

NUMERYCZNE ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA STATECZNOŚCI ORTOTROPOWEJ PŁYTY PIERŚCIENIOWEJ^{*)}

ANDRZEJ STRZELCZYK, STANISŁAW WOJCIECH (BIELSKO-BIAŁA)

1. Wstęp

Problem stateczności płyt pierścieniowych obciążonych osiowo-symetrycznie siłami działającymi w płaszczyźnie środkowej płyty, nie posiada rozwiązania ogólnego, mimo, że wielu autorów podaje rozwiązania szczególne tego zagadnienia.

Zagadnienie stateczności izotropowych płyt pierścieniowych omawia się w pracach [3, 4, 6, 7, 11]. W pracach [3, 4, 11], podano ściśle rozwiązania następujących przypadków:

praca [3] — płyta utwierdzona i obciążona tylko wzdłuż brzegu zewnętrznego. W rozwiązaniu zakłada się, że powierzchnia środkowa płyty jest osiowo-symetryczna;

praca [4] — płyta obciążona w taki sposób, że naprężenia radialne σ_r i obwodowe σ_θ są równe:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \left(\frac{r_w}{r}\right)^2 \cdot p_0,$$

gdzie r_w — promień wewnętrzny pierścienia, r — współrzędna promieniowa, p_0 — parametr obciążenia;

praca [11] — płyta obciążona takim samym ciśnieniem na brzegu zewnętrznym i wewnętrznym płyty.

ROZSA, [7], podał przybliżone rozwiązanie zagadnienia dla płyty utwierdzonej i ściskanej wzdłuż brzegu zewnętrznego oraz dla płyty utwierdzonej i ściskanej wzdłuż brzegu wewnętrznego. W pracy [6] otrzymano rozwiązanie numeryczne dla niektórych sposobów podparcia przy założeniu, że powierzchnia środkowa płyty po wyboczeniu jest osiowo-symetryczna.

Zagadnienie stateczności płyt ortotropowych rozważa się w pracach [1, 5, 8, 10], przy czym uzyskane dla poszczególnych przypadków podparcia i obciążenia rozwiązania przybliżone, zakładają przeważnie osiowo-symetryczną postać wyboczenia (prace [1, 5, 10]). W pracy [8] przedstawiono przybliżone rozwiązanie zagadnienia dla płyt wzdłuż obu krawędzi swobodnie podpartych, bądź utwierdzonych.

^{*)} Praca nagrodzona na konkursie na prace teoretyczne z mechaniki, zorganizowanym przez Oddział PTMTS w Łodzi w 1975 r.

2. Cel pracy

Celem pracy jest przedstawienie przybliżonego rozwiązania zagadnienia obliczania najmniejszych wartości obciążeń krytycznych dla płyt pierścieniowych, cylindrycznie ortotropowych, obciążonych równomiernie siłami promieniowymi w płaszczyźnie środkowej płyty. Rozwiązanie otrzymane metodą energetyczną Rayleigha-Ritza, obejmuje dwanaście sposobów podparcia płyty, przy dowolnym stosunku ciśnień działających na krawędź wewnętrzną i zewnętrzną płyty. Podano sposób przybliżonego określenia liczby średnic węzłowych, dla której wartość obciążenia krytycznego jest najmniejsza. Przedstawione na wykresach i tablicach wyniki obliczeń mogą być wykorzystane w obliczeniach inżynierskich.

3. Obliczenie całkowitej energii potencjalnej płyty

Całkowitą energię potencjalną płyty oblicza się według wzoru

$$(3.1) \quad V = V_n + V_\theta,$$

gdzie V_n — energia potencjalna sił zewnętrznych, V_θ — energia potencjalna płyty spowodowana zginaniem płyty.

Wielkości V_n i V_θ wyrażają się wzorami:

$$(3.2) \quad V_n = \frac{1}{2} \int_{r_w}^{r_z} \int_0^{2\pi} \left[N_r \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + N_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] r d\theta dr,$$

$$(3.3) \quad V_\theta = \frac{1}{2} \int_{r_w}^{r_z} \int_0^{2\pi} \left[M_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + M_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + 2M_{r\theta} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{w}{r} \right) \right] r d\theta dr,$$

gdzie M_r , M_θ oznaczają odpowiednio promieniowy i obwodowy moment zginający, $M_{r\theta}$ — moment skręcający, w — ugięcie płyty, r_w , r_z — promień zewnętrzny i wewnętrzny płyty, N_r , N_θ — jednostkowe siły normalne w płaszczyźnie środkowej płyty w kierunku promieniowym i obwodowym.

Momenty M_r , M_θ , $M_{r\theta}$, występujące w (3.3), można obliczyć ze wzorów:

$$(3.4) \quad M_r = -D_r \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right],$$

$$(3.5) \quad M_\theta = -D_\theta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right],$$

$$(3.6) \quad M_{r\theta} = -2D_k \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{w}{r} \right),$$

gdzie

$$D_r = \frac{E_r h^3}{12(1 - \nu_r \nu_\theta)},$$

$$D_\theta = \frac{E_\theta h^3}{12(1-\nu_r\nu_\theta)},$$

$$D_k = \frac{Gh^3}{12},$$

ν_r, ν_θ — stałe Poissona, E_r, E_θ — moduły sprężystości w kierunku promieniowym i obwodowym, G — moduł sprężystości poprzecznej, h — grubość płyty.

Siły błonowe N_r, N_θ występujące w (3.2) można obliczyć ze wzorów podanych w pracy [2]:

$$(3.7) \quad N_r = h \left[\frac{p_w \cdot \varrho_w^{k_1+1} - p_z}{1 - \varrho_w^{2k_1}} \varrho^{k_1-1} - \frac{p_w - p_z \varrho_w^{k_1-1}}{1 - \varrho_w^{2k_1}} \varrho_w^{k_1-1} \varrho^{-k_1-1} \right],$$

$$(3.8) \quad N_\theta = k_1 h \left[\frac{p_w \varrho_w^{k_1+1} - p_z}{1 - \varrho_w^{2k_1}} \varrho^{k_1-1} + \frac{p_w - p_z \varrho_w^{k_1-1}}{1 - \varrho_w^{2k_1}} \varrho_w^{k_1-1} \varrho^{-k_1-1} \right],$$

gdzie p_w, p_z oznaczają ciśnienia działające odpowiednio wzdłuż obwodu zewnętrznego i wewnętrznego płyty, $\varrho_w = \frac{r_w}{r_z}$ — bezwymiarowa wartość promienia wewnętrznego

płyty, $k_1^2 = \frac{E_\theta}{E_r}$ — współczynnik ortotropii.

Po podstawieniu (3.7), (3.8), do wzoru (3.2) i (3.4), (3.5), (3.6) do wzoru (3.3) zgodnie ze wzorem (3.1), otrzymuje się:

$$(3.9) \quad V = \frac{D_r}{2} \int_{\varrho_w}^1 \int_0^{2\pi} \left\{ \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2} + \nu_\theta \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial w}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2} + \right. \\ \left. + k^2 \left[\nu_r \frac{\partial^2 w}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial w}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] + (l^2 - \nu_\theta) \left[\frac{\partial^2}{\partial \varrho \partial \theta} \left(\frac{w}{\varrho} \right) \right]^2 + \right. \\ \left. - p^* \left[\left(F_1 \varrho^{k_1-1} + F_2 \varrho^{-k_1-1} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial \varrho} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + k_1 \left(F_1 \varrho^{k_1-1} - F_2 \varrho^{-k_1-1} \right) \cdot \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] \right\} \varrho d\theta d\varrho,$$

gdzie: $\varrho = \frac{r}{r_z}$ — promień bezwymiarowy

k^2, l^2 — współczynniki ortotropii określone wzorami:

$$k^2 = \frac{D_\theta}{D_r}, \quad l^2 = \frac{2D_k}{D_r} + \nu_\theta,$$

$p^* = \frac{p_w h r_z^2}{D_r}$ — bezwymiarowa wartość obciążenia krytycznego,

$$F_1 = \frac{\varrho_w^{k_1+1} - \alpha}{1 - \varrho_w^{k_1+1}}, \quad F_2 = \frac{1 - \alpha \varrho_w^{k_1-1}}{\varrho_w^{2k_1} - 1} \cdot \varrho_w^{k_1+1}, \quad \alpha = \frac{p_w}{p_z}.$$

4. Określenie wartości obciążenia krytycznego

Najmniejszą wartość obciążenia krytycznego wyznaczono metodą Rayleigha–Ritza. Założono, że funkcja w określająca ugięcie płyty ma postać:

$$(4.1) \quad w = W \cdot \cos m\theta,$$

gdzie W jest funkcją jednej zmiennej ϱ , a m liczbą średnic węzłowych. Przypadek $m = 0$ odpowiada osiowosymetrycznej postaci wybożenia.

Następnie przyjęto, że:

$$(4.2) \quad W = W(\varrho) = \sum_{i=1}^{i=n} f_i \eta_i(\varrho),$$

gdzie f_i są współczynnikami, a $\eta_i(\varrho)$ są funkcjami współrzędnej ϱ .

Ponadto, założono, że $\eta_i(\varrho)$ są postaci:

$$(4.3) \quad \eta_i(\varrho) = \sum_{j=1}^{j=t} a_{i,j} \cdot \varrho^{i+j-1},$$

przy czym t = liczba geometrycznych warunków brzegowych płyty, $a_{i,j}$ — współczynniki, których wartość zależy od sposobu podparcia płyty.

Poszukiwaną wartość obciążenia krytycznego wyznaczono z warunków, że całkowita energia potencjalna płyty w stanie równowagi jest minimalna, tzn.:

$$(4.4) \quad \frac{\partial v}{\partial f_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Po uwzględnieniu w (4.4) zależności (4.3), (4.2), (4.1), (3.9) i po dokonaniu odpowiednich przekształceń, równania (4.4) przyjmują postać:

$$(4.5) \quad \sum_{j=1}^{j=n} (y_{i,j} - p^* x_{i,j}) f_j = 0, \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie

$$\begin{aligned} y_{i,j} = & \int_{\rho_w}^1 \sum_{p=0}^t \sum_{q=0}^t \{ [(i+p-1)(i+p+v_0-2) - v_0 m^2] (j+q-2)(j+q-1) + \\ & + [(i+p-1)(i+p-2)v_0 + (i+p-1)k^2 - k^2 m^2] (j+q-1-m^2) + [(j+q-1) \times \\ & \times (j+q+v_0-2) - v_0 m^2] (i+p-1)(i+p-2) + [(j+q-1)(j+q-2)v_0 + \\ & + (j+q-1)k^2 - k^2 m^2] (i+p-1-m^2) + 4(l^2 - v_0)m^2(i+p-2)(j+q-2) \} \times \\ & \times a_{i,p} a_{j,q} \varrho^{i+j+p+q-5} d\varrho, \\ x_{i,j} = & 2 \int_{\rho_w}^1 \sum_{p=0}^t \sum_{q=0}^t [(F_1 \varrho^{k_1} + F_2 \varrho^{-k_1})(i+p-1)(j+q-1) + \\ & + k_1^2 m^2 (F_1 \varrho^{k_1} - F_2 \varrho^{-k_1})] a_{i,p} a_{j,q} \varrho^{i+j+p+q-4} d\varrho. \end{aligned}$$

Warunkiem koniecznym istnienia niezerowego rozwiązania układu równań liniowych (4.5) jest spełnienie równania



$$(4.6) \quad \det(\mathbf{Y} - p^* \mathbf{X}) = 0,$$

gdzie $\mathbf{X} = (x_{i,j})$, $\mathbf{Y} = (y_{i,j})$ — macierze kwadratowe stopnia n .

Tablica 1. Zestawienie geometrycznych warunków brzegowych w zależności od sposobu podparcia płyty

Nr przypadku	Sposób podparcia płyty	Liczba warunków t	Numery warunków
I		4	1, 2, 3, 4
II		3	1, 2, 4
III		2	2, 4
IV		3	2, 3, 4
V		3	1, 2, 3
VI		2	1, 2
VII		1	2
VIII		2	2, 3
IX		2	1, 3
X		1	1
XI		3	1, 3, 4
XII		2	1, 4

Tablica 2. Porównanie wartości p^* z wynikami

n	Schemat stat.						
		$q_w = 0,1$	$q_w = 0,3$	$q_w = 0,5$	$q_w = 0,1$	$q_w = 0,3$	$q_w = 0,5$
1		132,00	27,000	25,6366	126,111	16,254	6,5361
2		120,28	26,670	25,566	108,740	13,613	5,5109
3		118,13	26,601	25,099	101,957	13,135	5,4403
4		117,77	26,501	25,029	100,324	13,127	5,4397
5		117,72	26,498	25,025	99,844	13,126	5,4396
6		117,708	26,497	25,025	99,710	13,126	5,4396
	Wynik wg [6]	117,71	26,496	25,026	99,659	13,126	5,440

Ostatecznie problem wyznaczania obciążeń krytycznych, zgodnie z (4.6), sprowadził się do uogólnionego zagadnienia wartości własnych macierzy, które można efektywnie rozwiązać numerycznie za pomocą elektronicznej maszyny cyfrowej.

5. Określenie wartości współczynników $a_{i,j}$

Funkcje współrzędnych $\eta_i(\varrho)$, występujące we wzorze na funkcję ugięcia W , powinny spełniać odpowiednie geometryczne warunki brzegowe płyty.

Warunki te mogą mieć jedną z następujących postaci:

$$1^\circ \quad \eta_i(\varrho_w) = \sum_{j=0}^i a_{i,j} \varrho_w^{i+j-1} = 0,$$

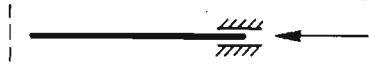
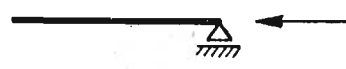
$$2^\circ \quad \eta_i(1) = \sum_{j=0}^i a_{i,j} = 0,$$

$$3^\circ \quad \frac{d\eta_i(\varrho_w)}{d\varrho} = \sum_{j=0}^i a_{i,j} (i+j-1) \varrho_w^{i+j-2} = 0,$$

$$4^\circ \quad \frac{d\eta_i(1)}{d\varrho} = \sum_{j=0}^i a_{i,j} (i+j-1) = 0.$$

W tablicy 1 podano zestawienie rozpatrywanych przypadków podparcia płyty i przyporządkowanie im ograniczenia na funkcje współrzędnych. Przy założeniu, że $a_{i,i} = 1$ wartości współczynników dla $i = 1, 2, \dots, n$, oraz $j = 0, 1, \dots, i-1$ wyznacza się rozwiązując n układów równań liniowych o i niewiadomych.

otrzymanymi w pracy [6] ($k^2 = k_1^2 = 1, l^2 = 1, \nu_0 = 1/3$)

					
$q_w = 0,1$	$q_w = 0,3$	$q_w = 0,5$	$q_w = 0,1$	$q_w = 0,3$	$q_w = 0,5$
17,542	16,201	29,97	4,83	3,161	2,5772
14,202	14,809	25,52	4,37	3,157	2,4865
14,19	14,801	25,50	4,14	3,157	2,4818
13,92	14,700	25,385	4,08	3,107	2,4687
13,87	14,692	25,384	4,05	3,099	2,4661
13,858	14,691	25,382	4,048	3,097	2,4660
13,848	14,69	25,385	4,043	3,098	2,468

6. Określenie liczby średnic węzłowych

Dla określenia liczby średnic węzłowych m , której odpowiada najmniejsza wartość obciążenia krytycznego p^* , zastosowano metodę przybliżoną, podaną w pracy [8]. Zgodnie z [8], problem sprowadza się do rozwiązania równania kwadratowego

$$(6.1) \quad az^2 + bz + c = 0,$$

gdzie $z = m^2$.

Dla przyjętej postaci funkcji współrzędnych współczynniki a, b, c są równe:

$$a = X_2 Y_4,$$

$$b = 2 \cdot X_0 Y_4,$$

$$c = X_0 Y_2 - X_2 Y_0,$$

gdzie: $X_0 = \int_0^1 \sum_{i=0}^t \sum_{j=0}^t (F_1 q^{k_1} + F_2 q^{-k_1}) i j a_{1,i} a_{1,j} q^{i+j-2} dq,$

$$X_2 = \int_0^1 \sum_{i=0}^t \sum_{j=0}^t (F_1 q^{k_1} - F_2 q^{-k_1}) a_{1,i} a_{1,j} q^{i+j-2} dq,$$

$$Y_0 = \int_0^1 \sum_{i=0}^t \sum_{j=0}^t \{ij [(i-1) + \nu] (j-1) + k^2 + \nu (i-1)\} a_{1,i} a_{1,j} q^{i+j-3} dq,$$

$$Y_2 = \int_0^1 \sum_{i=0}^t \sum_{j=0}^t \{ \nu j (j-1) + k^2 j + i [k^2 + \nu (i-1)] + 2(\nu - l^2) (i-1) (j-1) \} a_{1,i} a_{1,j} q^{i+j-3} dq,$$

$$Y_4 = \int_{p_w}^1 \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^l a_{1,i} a_{1,j} \rho^{i+j-3} d\rho, \quad v = v_0$$

Jako m przyjmuje się:

(6.2) $m = \begin{cases} 0 & \text{jeśli równanie (6.1) ma pierwiastki zespolone lub rzeczywiste i równo-} \\ & \text{cześnie oba ujemne, entier } (\sqrt{\max(z_1, z_2)}), \text{ w przypadkach pozostałych,} \\ & \text{gdzie } z_1, z_2 \text{ są pierwiastkami równania (6.1).} \end{cases}$

7. Opis algorytmu obliczeń

Celem wykonania obliczeń numerycznych opracowano program w języku ALGOL 1900. W programie można wyodrębnić następujące zasadnicze fazy:

1. Wyznaczanie współczynników $a_{i,j}$. Układy równań rozwiązuje się metodą Gaussa-Jordana.
2. Określenie liczby m — według wzorów podanych w punkcie 6.
3. Obliczanie elementów macierzy X i Y .
4. Obliczanie wartości własnych równania (4.6) w tym:
 - A. obliczanie macierzy odwrotnej do X metodą rozszerzania,
 - B. obliczanie współczynników wielomianu charakterystycznego macierzy $Z = YX$ metodą Danilewskiego,
 - C. obliczanie zer wielomianu charakterystycznego metodą Bairstowa.

Obliczenia zrealizowano na maszynie ODRA 1305 z pojedynczą precyzją (liczby pamiętane z dokładnością do 11 cyfr znaczących).

8. Analiza wyników obliczeń

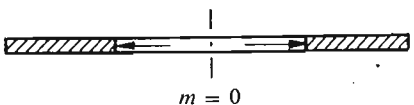
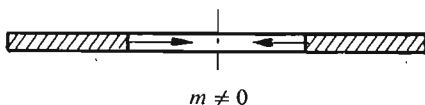
Wyniki obliczeń dla przypadków płyty obciążonej wzdłuż brzegu wewnętrznego podano w tablicach 3–5, a dla pozostałych przypadków obciążenia na rys. 1–12. Liczby nad krzywymi oznaczają liczbę średnic węzłowych, dla których krytyczna wartość obciążenia jest najmniejsza. Obliczenia prowadzono dla płyt obciążonych:

- a) ciśnieniem działającym tylko na brzeg wewnętrzny płyty, tablice (3–5),
- b) ciśnieniem ujemnym działającym tylko na wewnętrzny brzeg płyty, tablice (3–5),
- c) jednakowym ciśnieniem działającym na obu krawędziach płyty tzn. $p_z = p_w$, (rys. 1–6),

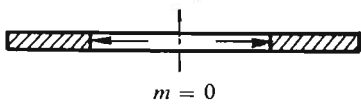
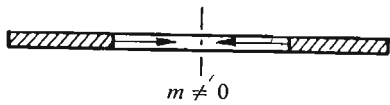
d) ciśnieniem działającym na obu krawędziach płyty, przy czym $\frac{p_z}{p_w} = 1000$, co praktycznie odpowiada obciążeniu ciśnieniem działającym tylko na zewnętrznym brzegu płyty (rys. 7–12).

W każdym z podanych wyżej sposobów obciążenia płyty, obliczenia prowadzono dla dwunastu schematów podparcia płyty (patrz tablica 1). Dla każdego sposobu obciążenia i podparcia płyty obliczono wartość siły krytycznej dla:

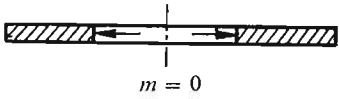
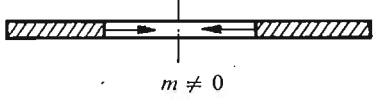
Tablica 3. Wartości bezwymiarowego obciążenia krytycznego $p^* = \frac{p_0 h r^2}{D_r}$

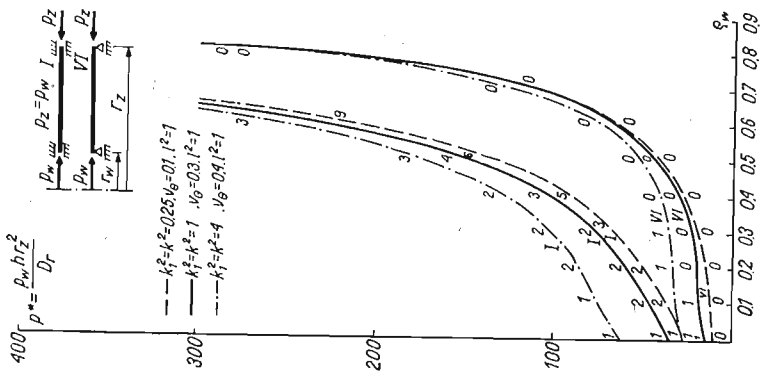
Sposób obciąż.													
		liczba m wszędzie równa 0						liczbę m podano pod wartością p*					
Nr przyp.	k	0,21	0,31	0,41	0,51	0,61	0,71	0,21	0,31	0,41	0,51	0,61	0,71
		I	0,5	348	338	377	479	673	1105	356 5	256 7	215 9	201 11
1,0	421		375	401	487	686	1124	666 4	448 5	364 6	329 8	331 11	365 15
2,0	738		530	501	560	740	1160	1796 3	1054 4	777 5	662 6	628 8	669 11
II	0,5	132	128	145	182	258	430	316 5	224 6	188 7	173 10	177 14	198 19
	1,0	149	135	148	183	258	426	585 4	391 5	305 6	282 8	274 10	298 13
	2,0	263	191	182	206	273	441	1468 3	899 4	660 4	552 6	528 8	542 10
III	0,5	25,3	20,9	21,3	25,0	33,6	53,4	110 2	746 3	60,6 4	56,6 6	54,2 7	59,2 10
	1,0	39,5	26,7	23,9	26,0	33,5	52,4	154 1	100 2	87,4 3	79,9 3	77,9 5	80,2 6
	2,0	143	71,7	48,6	41,4	43,9	59,7	185 1	175 2	137 2	139 3	142 3	162 6
IV	0,5	102	93,9	102	124	162	282	113 2	75,0 3	60,6 4	54,9 5	54,9 7	61,0 10
	1,0	143	115	114	132	179	282	155 1	101 2	85,6 3	83,4 4	83,5 5	93,1 7
	2,0	378	218	173	170	205	307	184 1	179 1	138 2	142 3	148 4	165 5

Tablica 4. Wartości bezwymiarowego obciążenia krytycznego $p^* = \frac{p_w h r_z^2}{D_r}$

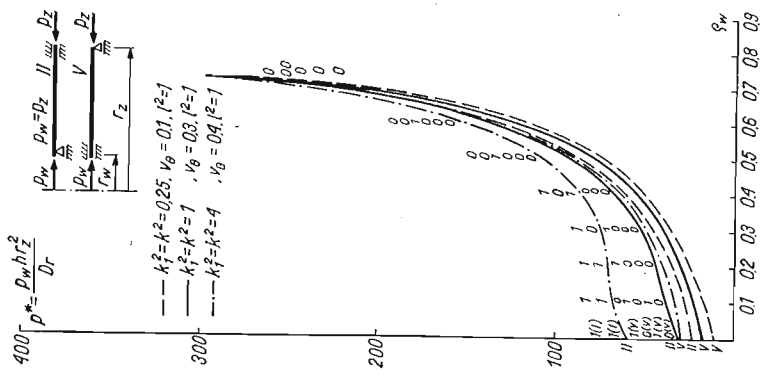
Sposób obciąż.													
		liczba m wszędzie równa 0						liczbę m podano pod wartością p^*					
Nr przyp.	$\frac{q_w}{k}$	0,21	0,31	0,41	0,51	0,61	0,71	0,21	0,31	0,41	0,51	0,61	0,71
		V	0,5	249	239	266	333	473	779	297 5	217 6	178 7	166 9
1,0	317		275	290	348	482	794	561 4	371 5	294 4	261 7	259 9	287 13
2,0	614		423	375	411	528	836	1608 3	931 4	638 4	515 5	485 7	521 10
VI	0,5	85,7	81,5	91,0	113	160	257	254 4	180 5	151 7	138 8	140 11	156 15
	1,0	104	90,1	95,7	116	161	267	465 3	302 4	239 5	212 6	207 8	225 11
	2,0	218	145	129	140	178	273	1336 3	740 3	518 4	425 5	386 7	393 8
VII	0,5	6,22	3,27	2,06	1,44	1,08	0,840	80,4 2	52,2 2	41,5 3	36,4 3	35,1 4	37,3 6
	1,0	25,7	12,8	7,84	5,42	4,02	3,13	95,7 2	73,8 1	54,8 2	49,7 2	45,8 3	46,7 4
	2,0	138	63,4	36,7	24,2	17,5	13,4	138 2	105 1	103 2	85,7 2	88,0 3	85,7 3
VIII	0,5	43,8	39,2	41,9	50,9	70,3	115	93,5 1	52,5 2	41,4 3	35,7 4	36,2 5	39,7 7
	1,0	88,4	63,3	58,0	63,2	80,7	124	95,3 1	77,4 1	55,5 2	49,0 3	52,3 4	55,7 5
	2,0	340	173	120	103	110	147	140 1	105 1	103 2	85,5 2	75,8 3	97,3 4

Tablica 5. Wartości bezwymiarowego obciążenia krytycznego $p^* = \frac{p_w h r_z^2}{D_r}$

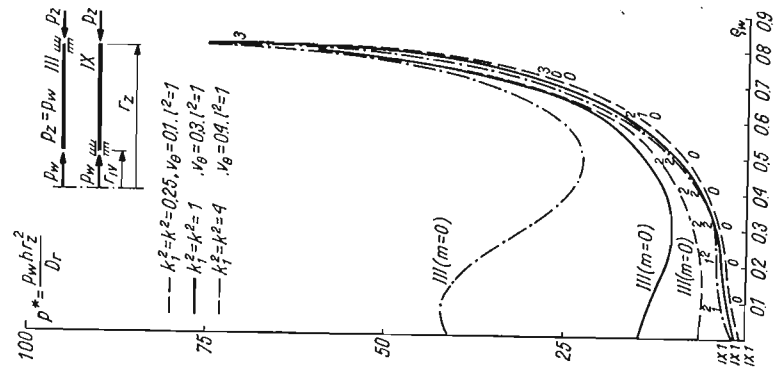
Sposób obciąż.	 $m = 0$							 $m \neq 0$								
	Nr przyp.	$\frac{q_w}{k}$	liczba m wszędzie równa 0							liczbę m podano pod wartością p^*						
			0,21	0,31	0,41	0,51	0,61	0,71	0,21	0,31	0,41	0,51	0,61	0,71		
IX	,5	43,8	39,2	41,9	50,9	70,2	115	71,6 4	46,3 4	40,1 4	39,7 6	42,4 8	47,7 10			
	1,0	88,5	63,2	58,0	63,2	80,5	124	126 3	69,3 3	55,3 3	51,3 4	57,1 6	64,1 7			
	2,0	340	173	118	104	110	148	328 2	168 2	128 3	92,7 3	90,0 4	96,1 5			
X	,5	6,25	3,27	2,06	1,44	1,08	,840	43,4 2	31,7 3	26,7 3	25,5 4	26,4 5	29,9 6			
	1,0	25,7	12,8	7,84	5,42	4,02	3,14	64,6 2	41,7 2	38,1 2	29,6 3	29,9 3	31,6 4			
	2,0	138	63,4	36,7	24,2	17,5	13,4	267 1	107 2	68,2 2	68,9 2	45,6 3	47,5 3			
XI	,5	102	93,9	102	124	170	282	84,9 3	60,2 4	50,9 5	47,9 6	49,4 8	56,5 11			
	1,0	143	115	114	133	179	274	192 3	114 3	91,4 4	82,1 5	80,1 6	89,1 8			
	2,0	378	218	173	171	206	307	673 2	383 2	215 3	179 4	155 4	161 6			
XII	,5	25,3	21,0	21,3	25,0	33,5	53,5	68,7 3	47,4 3	38,3 4	35,1 5	35,0 6	39,0 8			
	1,0	39,5	26,7	23,9	26,0	33,5	52,3	142 2	90,7 3	64,3 3	56,9	54,5	56,9			
	2,0	143	71,3	48,6	41,3	43,8	59,6	536 2	258 2	175 3	106 4	109 5	112 7			



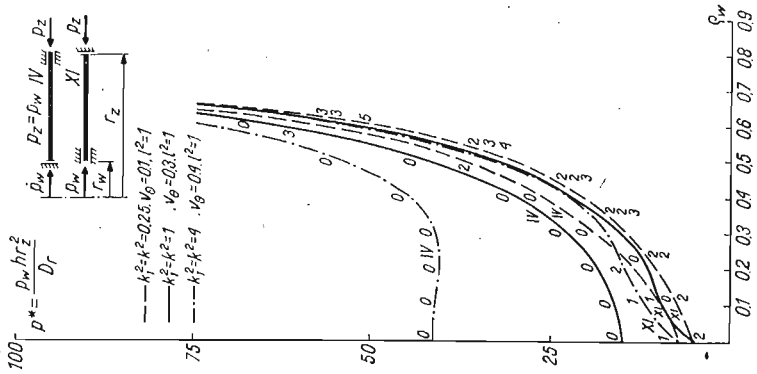
Rys. 1



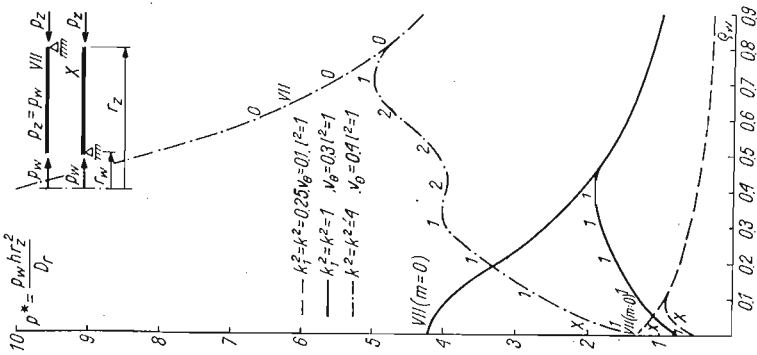
Rys. 2



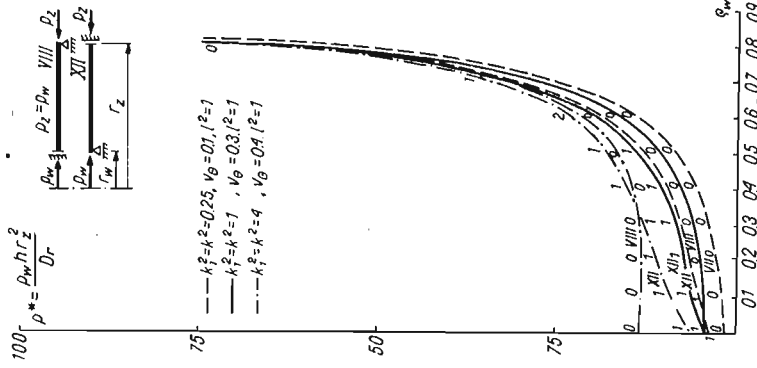
Rys. 3



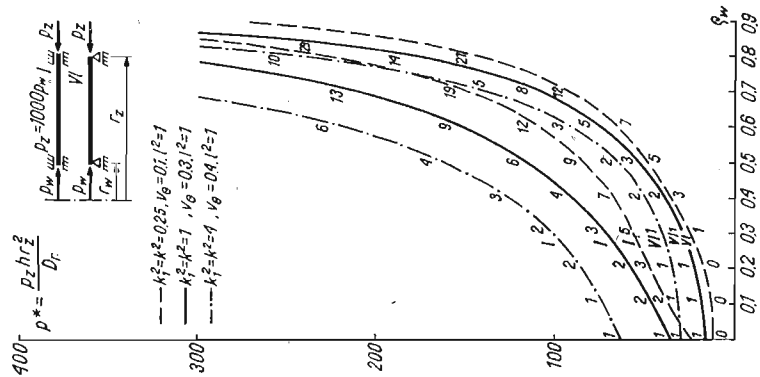
Rys. 4



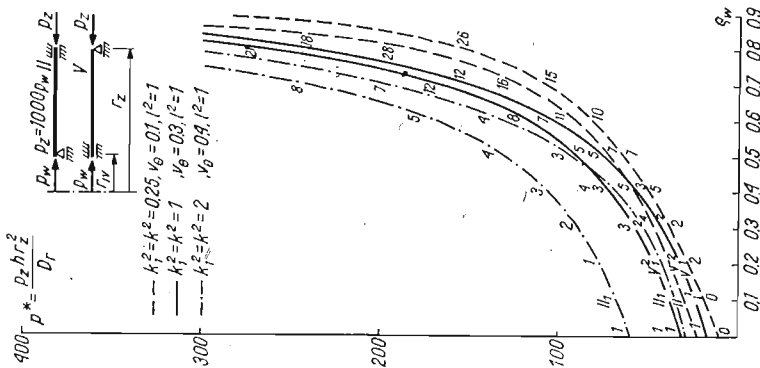
Rys. 5



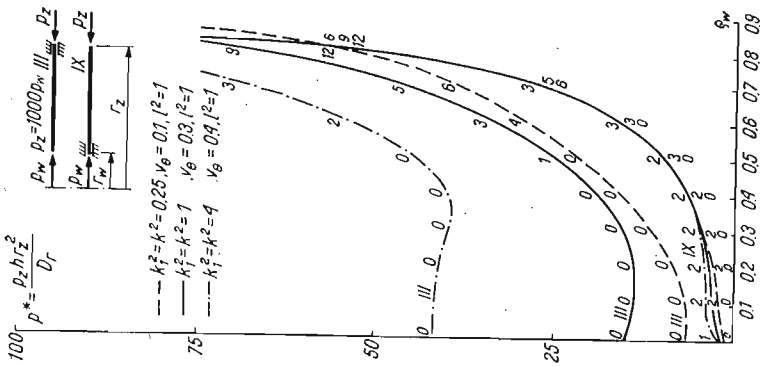
Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9

- płyty izotropowej ($k_1^2 = k^2 = 1$, $\nu_0 = 0,3$, $l^2 = 1$),
- płyty ortotropowej, wzmocnionej w kierunku promieniowym

$$(k_1^2 = k^2 = 0,25, \nu_0 = 0,1, l^2 = 1),$$

- płyty ortotropowej, wzmocnionej w kierunku obwodowym

$$(k_1^2 = k^2 = 4, \nu_0 = 0,4, l^2 = 1).$$

Wartości obciążenia krytycznego wyznaczono dla q_w zmieniającego się od 0,01 ÷ 0,91 co 0,1.

Przedstawiony w pracy sposób przybliżonego wyboru liczby średnich węzłowych m , dla której wartość obciążenia krytycznego jest najmniejsza, w niektórych przypadkach okazał się zawodny. Największe błędy w wyborze liczby m wystąpiły dla płyty obciążonej tym samym ciśnieniem działającym na obu krawędziach i podpartej według schematu V .

Na przykład dla płyty izotropowej, według wzoru (6.2) otrzymano m zmieniające się od $m = 1$, dla $q_w = 0,01$, do $m = 6$ dla $q_w = 0,91$. W rzeczywistości, najmniejszą wartość obciążenia krytycznego w tym przypadku otrzymuje się przy $m = 1$ dla $q_w = 0,01, 0,11, 0,21$ i przy $m = 0$ dla $q_w \geq 0,3$. W innych przypadkach wartość m była wybierana prawidłowo, w sporadycznych jedynie przypadkach różniła się od właściwej o jedność.

Dla opisanych wyżej przypadków niewłaściwego doboru liczby m , wartość najmniejszego obciążenia krytycznego wyznaczono metodą prób i błędów. Porównując otrzymane wyniki z wynikami podanymi w znanych pracach, należy wnioskować, że przy uwzględnieniu odpowiednio dużej liczby wyrazów szeregu funkcyjnego, przybliżającego funkcję W , można otrzymać wyniki z błędem względnym $\leq 0,1\%$ (przy pojedynczej precyzji obliczeń, w niektórych przypadkach, tylko dla $q_w \leq 0,8$). Dla otrzymania wyników z błędem nie większym niż 1% wystarcza uwzględnić 3, 4 wyrazy szeregu funkcyjnego. Najmniej dokładne wyniki otrzymano dla płyt obciążonych od wewnątrz.

W tablicy 2 przedstawiono porównanie otrzymanych wyników z wynikami zamieszczonymi w pracy [6] (rezultaty tej pracy należą do najdokładniejszych, jakie spotkano w dostępczej literaturze) dla płyty izotropowej. Badając ciąg różnic $S_n = p_n^* - p_{n-1}^*$ (p_n oznacza wartość siły krytycznej uzyskanej przy założeniu funkcji W złożonej z n wyrazów szeregu (4.2)) stwierdzono, że ciąg ten dąży do zera przez wartości dodatnie. Ciąg ten nie jest jednak ściśle malejący. Dlatego przy ocenie dokładności wyników nie można ograniczyć się do sprawdzenia wartości jednej różnicy S_n . Na przykład, dla płyty izotropowej utwierdzonej na brzegu zewnętrznym i obciążonej ciśnieniem przyłożonym na brzegu wewnętrznym płyty ($q_w = 0,5$, $\nu = 1/3$) ciąg różnic jest następujący: 0,071, 0,467, 0,070, 0,004. Gdyby w tym przypadku dokonać oceny dokładności wyników pierwszego przybliżenia, ograniczając się do pierwszej różnicy, to w rezultacie otrzyma się błędny wniosek, że błąd bezwzględny jest w granicach 0,1 wobec błędu rzeczywistego około 0,61. W większości przypadków największą poprawę wyników uzyskano w drugim przybliżeniu (w granicznych przypadkach błąd kilkuset procent zmniejszył się do kilkudziesięciu procent).

9. Uwagi końcowe

Z analizy uzyskanych wyników wynikają następujące wnioski:

A. Najmniejszą wartość obciążenia na ogół otrzymuje się przy założeniu niesymetrycznej postaci wyboczenia płyty ($m \neq 0$).

B. Rzeczywista liczba średnic węzłowych m zależy od:

- sposobu obciążenia płyty (przy ciśnieniu ujemnym działającym na wewnętrzny brzeg płyty otrzymuje się zawsze niesymetryczną postać wyboczenia),
- sposobu podparcia płyty,
- bezwymiarowej wartości wewnętrznego promienia płyty,
- wartości stałych ortotropii k_1^2 i k^2 , (z wyjątkiem przypadków IX i X, mniejszym wartościom $k_1^2 = k^2$ odpowiadają większe liczby średnic węzłowych),

C. Dla małych ϱ_w zmiana m o 1 powoduje otrzymanie wyników różniących się od prawidłowych nawet o kilkaset procent.

D. Gdy $\varrho_w \rightarrow 1$ i poprawna wartość m jest rzędu kilkudziesięciu, zmiana m o kilka jednostek nie ma większego wpływu na wynik.

E. W niektórych przypadkach przyjęcie $W = f_1 \eta_1(\varrho)$ pozwala obliczyć wartość krytyczną z wystarczającą dla celów praktycznych dokładnością. I tak dla płyty izotropowej i $\varrho_w > 0,1$ (dla płyty ortotropowej otrzymuje się podobne wyniki): błąd względny nie przekracza 10% w następujących przypadkach płyt obciążonych:

- tylko ciśnieniem wzdłuż brzegu wewnętrznego i podpartych według schematu II (tylko dla $\varrho_w \leq 0,5$), III i XII;
- ciśnieniem ujemnym wzdłuż brzegu zewnętrznego i podpartych według schematu IV, VI, VIII, X, XI, XII;
- ciśnieniem działającym tylko wzdłuż brzegu zewnętrznego i podpartych wzdłuż schematu I, IV, X, XII;
- ciśnieniem działającym z taką samą wartością na oba brzegi płyty i podpartych według schematu I, IV, VII, X, XII.

Ponieważ przy założeniu, że $W = f_1 \eta_1(\varrho)$ określenie wartości krytycznej prowadzi do prostych i stosunkowo nielicznych operacji matematycznych, można do obliczeń wykorzystać zwykły kalkulator elektroniczny.

F. Zamieszczone w pracy wykresy pozwalają nie tylko na określenie wartości obciążeń krytycznych, ale dają pewne wskazówki co do wyboru ϱ_w (szczególnie ważne dla płyt podpartych według schematu VII i X, obciążonych wzdłuż brzegu zewnętrznego), przy których płyta jest najbardziej stateczna.

G. Dla płyt konstrukcyjnie ortotropowych wzmocnionych żebrami, lepszą stateczność zapewnia wzmocnienie w kierunku promieniowym.

Zastosowana metoda obliczania obciążeń krytycznych teoretycznie zapewnia otrzymanie wyników z dowolną dokładnością. Praktycznie otrzymane rozwiązania obarczone są błędami wynikającymi z faktu, że obliczenia prowadzono z pojedynczą precyzją. Stwierdzono, że pojedyncza precyzja pozwala otrzymywać wyniki wystarczająco dokładne dla $\varrho_w \leq 0,8$. Dla $\varrho_w > 0,8$ wydaje się celowe wykonywanie obliczeń z podwójną precyzją. Dla kompletności przedstawionych wyników przy wykonaniu wykresów dla $\varrho_w = 0,8, 0,9$ i podparciu płyty według schematu nr I, wykorzystano wyniki z pracy [8].

Literatura cytowana w tekście

1. Э. Ф. Бурмистров, X. М. Маслов, *Устойчивость круглых кольцевых ортотропных пластинок*, Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений упругих тел, 3 (1967), 144 - 162.
2. С. Г. Лехницкий, *Анизотропные пластинки*, Гостехиздат, Москва 1947.
3. S. MAJUMDAR, *Buckling of a thin annular plate under uniform compression*, AIAA. Journal, 9, 9 (1971) 1701 - 1707.
4. E. H. MANSFIELD, *On the buckling of an annular plate*, Quart. Journ. Mech. and Applied Math., 13, 1 (1960) 16 - 23.
5. G. K. RAMAIAH, K. VIJAYAKUMAR, *Buckling of polar orthotropic annular plates under uniform internal pressure*, AIAA Journal, 12, 8 (1974) 1045 - 1050.
6. E. PYTEL, Z. WASZCZYŻYŃ, *Numeryczna analiza symetrycznego wyboczenia sprężystej płyty pierścieniowej na tle istniejących rozwiązań*, Czasopismo Techniczne, 76, 4 (1972) 36 - 42.
7. M. ROZSA, *Stability analysis of thin annular plates compressed along the outer or inner edge by uniformly distributed radial forces*, Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, 53 (1966) 359 - 377.
8. A. STRZELCZYK, *Wyboczenie płyt pierścieniowych cylindrycznie ortotropowych*, Arch. Bud. Maszyn, 22, 4 (1975) 437 - 449.
9. M. TROMBSKI, *Zagadnienia płyt pierścieniowych o ortotropii cylindrycznej w ujęciu nieliniowym*, Zeszyty Naukowe PŁ, nr 156, Mechanika, z. 32, Łódź 1972.
10. E. B. UNTHGENANNT, R. S. BRANT, *Buckling of orthotropic annular plates*, AIAA Journal, 8, 11 (1970) 2102 - 2104.
11. N. YAMAOKI, *Buckling of annular plate under uniform compression*, J. Appl. Mech., 25E (1958) 267 - 273.

Резюме

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОРТОТРОПИЕЙ

В работе приведено решение задачи о критических нагрузках для кольцевых пластин с цилиндрической ортотропией, нагруженных осесимметрично давлением на краях. До сих пор решения такой задачи имелись лишь для некоторых случаев нагружения и опирания пластины. Полученное приближенное решение (метод Релея-Ритца) и численные результаты относятся к пластинкам:

- нагруженным различными давлениями на внутреннем и внешнем контурах;
- имеющим 12 способов опирания;
- изотропным и ортотропным.

Приведен способ расчета числа узловых диаметров, отвечающего минимальному значению критической нагрузки.

Summary

NUMERICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF STABILITY OF AN ORTHOTROPIC ANNULAR PLATE

The problem of calculating the critical load of cylindrically orthotropic annular plates under uniform pressure is solved by the Rayleigh-Ritz method. Up to now the problem was solved only under certain loading and supporting conditions. The approximate solution presented and the numerical results of computation obtained contain the following examples of plates:

- loaded by different pressures applied to the inside and at the outside edges;
- supported according to 12 various schemes;
- isotropic and orthotropic.

The method of calculating the number of diametral nodal lines corresponding to the least critical value was given.

INSTYTUT MECHANICZNO-KONSTRUKCYJNY
FILIA POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ W BIELSKU-BIAŁEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 marca 1976 r.
