zmodyfikowana funkcja Bessela pierwszego rodzaju n-tego rzędu [6].

Parametry $\varkappa$, a, ϱ_0 i czas t występują tylko w wyrażeniach dwóch liczb bezwymiarowych: L i Fo. Liczby te zatem opisują w pełny sposób wpływ wyżej wymienionych parametrów na wielkość naprężeń. Chcąc np. uzyskać przejście od związków (10), (11) do naprężeń, uzyskanych przy pominięciu w równaniu (6) członu inercyjnego, należy wykonać przejście z L do nieskończoności przy niezmienionym Fo. Otrzymuje się wówczas, że

$$\lim_{L\to\infty} S_1(\varrho) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_k^2} = 0{,}5$$

$$\lim_{L\to\infty} S_2(\varrho) = 0{,}5$$

$$\lim_{L\to\infty} \frac{I_1(L)}{LI_0(L)} = 0,$$

$$\lim_{L\to\infty} \frac{L\nu_l}{\nu_l^2+L^2} = \lim_{L\to\infty} \frac{\nu_l^2}{\nu_l^2+L^2} = 0,$$

$$\lim_{L\to\infty} \frac{2L^2}{\mu_k^2(\mu_k^2+L^2)} = \frac{2}{\mu_k^2}$$

i w efekcie

$$\sigma_{rr}^{gr} = \lim_{L\to\infty} \sigma_{rr} = 4c^2\gamma T_0 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\varrho} J_1(\varrho\mu_k) - J_1(\mu_k)\right] \frac{\exp(-\mathrm{Fo}\,\mu_k^2)}{\mu_k^2 J_1(\mu_k)}, \tag{12}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{gr} = \lim_{L\to\infty} \sigma_{\varphi\varphi} = 4c^2\gamma T_0 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\mu_k J_0(\varrho\mu_k) - J_1(\mu_k) - \frac{1}{\varrho} J_1(\varrho\mu_k)\right] \frac{\exp(-\mathrm{Fo}\,\mu_k^2)}{\mu_k^2 J_1(\mu_k)}. \tag{13}$$

Związki (12) i (13) są zgodne z wynikami cytowanymi w [1, 2].

Liczba L osiąga dla metali na ogół bardzo duże wartości, ze względu na fakt, że $c_1 \sim$ $\sim 10^5$ cm/s oraz $\varkappa \sim 10^{-1}$ cm²/s. Zatem $L \sim 10^6\, a$, wobec czego dla niezbyt małych a wpływ członów zawierających L w mianowniku w związkach (10) i (11) na wartość naprężeń $\sigma_{rr}(\varrho, \mathrm{Fo})$, $\sigma_{\varphi\varphi}(\varrho, \mathrm{Fo})$ jest znikomy. W tym stanie rzeczy graniczne wartości naprężeń podane we wzorach (12) i (13) są ich bardzo dobrym przybliżeniem.

Wpływ zmiany temperatury w czasie na zmiany naprężeń, wyrażający się funkcjami zależnymi od L, może wystąpić tylko wtedy, gdy L osiągnie wartości zbliżone do jedności. Jest to możliwe do osiągnięcia wtedy, gdy promień a walca jest dużo mniejszy od jedności lub współczynnik przewodzenia temperatury $\varkappa$ dużo większy od jedności.

Mając na uwadze rząd wielkości liczby L można, dla rozpatrywanego przypadku (metale), skorzystać ze wzorów przybliżonych dla zmodyfikowanych funkcji Bessela dużego argumentu:

$$I_n(L) = \frac{e^L}{\sqrt{2\pi L}}\left[1+O\left(\frac{1}{L}\right)\right].$$

Wówczas

$$\frac{I_1(L)}{LI_0(L)} \approx \frac{1}{L}.$$

Funkcje Bessela, zawierające w argumencie liczbę L^{-1} można zastąpić pierwszym wyrazem ich rozwinięcia w szeregi potęgowe. Mamy stąd

$$S_1(\varrho) \approx S_2(\varrho) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{L}.$$

Ponadto pomijając wyrazy zawierające w mianowniku L^2 możemy napisać związki (10) i (11) w postaci przybliżonej:

$$(14)\qquad \left.\begin{matrix}\sigma_{rr}\\ \sigma_{\varphi\varphi}\end{matrix}\right\} = \begin{Bmatrix}\sigma_{rr}^{gr}\\ \sigma_{\varphi\varphi}^{gr}\end{Bmatrix} + c^2\gamma T_0 \sum_{l=1}^{\infty} \begin{Bmatrix}\beta_l(\varrho)\\ \hat{\beta}_l(\varrho)\end{Bmatrix} \sin(L\,\mathrm{Fo}\,\nu_l)\frac{L\nu_l}{\nu_l^2+L^2}\left(4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k^2-L^2}{\mu_k^4+L^2\nu_l^2}-\frac{1}{c^2}\right).$$

Dla liczb Fouriera $\mathrm{Fo} > 3$ mamy $\exp(-\mathrm{Fo}\mu_k^2) \ll 10^{-6}$ i wartości σ_{rr}^{gr} i $\sigma_{\varphi\varphi}^{gr}$ można w związku (14) pominąć. Zatem pozostaną wyrażenia

$$(15)\qquad \left.\begin{matrix}\sigma_{rr}^{res}\\ \sigma_{\varphi\varphi}^{res}\end{matrix}\right\} = c^2\gamma T_0 \sum_{l=1}^{\infty} \begin{Bmatrix}\beta_l(\varrho)\\ \hat{\beta}_l(\varrho)\end{Bmatrix} \sin(L\,\mathrm{Fo}\,\nu_l)\frac{L\nu_l}{\nu_l^2+L^2}\left(4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k^2-L^2}{\mu_k^4+L^2\nu_l^2}-\frac{1}{c^2}\right).$$

Wynika stąd, że po wyrównaniu się temperatury wewnątrz walca pozostaną pewne naprężenia resztkowe σ_{rr}^{res} i $\sigma_{\varphi\varphi}^{res}$. Naprężenia te nie będą znikały z upływem czasu, gdyż — rozbijając sumę znajdującą się po prawej stronie związku (15) na sumę skończoną od $l = 1$ do $l = L_0$ oraz sumę nieskończoną od $l = L_0 + 1$ i dobierając odpowiednio L_0 — można wyróżnić w obu naprężeniach człon mający własności bardzo zbliżone do własności funkcji okresowej.

Uwaga powyższa wynika z postaci równania

$$(16)\qquad J_0(\nu) - \frac{2c^2}{\nu}J_1(\nu) = 0,$$

którego pierwiastkami są wielkości ν_l, znajdujące się w argumencie sinusa, stojącego pod rozważaną sumą. Dla dużych wartości ν, pierwiastki równania (16) można dobrze przybliżyć pierwiastkami równania

$$(17)\qquad \frac{\nu}{2c^2} = \operatorname{tg}\left(\nu - \frac{\pi}{4}\right),$$

którego postać można otrzymać, zastępując funkcje $J_0(\nu)$ i $J_1(\nu)$ odpowiednimi wzorami asymptotycznymi [6]. Pierwiastki równania (17) są postaci

$$\nu_l = \pi l + \frac{3\pi}{4} - \varepsilon_l,$$

gdzie $\lim\limits_{l\to\infty}\varepsilon_l = 0, \quad 0 < \varepsilon_l < \frac{1}{l}.$

Jeśli teraz w związku (15) oznaczyć $\Omega_l = L\nu_l$, to łatwo można zauważyć, że dla l większych od odpowiednio dużego L_0

$$\Omega_l = \frac{4l+3}{4}\pi L - \varepsilon_l L.$$

Zatem, aby wspomniana suma nieskończona opisywała funkcję mającą własności zbliżone do własności funkcji okresowej, trzeba przyjąć $L_0 \gg L$.

Naprężenia σ_{rr} i $\sigma_{\varphi\varphi}$, dane związkami (10) i (11) są funkcjami dwóch bezwymiarowych zmiennych: $\varrho = r/a$ i $\mathrm{Fo} = \dfrac{\varkappa t}{a^2}$, oraz dwóch liczb bezwymiarowych, stałych dla danego jednorodnego walca: $c^2 = \dfrac{\mu}{\lambda+2\mu}$ oraz $L = \dfrac{ac_1}{\varkappa}$. Wielkości te utworzone są przez siedem parametrów: $r, t, \lambda, \mu, \varkappa, \varrho_0$ oraz a; stanowią one podstawę wielkości bezwymiarowych określających rozpatrywane zjawisko [7] s. 58 – 59. Zatem warunki stałości tych czterech bezwymiarowych parametrów stanowią dla rozważanego problemu termosprężystości kryteria podobieństwa [7]. Widoczne jest, że np. stałość liczb c i L przy różnych kombinacjach parametrów $\lambda, \mu, a, \varkappa$ i ϱ_0 może spowodować jedynie zmianę skali czasu.

Otrzymane postaci naprężeń stanowią zatem wygodne narzędzie do badań modelowych.

Literatura cytowana w tekście

1. H. PARKUS, *Instationäre Wärmespannungen*, Springer-Verlag Wien, 1959; tłum. ros. Moskwa 1963.
2. S. TIMOSHENKO, J. N. GOODIER, *Teoria sprężystości*, Arkady, Warszawa 1962.
3. T. MURA, *Dynamical thermal stress due to thermal shocks*, Res. Rep. Fac. of Engng., Meiji Univ., **8** (1956).
4. W. DERSKI, *A dynamic problem of thermoelasticity concerning a thin circular plate*, Arch. Mech. Stos., 2, **13** (1961).
5. S. WOELKE, *Naprężenia dynamiczne w cienkiej tarczy kołowej wywołane działaniem nieustalonych źródeł ciepła*, Rozpr. Inż., 3, **17** (1969).
6. G. N. WATSON, *Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, Cambridge 1962.
7. L. I. SIEDOW, *Analiza wymiarowa i teoria podobieństwa w mechanice*, WNT, Warszawa 1968.

Резюме

ТЕПЛОВЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В КРУГЛОМ ЦИЛИНДРЕ ВЫЗВАННЫЕ ВНЕЗАПНЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ ТЕМПЕРАТУРЫ НА ЕГО КРАЮ

В работе представлены функции, описывающие тепловые напряжения в круглом цилиндре, с учетом инерциальных эффектов, вытекающие из изменения температуры по времени. Эти функции представлены при помощи безразмерных координат и безразмерных параметров, содержащих материальные константы. Анализ результатов показал, в частности, что после выравнивания температуры в цилиндре остаются небольшие напряжения.

S u m m a r y

DYNAMICAL THERMAL STRESSES IN A CIRCULAR CYLINDER DUE TO SUDDEN CHANGE OF TEMPERATURE ON ITS SURFACE

The paper presents the functions describing thermal stresses in a long circular cylinder in the case when its surface undergoes a sudden change of temperature due to heating it to a uniform temperature T_0. These functions are found from a differential equation of this problem, the inertia effects being taken into account. The stresses are given in terms of dimensionless variables and dimensionless numbers determined by the mechanical and thermal properties of material. The analysis of the results shows that thermal stresses do not vanish when the time tends to infinity.

INSTYTUT MECHANIKI TECHNICZNEJ
POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Praca zostala złożona w Redakcji dnia 14 lipca 1975 r.