

ANALIZA ROZWIĄZAŃ KINEMATYCZNIE DOPUSZCZALNYCH DLA ZAGADNIENIA NAPORU ŚCIAN O RÓŻNYCH KSZTAŁTACH*

WIESŁAW TRĄMPCZYŃSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Wyraźny rozwój w ostatnich latach matematycznej teorii mechaniki ośrodków sypkich pozwala na uzyskanie rozwiązań uwzględniających zarówno statykę, jak i kinematykę dla szeregu praktycznie ważnych procesów. Oczywiście nadal istnieje wiele poważnych trudności dotyczących przyjęcia odpowiedniego modelu opisującego rzeczywiste własności fizyczne ośrodka lub nawet sformułowania zagadnień brzegowych dla konkretnych przypadków.

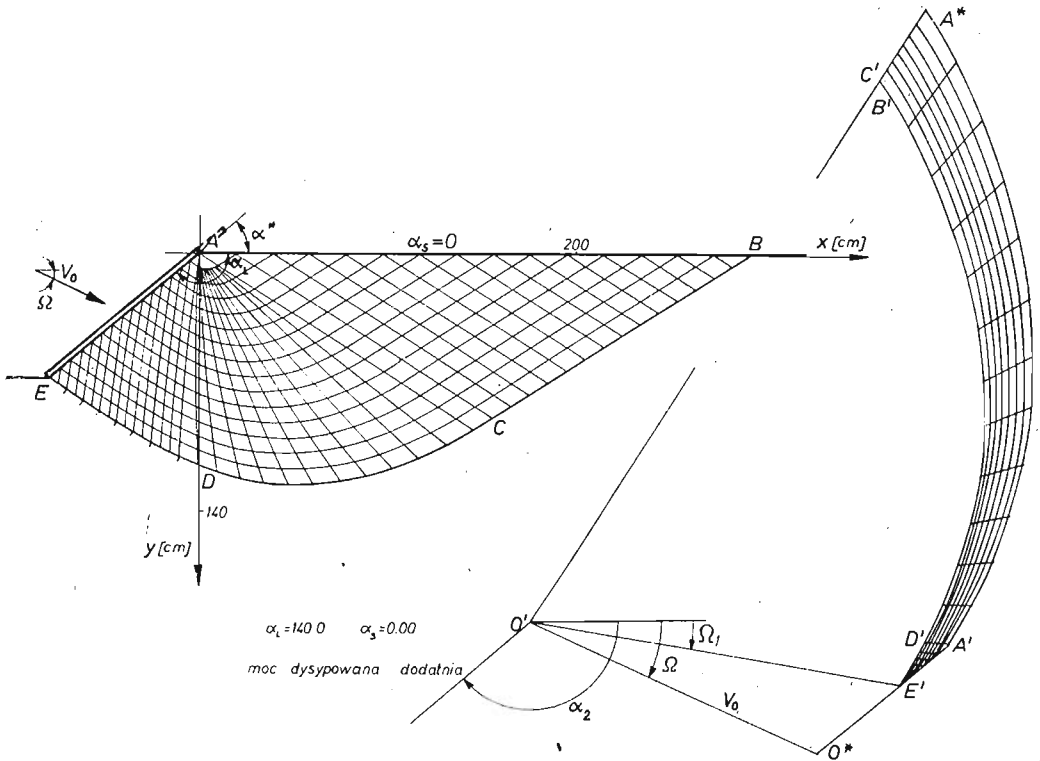
Wiele efektywnych rozwiązań uzyskuje się przyjmując sztywno idealnie-plastyczny model ośrodka oraz płaski stan odkształcenia. Rozwiązywanie zadań brzegowych dla tego typu zagadnień ma już dosyć bogatą literaturę (np. [1, 2, 3, 4]). Mimo że w wielu przypadkach zauważono istnienie ograniczeń utrudniających uzyskanie poprawnych rozwiązań (np. [4, 5]), brak było pełniejszej analizy przeprowadzonej pod tym kątem. Zazwyczaj ograniczano się do prezentowania rozwiązań poprawnych, ewentualnie krótkiej dyskusji trudności w ich uzyskaniu.

W pracy pokazano ograniczenia możliwości uzyskania rozwiązań kinematycznie dopuszczalnych dla zagadnienia naporu ścian o różnych kształtach (odpowiadały one kształtom narzędzi do robót ziemnych). Rozważania przeprowadzono dla ośrodka ważkiego opisanego warunkiem plastyczności Coulomba-Mohra ze spójnością oraz stowarzyszonego prawa płynięcia. Szersze opracowanie tego tematu można znaleźć w pracy autora [6].

2. Statyka i kinematyka procesu

Rozpatrzmy ruch ośrodka ograniczonego prostoliniowym brzegiem swobodnym nachylonym pod kątem α_s , wywołany przesuwaniem płaskiej ściany tworzącej z poziomem kąt α_i (rys. 1). Na powierzchni kontaktu ściany, przesuwaną się z prędkością V_0 , z ośrodkiem występuje suche tarcie określone współczynnikiem tarcia μ . Zagadnienie to było już przedstawiane w różnych pracach. W związku z tym jedynie krótko zostanie omówiony sposób rozwiązania.

*) Praca wykonana w ramach realizacji problemu węzłowego 05.12: Wytrzymałość i optymalizacja konstrukcji maszynowych i budowlanych.



Rys. 1

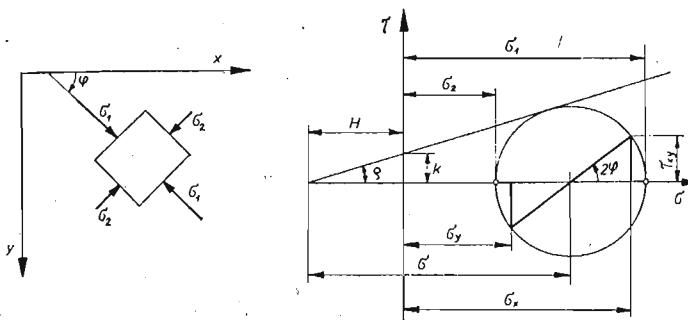
2.1. Statyka. Stan równowagi granicznej opisują równania równowagi:

$$(1) \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \gamma,$$

oraz warunek stanu granicznego Coulomba–Mohra, który dla płaskiego stanu odkształcenia ma postać

$$(2) \quad (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = (\sigma_x + \sigma_y + 2H)^2 \sin^2 \varrho,$$

gdzie ϱ jest kątem tarcia wewnętrznego ośrodka, zaś H wytrzymałością na trójosiowe izotropowe rozciąganie (rys. 2).



Rys. 2

Wprowadzając podstawienie:

$$(3) \quad \left. \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \end{array} \right\} = \sigma(1 \pm \sin \varrho \cos 2\varphi) - H, \quad \tau_{xy} = \sigma \sin \varrho \sin 2\varphi$$

gdzie φ jest kątem jaki tworzy kierunek większego naprężenia głównego z osią x ; układ równań (1) i (2) rozwiązuje się metodą charakterystyk uzyskując następujące równania charakterystyk oraz zależności wzdłuż nich:

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\varphi \pm \varepsilon),$$

$$d\sigma \pm 2\sigma \operatorname{tg} \varrho d\varphi = \gamma(dy \pm \operatorname{tg} \varrho dx),$$

gdzie

$$\varepsilon = \pi/4 - \varrho/2.$$

2.2. Kinematyka. Ze względu na złożone własności rzeczywistych ośrodków sypkich oraz brak dostatecznej ilości badań doświadczalnych, dotychczas nie ma jednolitego poglądu na sprawę formułowania równań plastycznego płynięcia ośrodka. Istnieje szereg propozycji praw fizycznych (np. [7, 8, 9, 10, 11, 12]) z których każda budzi kontrowersje. Nie wnikając w ich przyczyny w niniejszej pracy ograniczono się do analizy kinematyki ośrodka przy użyciu prawa płynięcia zaproponowanego przez DRUCKERA i PRAGERA [7].

Jest ono uogólnieniem na ośrodki rozdrobnione tzw. stowarzyszonego prawa płynięcia w postaci

$$(5) \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}},$$

gdzie λ jest współczynnikiem proporcjonalności natomiast funkcja F jest warunkiem plastyczności.

Równania kinematyki, które przyjmują postać:

$$(6) \quad \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) \sin 2\varphi - \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \cos 2\varphi = 0,$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} (\sin \varrho - \cos 2\varphi) - \frac{\partial V_y}{\partial y} (\sin \varrho + \cos 2\varphi) = 0$$

rozwiązuje się metodą charakterystyk uzyskując następujące równania charakterystyk oraz zależności wzdłuż nich:

$$(7) \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\varphi \pm \varepsilon), \quad dV_x + dV_y \operatorname{tg}(\varphi \pm \varepsilon) = 0.$$

Konsekwencją tak sformułowanego prawa jest współosiowość kierunków głównych tensorów $\dot{\varepsilon}_{ij}$ i σ_{ij} oraz ortogonalność wektora prędkości odkształcenia plastycznego, odłożonego odpowiednio w przestrzeni naprężeń, do powierzchni plastyczności. Ta ostatnia własność pozwala na sformułowanie twierdzeń ekstremalnych (patrz np. [13]).

Dla znalezienia wektorów prędkości posługiwano się metodą graficznego całkowania związków wzdłuż charakterystyk, polegającą na konstruowaniu hodografu, która została zaproponowana przez GREENA [14].

Uzyskane w przedstawiony powyżej sposób rozwiązania, w których:

1) spełnione są warunki brzegowe dla prędkości oraz warunki na granicy strefy plastycznej i sztywnej,

2) moc dysypowana nie jest ujemna,

są kinematycznie dopuszczalne, a wyznaczone siły stanowią ocenę górną rzeczywistych sił powierzchniowych wywołujących plastyczne płynięcie. W przedstawionych dalej zadaniach o uzyskaniu tego typu rozwiązań decydowało spełnienie drugiego z wymienionych warunków. Sprawdzano go metodą wykreślną zaproponowaną przez FORDA [15]. Polega ona na graficznym sprawdzeniu nierówności:

$$(8) \quad \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \geq 0$$

w wszystkich punktach pola. Zadania w których chociażby w jednym punkcie była ona niespełniona uważano za niepoprawne.

Ponieważ, w tych zagadnieniach, rozwiązania kinematyczne buduje się w oparciu o uprzednio znaną statykę, skonstruowanie przedłużenia stanu naprężenia w obszar sztywny [16] dla rozwiązań kinematycznie dopuszczalnych pozwala na uzyskanie rozwiązań kompletnych (ściślych).

3. Ograniczenia uniemożliwiające uzyskanie rozwiązań kinematycznie dopuszczalnych

Układ równań dla naprężeń rozwiązywano numerycznie przy pomocy EMC Odra 1204. Posługując się metodą MASSAU [17], poczynając od swobodnego brzegu rozwiązywano kolejno: zagadnienie Cauchy'ego, zagadnienie z punktem osobliwym i zagadnienie mieszane.

Wpływ na uzyskane wyniki mają następujące wielkości:

k [kG/cm²] — spójność ośrodka ($k = H \operatorname{tg} \varrho$),

ϱ' [°] — kąt tarcia wewnętrznego,

γ [kG/cm³] — ciężar objętościowy,

μ — współczynnik tarcia pomiędzy ścianą a ośrodkiem,

oraz warunki zadania: kształt brzegu swobodnego, profil ściany oraz kierunek jej ruchu.

W pracy ograniczono się do analizy możliwości uzyskania rozwiązań kinematycznie dopuszczalnych w zależności od kształtu brzegu swobodnego, profilu ściany oraz kierunku jej ruchu. Pozostałe wielkości przyjmowano za stałe:

$$\gamma = 2,25 \cdot 10^{-4} \text{ [kG/cm}^3\text{]}, \quad \varrho = 25^\circ, \quad \mu = 0,2 \quad k = 0,5 \text{ [kG/cm}^2\text{]}.$$

Ze względu na brak rozwiązań analitycznych tego typu problemów wnioski wyciągano na podstawie obserwacji szeregu rozwiązań konkretnych zagadnień brzegowych. Należy więc do wszelkich wniosków podchodzić z dużą ostrożnością i traktować je jedynie jako możliwość występowania opisywanych dalej efektów.

3.1. Wpływ kierunku ruchu ściany napierającej na możliwość uzyskania rozwiązań kinematycznie dopuszczalnych. Podobnie jak kształt rozpatrywanych ścian napierających, przyjmujemy, że ich ruch odpowiadać będzie charakterowi pracy narzędzi do robót ziemnych. Ponieważ w rozważaniach teoretycznych rozpatrujemy jedynie początek ruchu, ograniczać będziemy się do przesuwu prostoliniowego, a ewentualnym ograniczeniom, ze względu na możliwość uzyskania rozwiązań kinematycznie dopuszczalnych podlegać będzie jego kierunek.

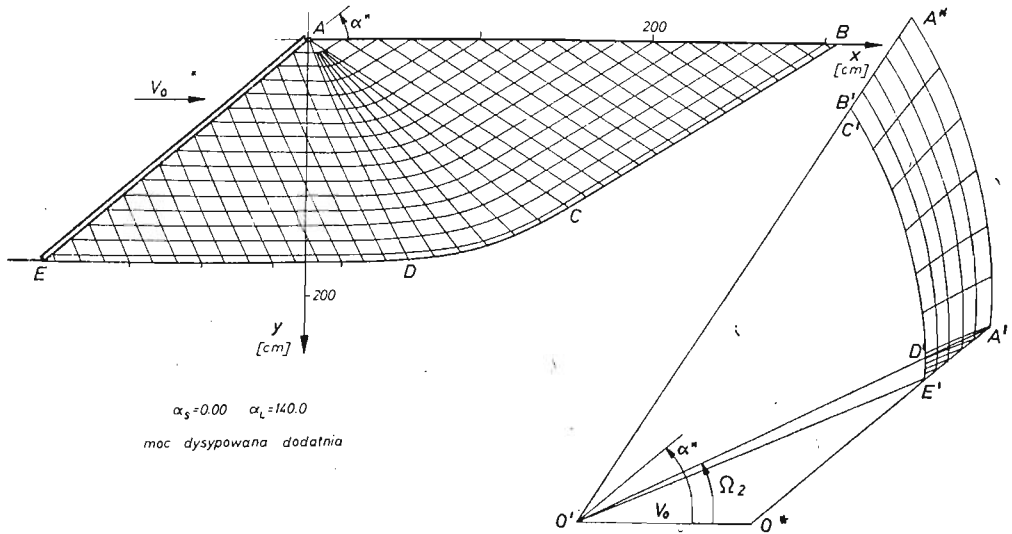
Kąt nachylenia prędkości V_0 , Ω , której na hodografie odpowiada wektor $O'O^*$ (rys. 1) musi spełniać warunek

$$(9) \quad \Omega_1 \leq \Omega \leq \alpha_2$$

(za dodatnie uważa się kąty odkładane od osi x zgodnie z ruchem wskazówek zegara) gdzie Ω_1 jest kątem nachylenia wektora prędkości przesuwu ośrodka wzdłuż charakterystyki β w punkcie E , będącej linią nieciągłości prędkości. Dla $\Omega_1 > \Omega$ punkt O^* znajduje się na odcinku $E'A'$ i przesuw ośrodka wzdłuż ściany napierającej odbywa się do dołu. Ponieważ przystępując do rozwiązania założono przeciwny kierunek tego ruchu, co pociąga za sobą odpowiedni zwrot naprężeń stycznych na ścianie, moc dysypowana w punkcie E jest ujemna.

Graniczna wielkość kąta α_2 wynika natomiast z charakteru rozpatrywanego procesu. Np. w zagadnieniu przedstawionym na rys. 4 $\alpha_2 = 0$ i odpowiada kątowi nachylenia dolnej części łyżki ładowarki. Gdy $\Omega_1 > \alpha_2$ następuje wciskanie w ośrodek dolnej części łyżki co nie odpowiada charakterowi pracy tego typu narzędzi. W przypadku naporu płaskich ścian (np. rys. 1) $\alpha_2 = \alpha_1$.

Jeżeli w zagadnieniu przedstawionym na rys. 2 założymy poziomą prędkość przesuwu ściany to warunek 9 jest niespełniony i moc dysypowana w punkcie E jest ujemna. Założymy więc że przesuw ośrodka wzdłuż ściany odbywa się do dołu (przeciwnie niż poprzednio)



Rys. 3

i rozwiążmy zagadnienie od nowa (rys. 3). Dla tak postawionego zadania poprawne rozwiązanie uzyskuje się dla

$$(10) \quad \alpha^* \leq \Omega \leq \Omega_2$$

gdzie Ω_2 jest kątem nachylenia wektora przesuwu ośrodka wzdłuż charakterystyki β w punkcie A , będącej linią nieciągłości prędkości. Uzasadnienie obu granicznych wielkości kąta Ω jest analogiczne do poprzedniego. Poprawne rozwiązanie można więc uży-

skąć w zakresie kątów nachylenia wektora prędkości przesuwu odpowiadającego bardziej wysuwaniu się ściany z ośrodka nie zaś jej naporowi.

Wynika stąd, że dla poziomego przesuwu ściany nie można otrzymać, w przypadku przedstawionym na rys. 1, poprawnego rozwiązania ponieważ wartość $\Omega = 0$ nie zawiera się w żadnym z zakresów określonych nierównościami 9 i 10.

W zagadnieniach, w których kierunek przesuwu ściany jest określony z góry maksymalny kąt jej nachylenia ograniczony jest wynikającą z rozwiązania wielkością kąta Ω_1 w punkcie E , gdyż spełniony musi być warunek 9.

W przypadkach, gdy ściana napierająca wystaje ponad brzeg swobodny ośrodka (na rys. 1 zaznaczono to linią przerywaną) w punkcie A dodatkowo musi być spełniony warunek (dotyczy to zagadnień, w których ściana bezpośrednio styka się z obszarem uplastycznionym)

$$(11) \quad \alpha^* \leq \Omega_2,$$

gdzie Ω_2 jest kątem nachylenia wektora prędkości ośrodka wzdłuż charakterystyki β w punkcie A , skąd otrzymujemy ograniczenie kąta nachylenia ściany

$$(12) \quad \alpha_L \leq \frac{3}{4}\pi - \varrho/2 + \alpha_s.$$

W przeciwnym razie, rozkładając prędkość ośrodka w punkcie A na kierunek normalny i styczny do ściany otrzymujemy składową normalną skierowaną do ściany.

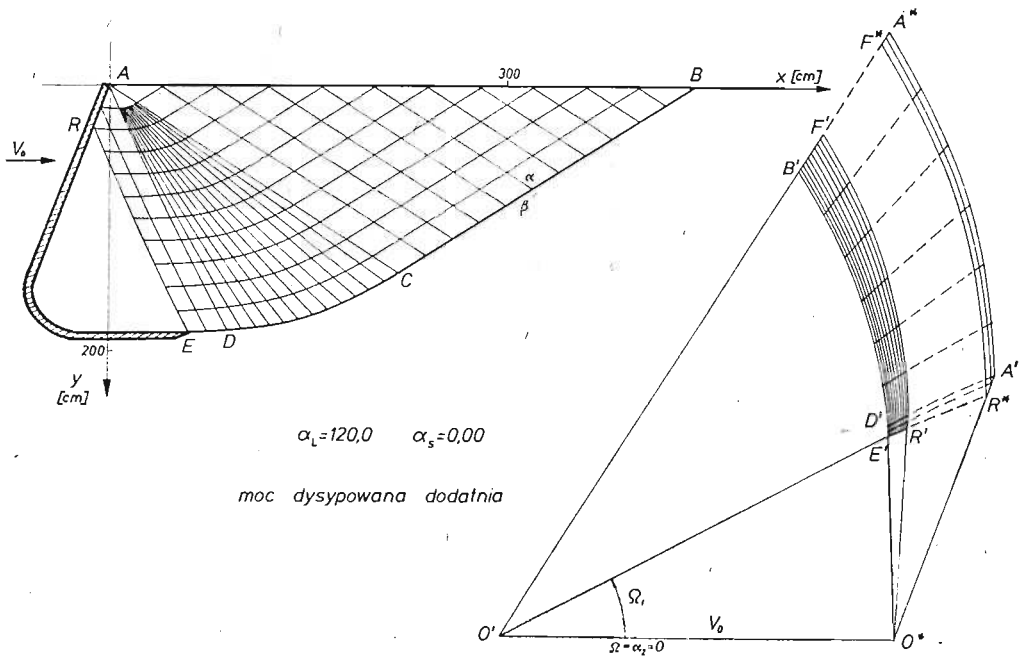
Dalsze rozważania dotyczące wpływu kształtu brzegu swobodnego i profilu narzędzia na możliwość uzyskania rozwiązań kinematycznie dopuszczalnych przeprowadzono przy założeniu, że kąt nachylenia wektora prędkości ściany spełnia nierówności 9 i 12.

3.2. Wpływ kształtu brzegu swobodnego na możliwość uzyskania rozwiązań kinematycznie dopuszczalnych. W przypadku poziomego brzegu swobodnego ośrodka uzyskiwano rozwiązania kinematycznie dopuszczalne dla wszystkich rozpatrywanych przypadków, niezależnie od wielkości obszaru uplastycznionego. Znaczy to, że niezależnie od tego czy w rozwiązaniu statycznym występowało tylko zagadnienie Cauchy'ego, czy zagadnienie Cauchy'ego i zagadnienie z punktem osobliwym, czy też zagadnienie Cauchy'ego, zagadnienie z punktem osobliwym i zagadnienie mieszane (co jest zależne od kształtu ściany napierającej) w rozwiązaniu moc dysypowana była dodatnia (np. rys. 4).

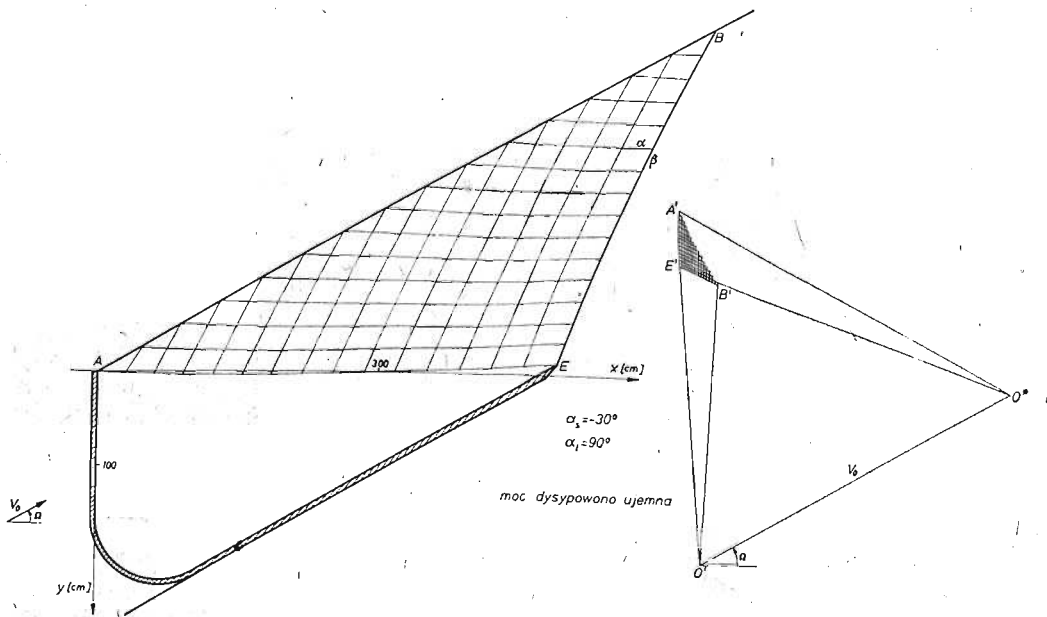
W przypadku płaskiego brzegu nachylonego do poziomu pod kątem $\alpha_s < 0$, na skutek uwzględnienia ciężaru objętościowego ośrodka, charakterystyki α i β w obszarze zagadnienia Cauchy'ego mają krzywiznę ujemną ($K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \xi}{\Delta s}$, gdzie ξ jest kątem pomiędzy

osią x a styczną do charakterystyki w danym punkcie, a Δs odległością między dwoma sąsiednimi punktami. Za kierunek dodatni charakterystyk przyjęto kierunek zgodny z ich wykreśleniem, tzn. od brzegu swobodnego). W zadaniach, w których obszar plastyczny ograniczał się tylko do w/w zagadnienia moc dysypowana była ujemna (rys. 5).

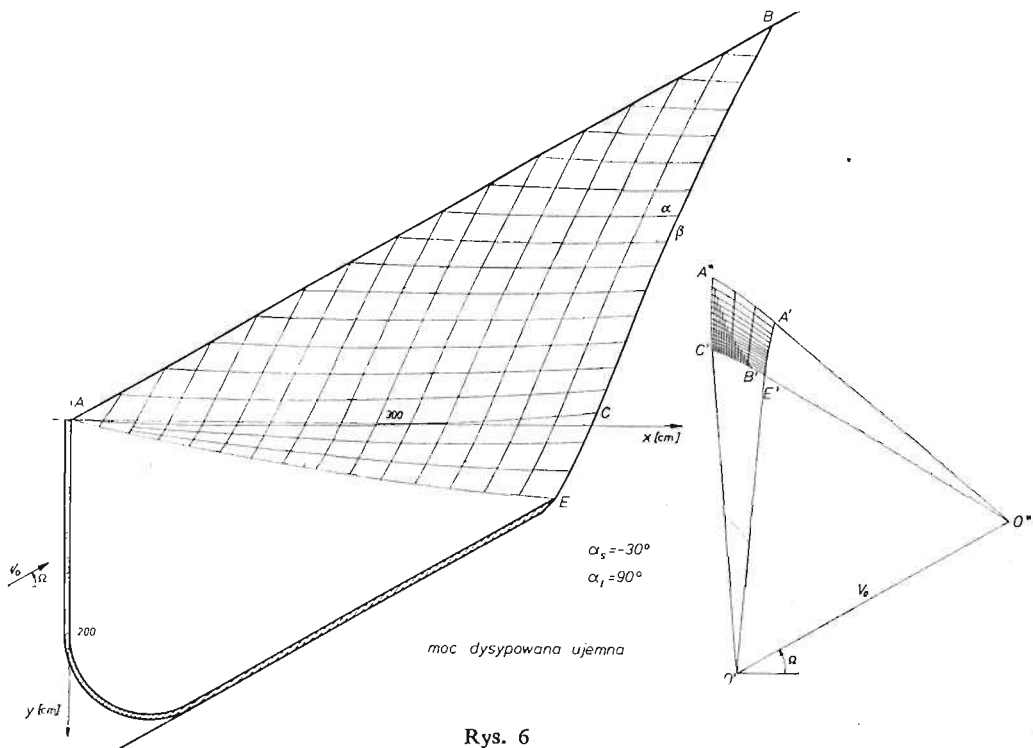
W obszarze zagadnienia charakterystycznego z punktem osobliwym zwiększa się ujemna krzywizna charakterystyk α , zaś charakterystyki β są liniami o krzywiznie dodatniej. W zadaniach, w których obszar plastyczny występowało zagadnienie Cauchy'ego oraz zagadnienie charakterystyczne z punktem osobliwym, dla kierunku przesuwu ściany równoległego do brzegu swobodnego, zależnie od wielkości kąta rozwarcia wachlarza



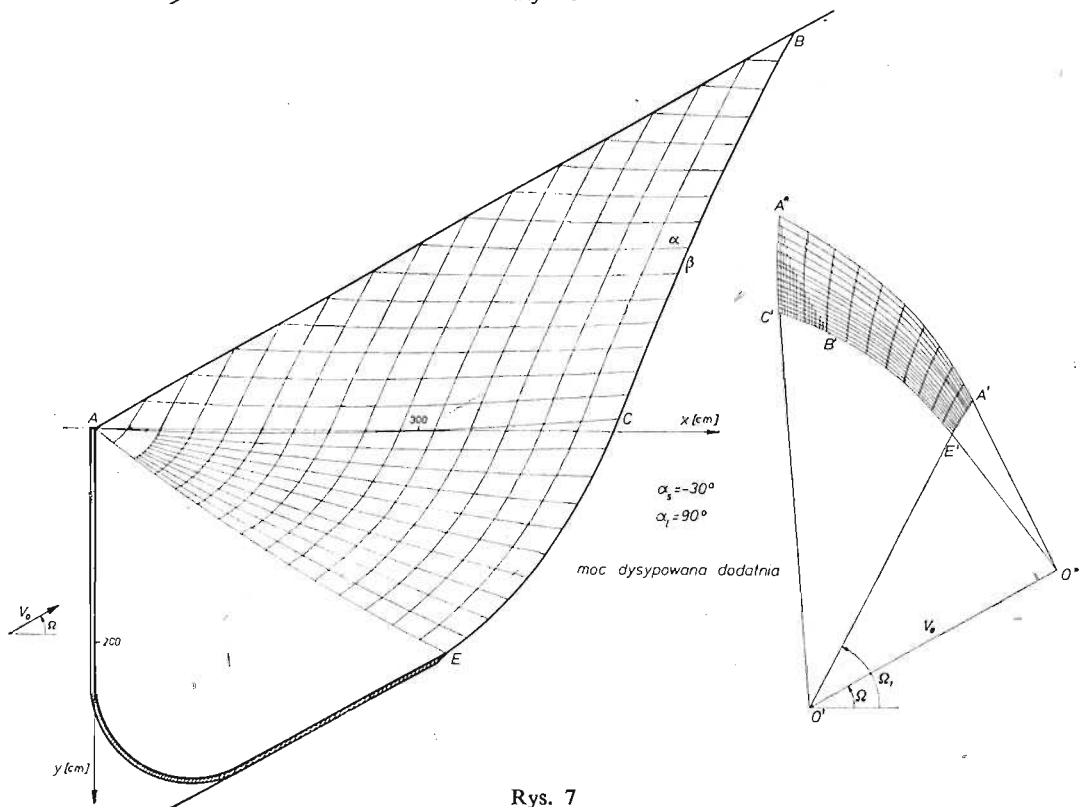
Rys. 4



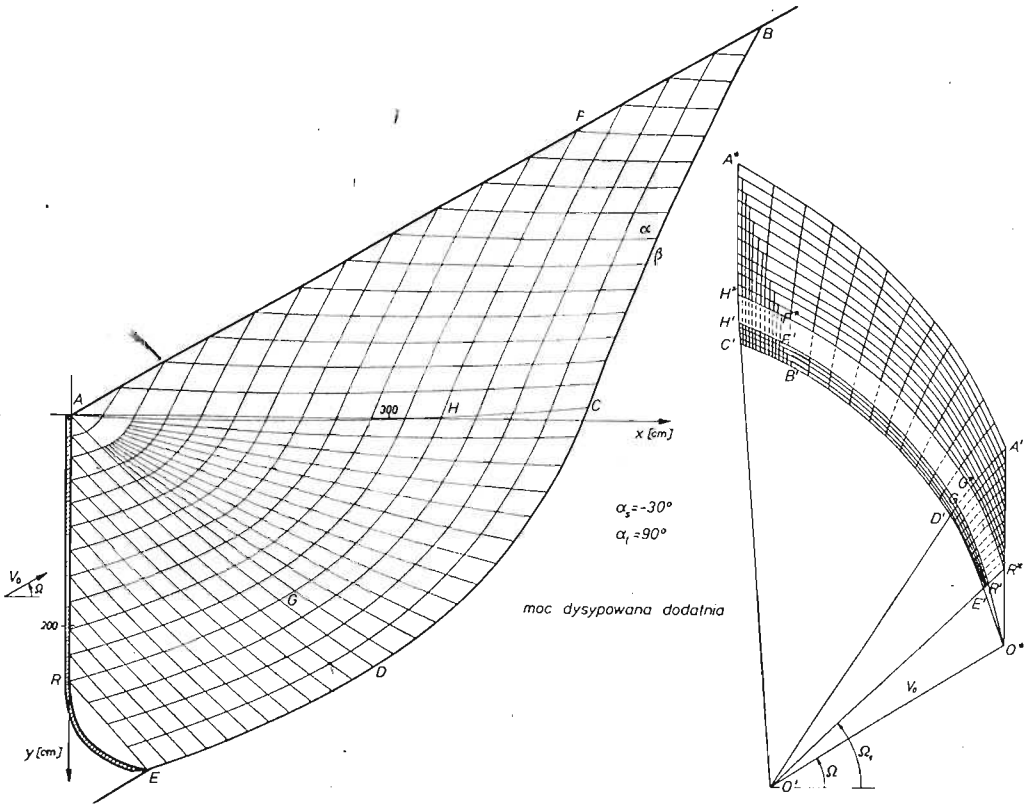
Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8

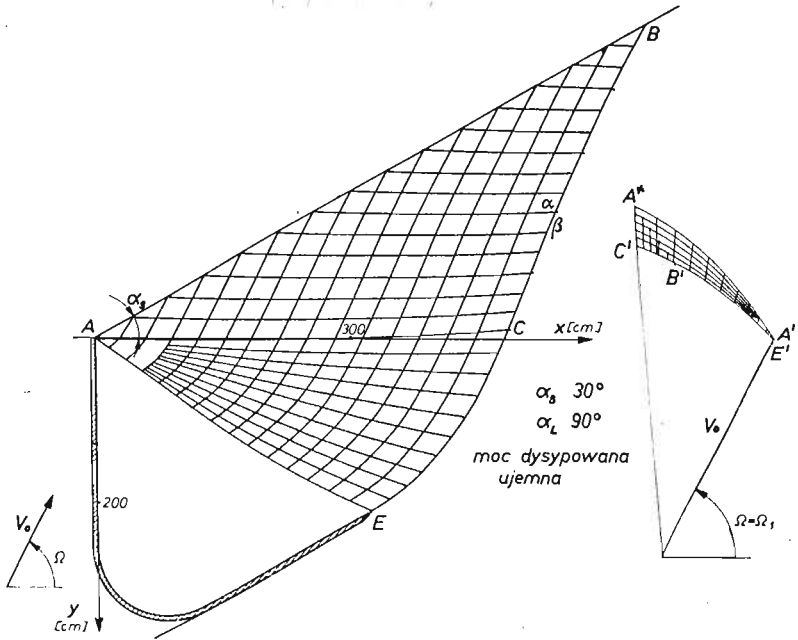
uzyskiwano rozwiązania kinematycznie dopuszczalne (rys. 7) lub nie (rys. 6). Dla tego przypadku istnieje pewna krytyczna wielkość wachlarza, po przekroczeniu której można otrzymać poprawne rozwiązania.

Gdy w obszarze uplastycznionym występowało także zagadnienie mieszane, niezależnie od jego wielkości, dla tego kierunku ruchu otrzymywano rozwiązania kinematycznie dopuszczalne (rys. 8).

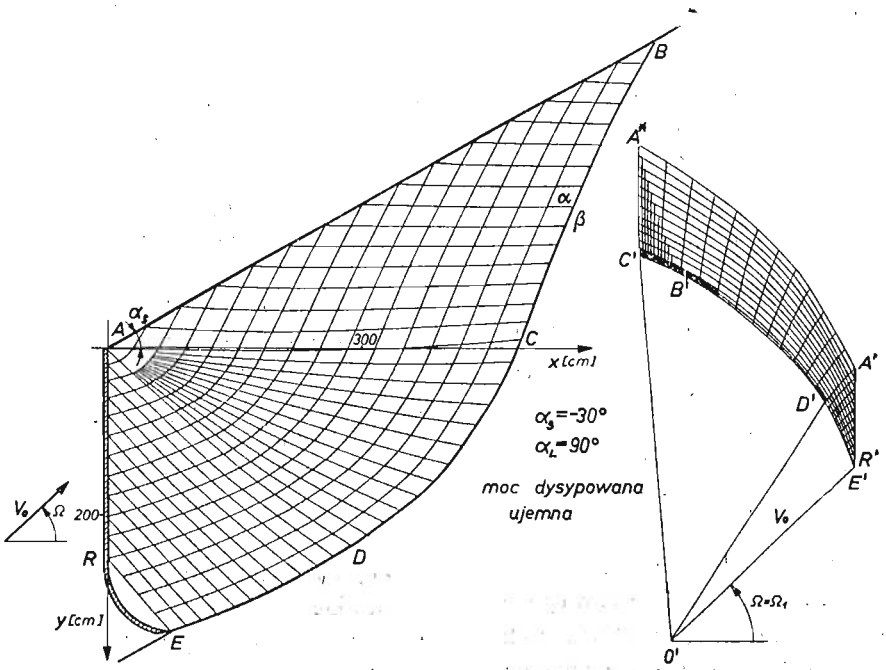
O ile w zagadnieniach przedstawionych na rys. 5 i 6 moc dysypowana jest ujemna niezależnie od wielkości kąta Ω , o tyle w przykładach przedstawionych na rys. 7 i 8 uzyskanie rozwiązań poprawnych zależy od jego wielkości. Na rys. 9 i 10 pokazano rozwiązanie tych samych zagadnień (co na rys. 7 i 8) z tym, że $\Omega = \Omega_1$. W obu przypadkach moc dysypowana jest ujemna.

Dopiero dla zagadnienia naporu płaskiej ściany (rys. 11) uzyskanie rozwiązań kinematycznie dopuszczalnych jest niezależne od kąta nachylenia wektora prędkości jej przesuwu.

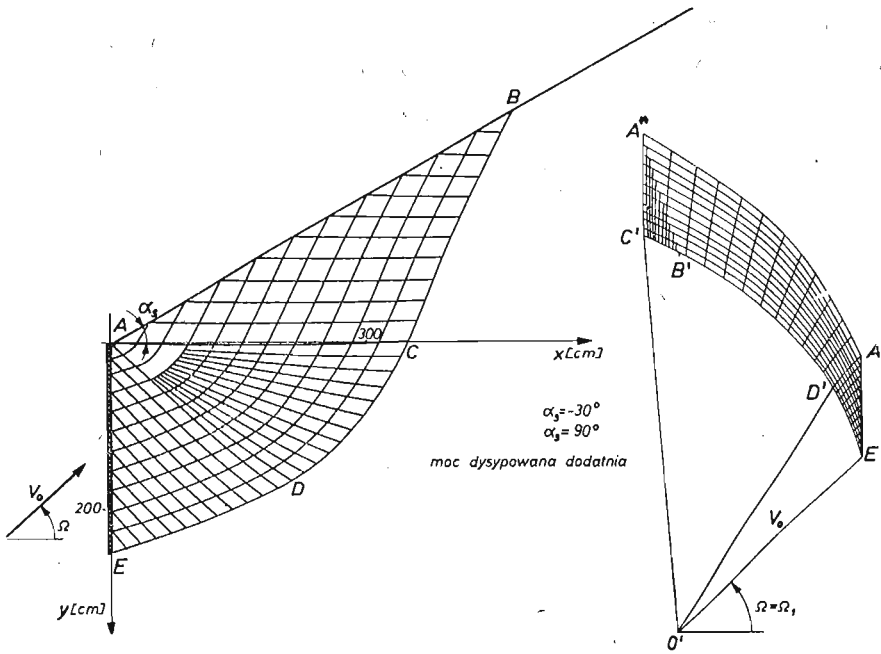
W przypadku płaskiego brzegu swobodnego nachylonego pod kątem $\alpha_s > 0$, na skutek uwzględnienia ciężaru objętościowego ośrodka, charakterystyki α i β w obszarze zagadnienia Cauchy'ego mają krzywiznę dodatnią. W zadaniach, w których obszar plastyczny ograniczał się tylko do w/w zagadnienia rozwiązania kinematycznie dopuszczalne uzyskiwano zależnie od wielkości kąta Ω . W przedstawionym na rys. 12 zagadnieniu dla $\Omega = \alpha_s$



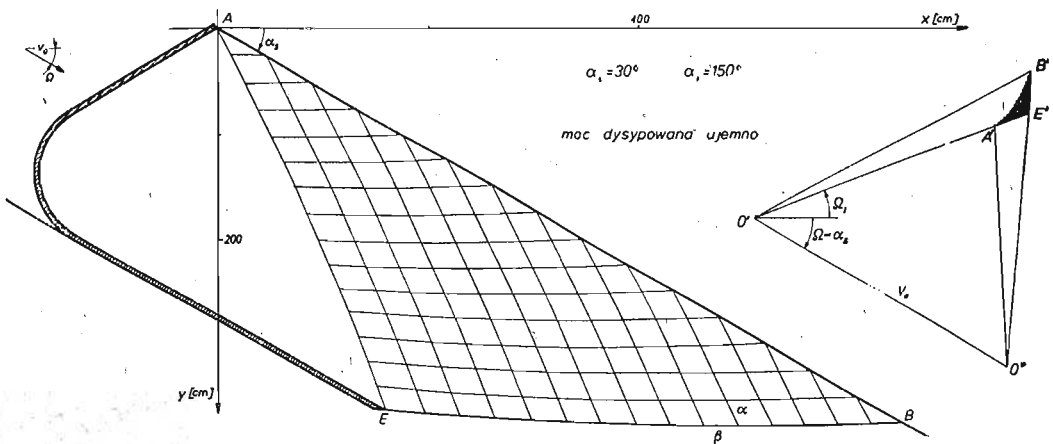
Rys. 9



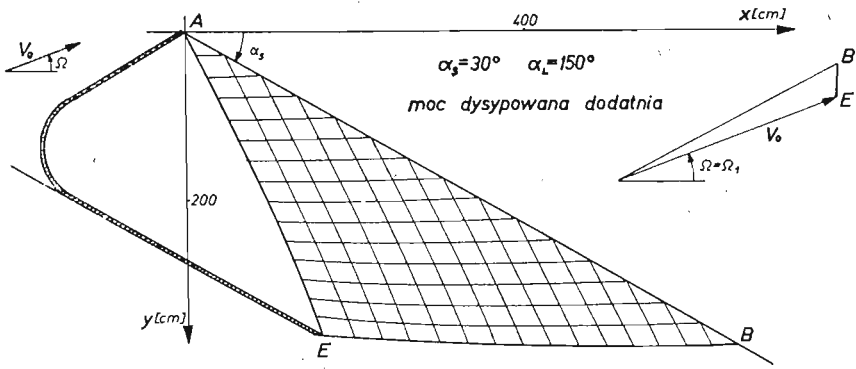
Rys. 10



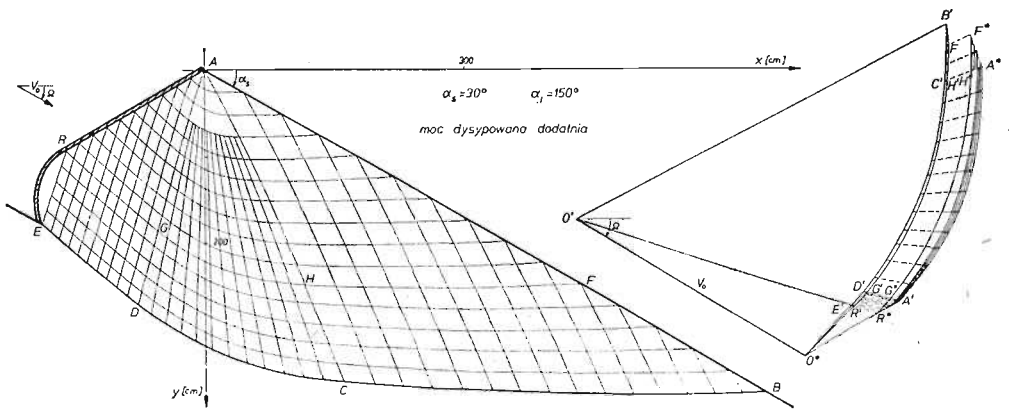
Rys. 11



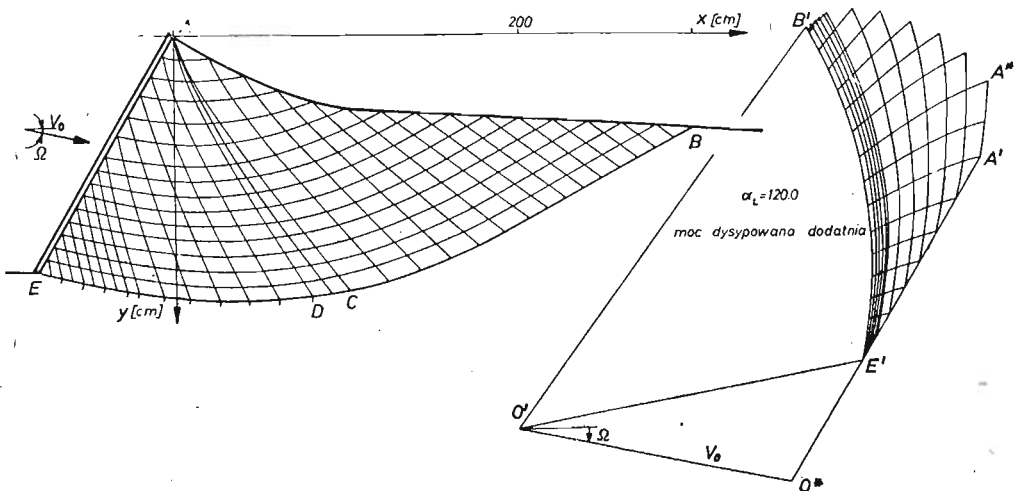
Rys. 12



Rys. 13



Rys. 14



Rys. 15

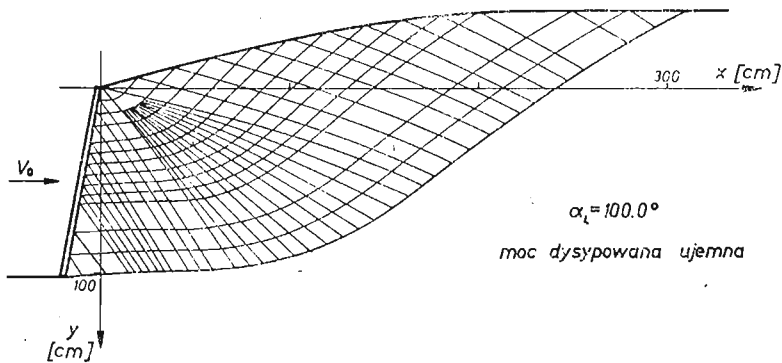
(przesuw równoległy do brzegu) moc dysypowana jest ujemna, natomiast dla $\Omega = \Omega_1$ (rys. 13) jest ona dodatnia.

W przypadkach, w których w obszarze plastycznym poza zagadnieniem Cauchy'ego występowało zagadnienie charakterystyczne z punktem osobliwym lub zagadnienie charakterystyczne z punktem osobliwym i zagadnienie mieszane we wszystkich rozpatrywanych zadaniach uzyskiwano rozwiązania kinematycznie dopuszczalne (rys. 14).

Przedstawione powyżej ograniczenia nie dotyczą ośrodka nieważkiego. Charakterystyki α w całym obszarze plastycznym są liniami prostymi natomiast charakterystyki β bądź są liniami prostymi bądź ich krzywizna jest dodatnia (zagadnienie charakterystyczne z punktem osobliwym). Dla takiego ośrodka, niezależnie od kąta nachylenia brzegu swobodnego, otrzymuje się rozwiązania kinematycznie dopuszczalne.

W przypadku brzegu swobodnego wklęsłego (rys. 15) charakterystyki α mają krzywiznę ujemną natomiast krzywizna charakterystyk β jest dodatnia. Pozwala to na uzyskiwanie we wszystkich przypadkach rozwiązań poprawnych.

Natomiast jeżeli brzeg swobodny ośrodka jest wypukły, charakterystyki β mają krzywiznę ujemną w obszarze zagadnienia Cauchy'ego i zagadnienia mieszane, a dodatnią



Rys. 16

w obszarze zagadnienia charakterystycznego z punktem osobliwym. Krzywizna charakterystyk α we wszystkich wspomnianych obszarach jest dodatnia. Powoduje to uzyskiwanie mocy dysypowanej ujemnej we wszystkich zadaniach (np. rys. 16).

3.3. Wpływ kształtu ściany napierającej na możliwość otrzymania rozwiązań kinematycznie dopuszczalnych. Przedstawiając wpływ kształtu ściany napierającej na rozwiązanie rozpatrywać będziemy zagadnienia w których swobodny brzeg ośrodka jest płaski natomiast pod pojęciem kształtu ściany rozumiemy jedynie konfigurację tej jej części, na której kończą się charakterystyki β (odcinek RA na rys. 4). W przypadku kończenia się ich na linii nieciągłości prędkości (odcinek RE na rys. 4), kształt ściany znajdującej się za nią nie ma wpływu na rozwiązanie kinematyczne.

Kąt α_1 w punkcie A , musi być na tyle duży, by spełniony był warunek

$$(13) \quad \varphi_1 \geq \varphi_c$$

(φ_1 — kąt φ na ścianie w punkcie A , φ_c — kąt φ na brzegu w punkcie A) gdyż w przeciwnym przypadku w polu naprężenia powstaje linia nieciągłości. Jak pokazano w [18] uniemożliwia to zbudowanie poprawnej kinematyki.

Korzystając z zależności wzdłuż charakterystyki β w punkcie A

$$(14) \quad d\sigma - 2\sigma \operatorname{tg} \varrho d\varphi = 0$$

skąd

$$\sigma_l = \sigma_c \exp(2 \operatorname{tg} \varrho (\varphi_l - \varphi_c)),$$

oraz warunku tarcia na ścianie

$$(15) \quad \mu = \frac{-\tau_n}{\sigma_n},$$

gdzie

$$I_n = -\sigma_l \sin \varrho \sin 2(\varphi_l - \alpha),$$

$$\sigma_n = \sigma_l (1 + \sin \varrho \cos 2(\varphi_l - \alpha)) - H,$$

σ_l i φ_l — naprężenie oraz kąt φ na ścianie,

σ_c i φ_c — naprężenie oraz kąt φ na brzegu,

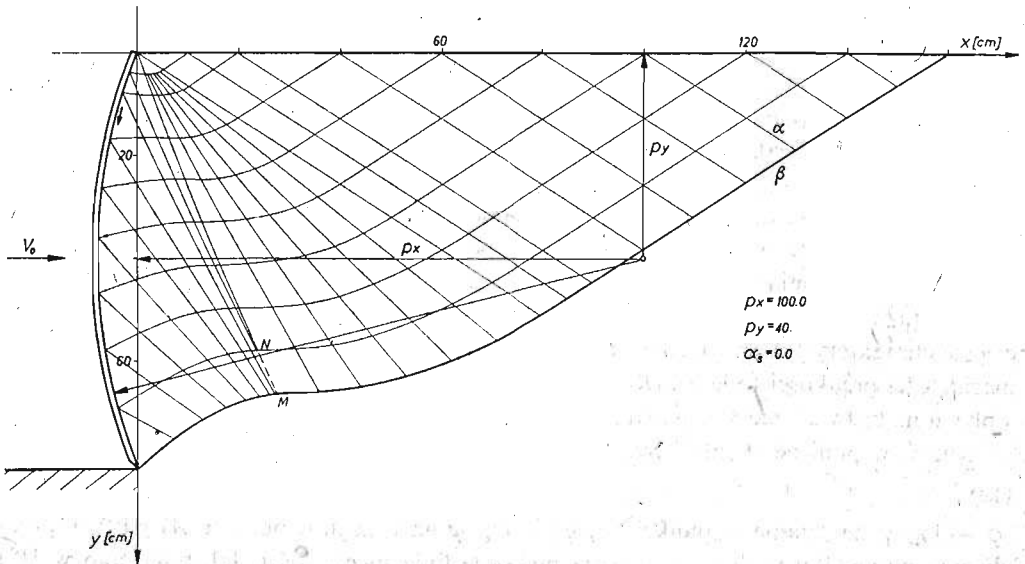
$$\alpha = \varphi_l - (\alpha_l - \pi/2),$$

przyjmując: $\varphi_l = \varphi_c$, $\sigma_l = \sigma_c = \frac{H}{1 - \sin \varrho}$; po przekształceniach z (14) i (15) otrzymujemy równość

$$\mu = \frac{\sin 2(\varphi_c - \alpha)}{1 + \cos 2(\varphi_c - \alpha)} = \operatorname{tg}(\varphi_c - \alpha)$$

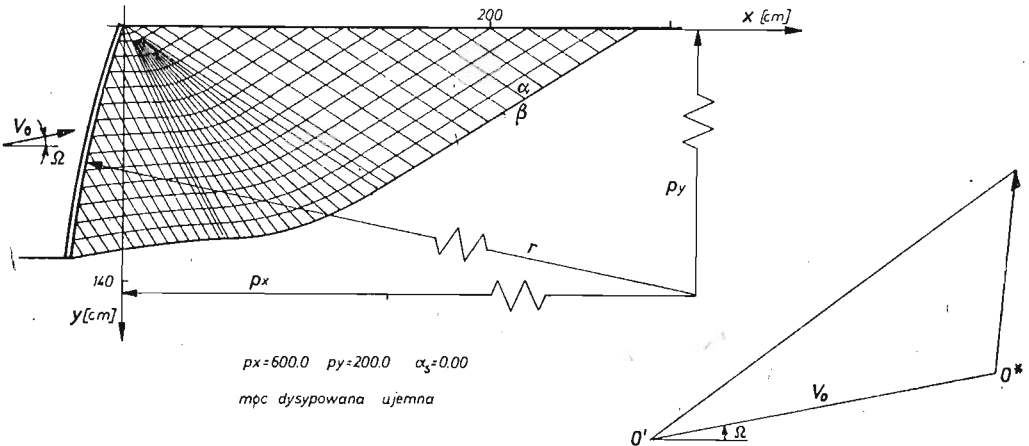
skąd

$$(16) \quad \alpha_l \geq \varphi_c - \operatorname{arctg} \mu + \pi/2.$$

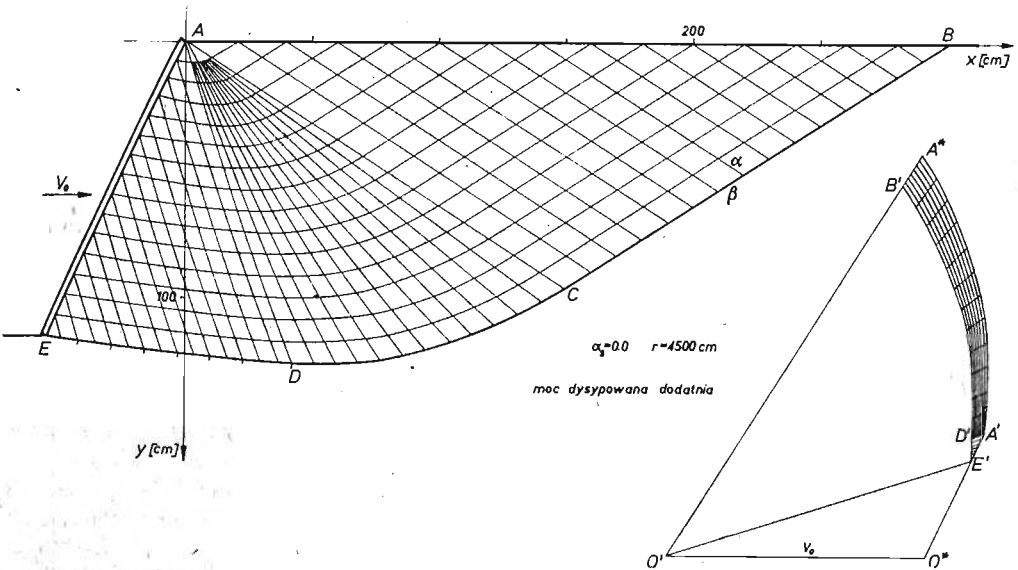


Rys. 17

Uzyskanie rozwiązań kinematycznie dopuszczalnych w przypadku naporu ścian o krzywiznie ujemnej (analogicznie jak poprzednio za kierunek dodatni uważać będziemy kierunek od początku układu współrzędnych, na rys. 17 zaznaczono to strzałką, i $K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \xi_1}{\Delta s}$ gdzie ξ_1 jest kątem pomiędzy osią x a styczną do ściany w danym punkcie, natomiast Δs jest odległością pomiędzy dwoma punktami) zależne jest od wielkości krzywizny. Charakterystyki α wychodząc ze ściany pod zmieniającym się wzdłuż jej konturu kątem mają tendencję do zbiegania się, natomiast charakterystyki β w obszarze zagadnienia mieszanego stają się liniami o krzywiznie ujemnej (na granicy z obszarem zagadnienia charakterystycznego z punktem osobliwym występuje punkt przegięcia, np. punkt M na rys. 17). Powoduje to uzyskiwanie mocy dysypowanej ujemnej. Uwzględnienie ciężaru



Rys. 18



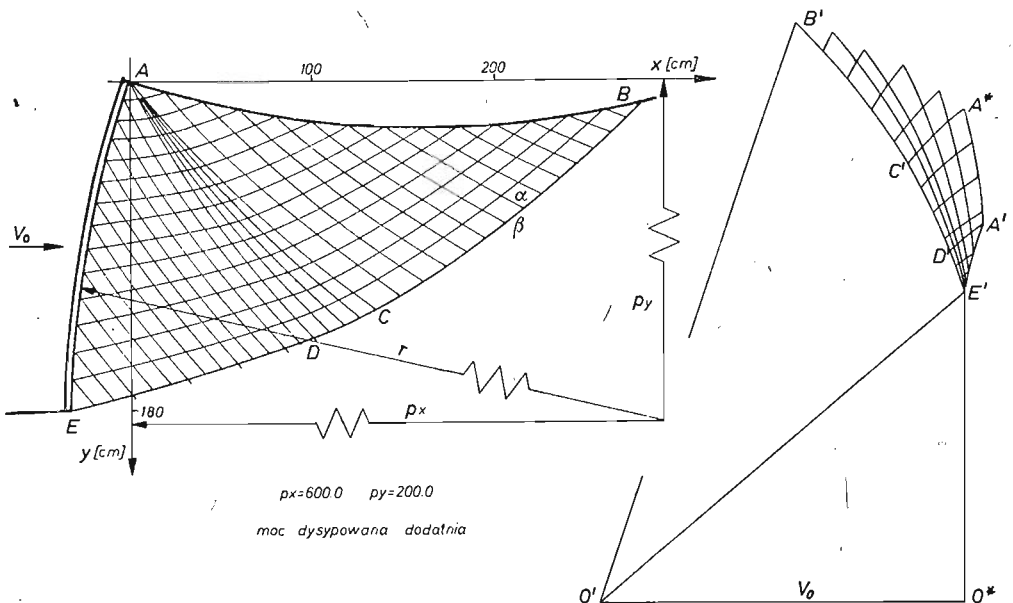
Rys. 19

objętościowego ośrodka powoduje, że istnieje pewna dla danego zagadnienia, krzywizna krytyczna nie przekraczając której charakterystyki β w obszarze zagadnienia mieszanego mają krzywiznę dodatnią i możemy uzyskać rozwiązania kinematycznie dopuszczalne. Dla przypadku przedstawionego na rys. 18 numerycznie określona wielkość krzywizny krytycznej wynosi $r_k = 5500$ cm przy $p_y = 200$ cm (gdzie r_k jest promieniem krytycznym). Dla $r < r_k$ moc dysypowana jest ujemna (rys. 18), a dla $r \geq r_k$ jest dodatnia (rys. 19).

W przypadku ośrodka nieważkiego, w obszarze zagadnienia mieszanego charakterystyki α są liniami prostymi, a kąt pomiędzy nimi a styczną do ściany napierającej jest wielkością stałą. Niezależnie od wielkości ujemnej krzywizny ściany charakterystyki te zbiegają się, natomiast charakterystyki β mają krzywiznę ujemną. Taka konfiguracja charakterystyk powoduje, że moc dysypowana jest ujemna. Oznacza to, że dla ośrodka nieważkiego mamy $r_k = \infty$ i poprawne rozwiązania można uzyskać jedynie dla płaskiej ściany.

W przypadku dostatecznie dużej krzywizny ściany, zarówno dla ośrodka ważkiego (rys. 17), jak i nieważkiego, charakterystyki α przecinają się w zakresie obszaru uplastycznego co powoduje powstanie linii nieciągłości naprężeń (odcinek MN), a to uniemożliwia zbudowanie poprawnej kinematyki.

W punktach 3.1, 3.2, 3.3 pokazano osobno wpływ kierunku ruchu ściany, kształtu ściany napierającej i konfiguracji brzegu swobodnego na uzyskanie rozwiązań kinematycznie dopuszczalnych. Ponieważ jednak w konkretnych przypadkach praktycznych wpływy poszczególnych elementów nakładają się, przedstawione w punkcie 3 ograniczenia należy traktować jedynie jako tendencję zachowania się rozwiązania pod wpływem omawianych czynników. Np. dobierając odpowiedni kształt brzegu swobodnego możemy uzyskać poprawne rozwiązania dla ściany o krzywiznie większej od krytycznej (rys. 20).



Rys. 20

4. Wnioski

Przedstawiona analiza wskazuje, iż wprawdzie teoria mechaniki ośrodków sypkich pozwala na rozwiązanie bardzo dużej klasy zadań, jednakże w wielu przypadkach praktycznych istnieje szereg ograniczeń uniemożliwiających uzyskanie rozwiązań kinematycznie dopuszczalnych. Tak więc ograniczenia występowały w przypadku swobodnego brzegu nachylonego pod pewnym kątem do poziomu brzegu wypukłego, ściany napierającej o krzywiznie ujemnej oraz dla pewnych kątów nachylenia wektora prędkości przesuwu ściany. Wydaje się, że jedną z istotnych przyczyn tego jest przyjęcie silnego założenia, że cały materiał, łącznie ze swobodnym brzegiem, znajduje się w stanie plastycznym. Prawdopodobnie w takich przypadkach występują ruchome obszary sztywne, nie będące w stanie plastycznym i dochodzące do swobodnego brzegu (zjawisko to zauważono np. w pracy [19]). Zbudowanie rozwiązań teoretycznych w takich warunkach jest bardzo trudne i jak dotąd, tego rodzaju rozwiązań brak.

Literatura cytowana w tekście

1. W. W. SOKOŁOWSKI, *Statyka ośrodków sypkich*, PWN, Warszawa 1958.
2. Z. MRÓZ, A. DRESCHER, *Podstawy teorii plastyczności ośrodków rozdrobnionych*, Wyd. PAN, 1972.
3. E. DEMBICKI, *Stany graniczne gruntów: teoria i zastosowanie*, Gdańskie Tow. Naukowe, 1970.
4. W. SZCZEPIŃSKI, *Stany graniczne i kinematyka ośrodków sypkich*, PWN, Warszawa 1974.
5. A. DRESCHER, *O pewnych rozwiązaniach kinematycznych płaskiego płynięcia ośrodków rozdrobnionych*, Prace IPPT 3I (1972).
6. W. TRĄMPCZYŃSKI, *Mechanika procesów urabiania gruntów jako zagadnienie teorii plastyczności*, Praca doktorska, IPPT PAN, 1975.
7. D. C. DRUCKER, W. PRAGER, *Soil mechanics and plastic analysis of limit design*, Quart. Appl. Math., 10, 157 - 165 (1952).
8. A. W. JENIKE, R. T. SHIELD, *On the plastic flow of Coulomb solids beyond original failure*, J. Appl. Mech, 26, 599 - 602 (1959).
9. Z. MRÓZ, *On a theory of density-hardening media*, Acta Mech., 1972.
10. G. de JOSSELIN de JONG, *Statics and kinematics in the failable zone of a granular material*, Waltman Delft 1959.
11. A. J. M. SPENCER, *A theory of kinematics of ideal soil under plane strain conditions*, Journ. Mech. Phys. Solids, 12, 337 - 351 (1964).
12. Г. А. ГЕНЕВ, *Вопросы динамики зернистых сред*, Акад. Строит. Архитект. СССР, Москва 1958.
13. Praca zbiorowa, *Teoria plastyczności*, PWN, Warszawa 1965.
14. A. P. GREEN, *A theoretical investigation of the compression of a ductile material between smooth flat dies*, Phil. Mag., 42, 900 - 918 (1951).
15. H. FORD, *Advanced mechanics of materials*, Longmans Green, London 1960.
16. L. DIETRICH, W. TRĄMPCZYŃSKI, *Przedłużenie stanu naprężenia w obszar sztywny dla pewnych rozwiązań w mechanice gruntów*, Rozpr. Inż., 22, 4, 631 - 644 (1974).
17. MASSAU, *Memoire sur l'integration graphique des equations aux deucees partolles*, Gand., 1900 - 1903.
18. A. DRESCHER, *Some remarks on plane flow of granular media*, Arch. Mech. Stos., 24, 5 - 6, 837 - 848 (1972).
19. A. DRESCHER, G. de JOSSELIN de JONG, *Photoelastic verification of a mechanical model for the flow of a granular material*, J. Mech. Phys. Solids, 20 (1972).

Резюме

ИССЛЕДОВАНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКИ ДОПУСТИМЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ
ЗАДАЧИ НАПОРА СТЕНОК РАЗЛИЧНОГО ПРОФИЛЯ

В работе представлены ограничения существующие для кинематически допустимых решений задачи о напоре стенок, имеющих профиль инструментов для земляных работ (напр. ковш погрузчика или отвал бульдозера). Исследование проведено на основании математической теории пластичности для весомой среды, удовлетворяющей условию пластичности Кулона-Мора с учетом работы на растяжение и ассоциированному закону течения. Основанием для выводов был анализ численных решений ряда конкретных краевых задач.

Summary

ANALYSIS OF KINEMATICALLY ADMISSIBLE SOLUTIONS OF EARTH-MOVING
PROCESSES IN THE CASES OF VARIOUS PUSHING WALL FORMS

In the paper kinematically admissible solutions for earthmoving processes due to various buckets of loading machines are presented. On the basis of the mathematical theory of plasticity, theoretical solutions are obtained by means of the associated flow rule and the Coulomb-Mohr limit state, mass density being taken into account. Analysis of numerical solutions of several boundary problems makes it possible to draw certain general conclusions.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
PAN WARSZAWA

Praca została złożona w Redakcji dnia 30 marca 1976 r.
