

## REDUKCJA MACIERZY SZTYWNOŚCI, MAS I TŁUMIENIA

KRZYSZTOF DEMS, JANUSZ LIPIŃSKI (ŁÓDŹ)

### 1. Wstęp

Stosowanie metody elementów skończonych prowadzi zawsze do rozwiązywania dużych układów równań, a w przypadku zagadnień drgań do konieczności wyznaczania wartości własnych macierzy o dużych rozmiarach. Można tu napotkać trudności natury numerycznej, jak również należy się liczyć z czasochłonnością obliczeń. Było to przyczyną podjęcia przez wielu autorów prac, mających na celu zmniejszenie rozmiarów macierzy występujących w konkretnym zagadnieniu [1, 2, 3, 7]. Najczęściej stosowanym postępowaniem jest metoda kompensacji niewiadomych, polegająca na podziale wszystkich niewiadomych na dwa zbiory i uzależnienie jednego z nich od drugiego, np. [2]. Należy tu podkreślić, że postępowanie to przeprowadzane jest po utworzeniu układu równań dla całej rozpatrywanej konstrukcji.

W pracy niniejszej podjęto próbę rozwiązania zagadnienia kompensacji na etapie znacznie wcześniejszym, bo już na etapie tworzenia macierzy związanych z pojedynczym elementem, ograniczając się do rozpatrywania zagadnień dwuwymiarowych. Rozpatrywane ciało modelować będziemy elementami izoparametrycznymi [3], wprowadzając pierwotnie jako stopnie swobody w każdym węźle siatki składowe przemieszczenia, ich pierwsze pochodne oraz drugie pochodne mieszane. Zapewni to ciągłość funkcji przemieszczeń oraz ich pierwszych pochodnych wzdłuż krawędzi stykających się elementów. Przyjęto dalej, że głównymi stopniami swobody będą jedynie przemieszczenia węzłów siatki, a ich odpowiednie pochodne podlegać będą kompensacji. Uzależnienie pochodnych od głównych stopni swobody dokonano w oparciu o metodę różnic skończonych. Uzyskano w ten sposób znaczne zmniejszenie globalnej liczby niewiadomych, którymi są teraz wyłącznie składowe przemieszczenia węzłów, co prowadzi w efekcie do znacznego zmniejszenia rozmiarów macierzy opisujących dane zagadnienie.

Stosowanie metody elementów skończonych do rozwiązywania zagadnień drgań sprowadza się w efekcie do rozwiązania równania różniczkowego w postaci macierzowej [3]

$$K\delta + C \frac{\partial}{\partial t} \delta + M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta + F = 0,$$

gdzie  $K$  — macierz sztywności konstrukcji;

$C$  — macierz tłumienia konstrukcji;

$M$  — macierz mas konstrukcji;

$F$  — macierz kolumnowa sił węzłowych w przypadku drgań wymuszonych;

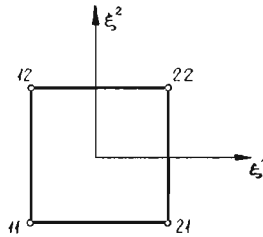
$\delta$  — macierz kolumnowa uogólnionych przemieszczeń węzłów.

Macierze  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{M}$  powstają jako odpowiednie sumy macierzy obliczanych dla kolejnych elementów. Rozwiązanie postawionego problemu sprowadza się przede wszystkim do wyznaczenia macierzy  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{C}$  i  $\mathbf{M}$  dla elementu. Dalsze postępowanie jest typowe dla klasycznej metody elementów skończonych.

## 2. Funkcje jednostkowe w elemencie

Rozpatrzmy prostokątny element w lokalnym układzie współrzędnych (rys. 1). Przyjmijmy, że w elemencie określona jest ciągła i różniczkowalna funkcja  $F(\xi^1, \xi^2)$ , którą zastępować będziemy jej przybliżeniem postaci

$$(1) \quad F(\xi^1, \xi^2) = \mathbf{Q}\mathbf{f}_e,$$



Rys. 1

gdzie  $\mathbf{f}_e$  jest macierzą kolumnową zawierającą węzłowe wartości przybliżanej funkcji i ewentualnie jej pochodne, a  $\mathbf{Q}$  jest macierzą wierszową funkcji jednostkowych. Funkcje jednostkowe wyrazimy poprzez wielomiany Hermite'a zgodnie z zależnością

$$(2) \quad Q^{ikpq}(\xi^1, \xi^2) = H^{pi}(\xi^1)H^{aq}(\xi^2), \quad \begin{array}{l} i, k = 1, 2, \\ p, q = 0, 1, \end{array}$$

gdzie

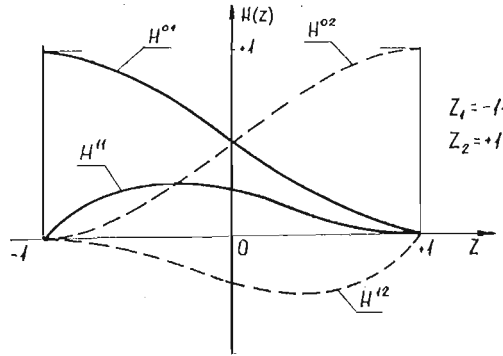
$$\left[ \frac{d^r H^{pi}(z)}{dz^r} \right]_{z=z_j} = \delta_{ij} \delta_{rp},$$

- $i$  — indeks węzła, dla którego funkcja jest określona,
- $j$  — indeks węzła, w którym oblicza się wartości funkcji,
- $p$  — rząd wielomianu Hermite'a,
- $r$  — rząd pochodnej względem  $z$ .

W szczególności, wielomiany rzędu zerowego i pierwszego określone dla zbioru dwóch punktów ( $z_1 = -1, z_2 = +1$ ) przyjmują postać

$$\begin{aligned} H^{01} &= \frac{1}{4}(z^3 - 3z + 2), & H^{11} &= \frac{1}{4}(z^3 - z^2 - z + 1), \\ H^{02} &= \frac{1}{4}(-z^3 + 3z + 2), & H^{12} &= \frac{1}{4}(-z^3 - z^2 + z + 1). \end{aligned}$$

Ich przebieg pokazany jest na rys. 2.

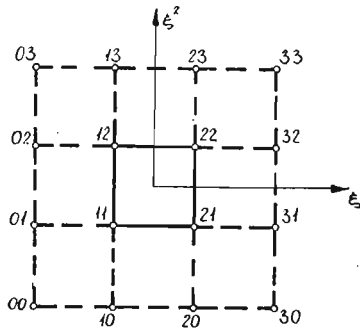


Rys. 2

Uwzględniając w (2) wspomniane wyżej wielomiany rzędu zerowego i pierwszego, żądamy równocześnie znajomości czterech parametrów określających funkcję  $F$  w każdym węźle, tzn. wartości funkcji, jej obu pierwszych pochodnych i pochodnej mieszanej względem zmiennej  $\xi^1$  i  $\xi^2$ . Zatem macierz  $f_e$  musi przyjąć postać

$$(3) \quad f_e = [f_{11}, f_{11,\xi^1}, f_{11,\xi^2}, f_{11,\xi^1\xi^2}, f_{12}, f_{12,\xi^1}, \dots, f_{22,\xi^1\xi^2}],$$

gdzie symbole po przecinku oznaczają różniczkowanie względem odpowiedniej zmiennej. Zgodnie z przyjętym założeniem, macierz  $f_e$  powinna zawierać jedynie wartości węzłowe przybliżanej funkcji. Zastąpimy zatem pochodne występujące w (3) ich różnicowymi



Rys. 3

przybliżeniami zależnymi jedynie od węzłowych wartości funkcji. W tym celu dołączamy do rozpatrywanego elementu elementy sąsiednie (rys. 3). Pochodne węzłowo-rozpatrywanej funkcji zastąpimy zatem przybliżeniami:

$$(4) \quad \begin{aligned} f_{ik,\xi^1} &= \frac{1}{4} (f_{i+1,k} - f_{i-1,k}), \\ f_{ik,\xi^2} &= \frac{1}{4} (f_{i,k+1} - f_{i,k-1}), \\ f_{ik,\xi^1\xi^2} &= \frac{1}{16} (f_{i+1,k+1} + f_{i-1,k-1} - f_{i+1,k-1} - f_{i-1,k+1}). \end{aligned}$$

Wykorzystując (2) i (4) w zależności (1), otrzymamy

$$(5) \quad F(\xi^1, \xi^2) = \bar{Q}f_e,$$

gdzie  $f_e$  jest macierzą zawierającą jedynie węzłowe wartości funkcji w rozpatrywanym elemencie i elementach sąsiednich, natomiast  $\bar{Q}$  jest macierzą przekształconych funkcji jednostkowych o postaci

$$(6) \quad \bar{Q}^{ik}(\xi^1, \xi^2) = R^i(\xi^1)R^k(\xi^2), \quad i, k = 0, 1, 2, 3,$$

gdzie funkcja  $R$  wyrażona jest poprzez wielomiany Hermite'a

$$R^0 = \frac{1}{4}H^{11}, \quad R^2 = -\frac{1}{4}H^{11} - H^{20},$$

$$R^1 = \frac{1}{4}H^{21} - H^{10}, \quad R^3 = -\frac{1}{4}H^{21}.$$

Dla elementu z rys. 3 funkcje te mają postać

$$R^0(z) = \frac{1}{16}(z^3 - z^2 - z + 1),$$

$$R^1(z) = \frac{1}{16}(-3z^3 + z^2 + 11z - 9),$$

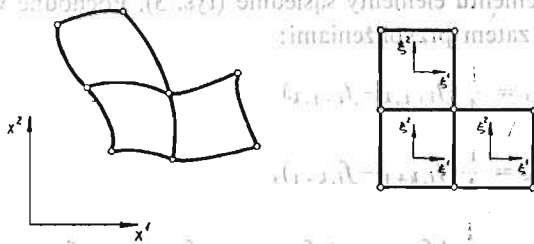
$$R^2(z) = \frac{1}{16}(3z^3 + z^2 - 11z - 9),$$

$$R^3(z) = \frac{1}{16}(-z^3 - z^2 + z + 1).$$

Postępowanie opisane powyżej powoduje, że rozpatrywana funkcja, której przybliżenie dane jest przez (5), przy przejściu z elementu do elementu zachowuje ciągłość swojej wartości, obu pierwszych pochodnych i drugiej pochodnej mieszanej.

### 3. Transformacja układu współrzędnych

Przyjmujemy, że rozpatrywany obszar podzielony został na krzywoliniowe elementy czworokątne (rys. 4). W każdym elemencie wprowadzony został lokalny układ współ-



Rys. 4

rzędnych  $\xi^1 \xi^2$ , przy czym transformacja z układu globalnego do lokalnego następuje według zależności

$$(7) \quad \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} = \hat{Q} \begin{bmatrix} x_e^1 \\ x_e^2 \end{bmatrix},$$

gdzie  $x_e^1$   $x_e^2$  są macierzami współrzędnych węzłów w układzie globalnym,  $x^1$  i  $x^2$  są współrzędnymi dowolnego punktu elementu, a macierz  $\hat{Q}$  ma postać

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} \bar{Q} & 0 \\ 0 & \bar{Q} \end{bmatrix}.$$

Biorąc pod uwagę wspomnianą wyżej transformację, wykazuje się, że dowolna funkcja o postaci (5), określona poprzez zmienne lokalne, zachowuje ciągłość swojej wartości wzdłuż krawędzi sąsiednich elementów krzywoliniowych i obu pierwszych pochodnych względem zmiennych globalnych.

#### 4. Wyznaczanie macierzy sztywności, mas i tłumienia

Składowe przemieszczenia wewnątrz elementu określać będziemy w lokalnym układzie współrzędnych, przyjmując je w postaci podobnej do (5)

$$(8) \quad \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{bmatrix} = \hat{Q} \delta_e, \quad \hat{Q} = \begin{bmatrix} \bar{Q} & 0 \\ 0 & \bar{Q} \end{bmatrix}, \quad \delta_e = \begin{bmatrix} \delta_e^1 \\ \delta_e^2 \end{bmatrix},$$

gdzie  $\hat{Q}$  jest macierzą funkcji jednostkowych (6), a  $\delta_e$  jest macierzą przemieszczeń węzłów elementu rozpatrywanego i elementów sąsiednich (rys. 3).

Tak określone przemieszczenia zachowują ciągłość swoich wartości i obu pierwszych pochodnych względem zmiennych globalnych wzdłuż krawędzi sąsiednich elementów.

Wykorzystując funkcję przemieszczeń (8), macierz sztywności przedstawimy w znanej postaci [3]

$$(9) \quad k_e = \iint \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{D}} \mathbf{B} dx^1 dx^2,$$

gdzie  $\bar{\mathbf{D}}$  jest macierzą sprężystości, a  $\mathbf{B}$  macierzą określającą związek między odkształceniami w dowolnym punkcie elementu i przemieszczeniami węzłowymi  $\delta_e$ . Szczegółowe wyznaczanie współczynników tej macierzy dla elementów tarczowych i płytowych podane jest w pracach [5, 6].

Macierz mas elementu określona jest zależnością [3]

$$(10) \quad m_e = \int_{V_e} \hat{Q}^T \rho \hat{Q} dV,$$

gdzie  $\hat{Q}$  jest macierzą funkcji jednostkowych (6), a  $\rho$  masą właściwą.

Macierz tłumienia określamy z kolei jako [3]

$$(11) \quad c_e = \int_{V_e} \hat{Q}^T \mu \hat{Q} dV,$$

gdzie  $\hat{Q}$  jest, jak poprzednio, macierzą funkcji jednostkowych, a  $\mu$  współczynnikiem tłumienia.

## 5. Przykład numeryczny

Celem sprawdzenia przydatności proponowanej metody, wykorzystano ją do wyznaczenia częstości drgań własnych i postaci drgań cienkich płyt. W tym przypadku funkcje ugięcia (8) upraszczają się do postaci

$$(12) \quad w(\xi^1, \xi^2) = \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{w}_e,$$

gdzie  $\mathbf{w}_e$  jest macierzą kolumnową przemieszczeń węzłów (tj. ugięć prostopadłych do powierzchni płyty) elementu i jego sąsiadów (rys. 3), a  $\bar{\mathbf{Q}}$  jest macierzą funkcji jednostkowych. Zakładając, że rozpatrywać będziemy elementy izotropowe o stałej grubości, współczynniki macierzy sztywności określone na podstawie zależności (9) otrzymujemy w postaci [5]

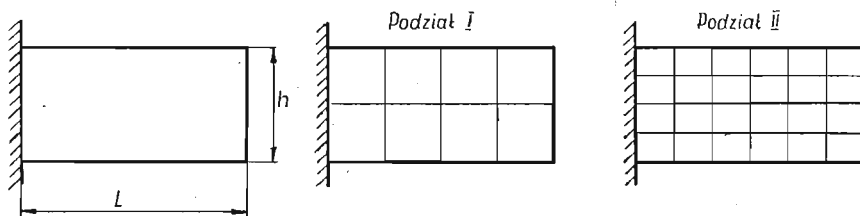
$$(13) \quad k_e^{ijpq} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} D [(\bar{Q}_{,x^1x^1}^{ip} + \bar{Q}_{,x^2x^2}^{ip})(\bar{Q}_{,x^1x^1}^{jq} + \bar{Q}_{,x^2x^2}^{jq}) - \\ - (1-\nu)(\bar{Q}_{,x^1x^1}^{ip} \bar{Q}_{,x^2x^2}^{jq} + \bar{Q}_{,x^2x^2}^{ip} \bar{Q}_{,x^1x^1}^{jq}) - 2\bar{Q}_{,x^1x^2}^{ip} \bar{Q}_{,x^1x^2}^{jq}] J d\xi^1 d\xi^2,$$

gdzie  $J$  jest jacobianem przekształcenia (7),  $D$  — sztywnością elementu płyty, a drugie pochodne funkcji jednostkowych względem zmiennych globalnych wyznaczmy w oparciu o pochodne tych funkcji względem zmiennych lokalnych  $\xi^1, \xi^2$  i wzór transformacyjny (7). Współczynniki macierzy mas określone wzorem (10) przyjmują postać

$$(14) \quad m_e^{ijpq} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \rho t \bar{Q}^{ip} \bar{Q}^{jq} J d\xi^1 d\xi^2,$$

gdzie  $\rho$  jest masą właściwą,  $t$  — grubością elementu płyty oraz  $J$  — jacobianem przekształcenia.

Obliczenia zostały zrealizowane w pojedynczej precyzji na EMC ODRA 1305, wykorzystując biblioteczny podprogram obliczania wartości własnych oparty na metodzie HOUSEHOLDERA. Rozwiązano przykładowo zagadnienie drgań własnych prostokątnej płyty utwierdzonej jedną krawędzią, przy uwzględnieniu różnych stosunków długości boków, wprowadzając dwa sposoby podziału płyty na elementy (rys. 5).



Rys. 5

W tablicach 1, 2, 3 zestawiono wartości częstości drgań własnych uzyskane dla płyt o stosunku boków  $L/h = 1, 2, 5$  oraz porównano je z wynikami uzyskanymi przez BARTONA [4], PLUNKETTA [3] i ZIENKIEWICZA [3].

Tablica 1  $L/h = 1$

Postać drgań	$\omega/\sqrt{D qtL^4}$			
	wg metody prezentowanej w pracy		wg Bartona	
	Podział		met. Ritza	Doświadczalna
	I	II		
1	2,995	3,427	3,494	3,37
2	7,900	8,244	8,547	8,26
3	20,089	21,864	21,44	20,55
4	27,475	28,627	27,46	27,15
5	29,803	30,959	31,17	29,75
6	55,701	55,385		
7	62,721	68,146		
8	71,020	72,089		

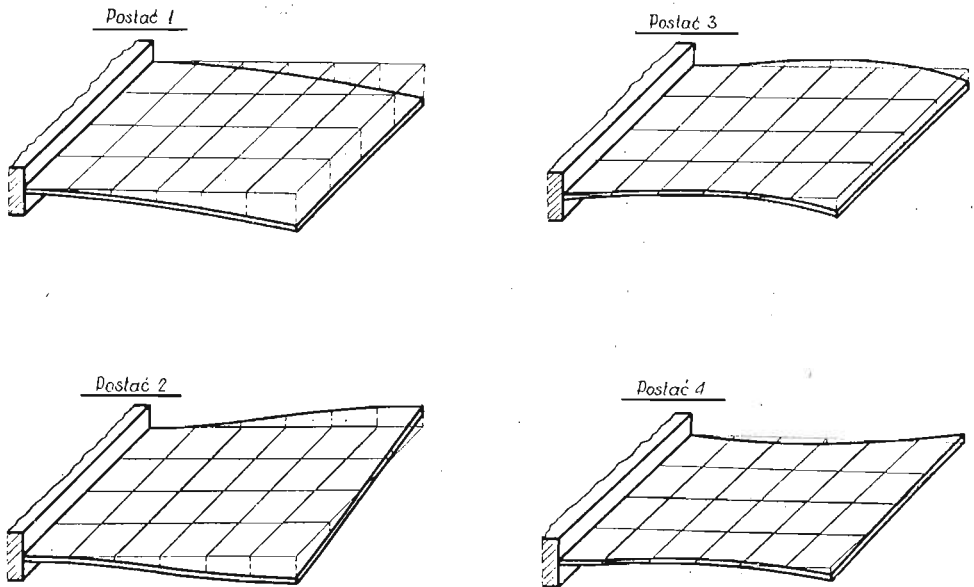
Tablica 2  $L/h = 2$

Postać drgań	$\omega/\sqrt{D qtL^4}$					
	wg metody prezentowanej w pracy		wg Bartona		Doświadczalnie Plunketta	wg Zienkiewicza 64 elem.
	podział		met. Ritza	Doświadczalna		
	I	II				
1	3,341	3,471	3,472	3,36	3,50	3,44
2	14,574	14,801	14,93	14,43	14,50	14,77
3	22,528	23,026	21,01	20,86	21,70	21,50
4	48,851	49,281	48,71	46,90	48,10	48,19
5	65,150	68,194	94,49	93,99	60,50	60,54
6	93,807	98,199			92,30	91,79
7	97,876	99,016			92,80	92,78
8	123,435	130,066			118,70	119,34

Tablica 3  $L/h = 5$

Postać drgań	$\omega/\sqrt{D qtL^4}$			
	wg metody prezentowanej w pracy		wg Bartona	
	Podział		met. Ritza	Doświadczalna
	I	II		
1	3,490	3,458	3,45	3,32
2	23,845	23,133	21,52	20,88
3	34,109	34,045	34,73	32,40
4	68,362	69,592	105,9	97,35
5	105,841	104,998		
6	125,002	139,442		
7	190,907	185,953		
8	278,957	229,001		

Rys. 6 przedstawia przykładowo cztery pierwsze postacie drgań dla płyty o stosunku boków  $L/h = 2$  przy II sposobie podziału.



Rys. 6

Jako dane liczbowe przyjęto:

moduł Younga  $E = 2,11 \times 10^{11}$  [N/m<sup>2</sup>],

liczba Poissona  $\nu = 0,3$ ,

gęstość  $\rho = 7,83 \times 10^3$  [kg/m<sup>3</sup>],

grubość płyty  $t = 2,54 \times 10^{-3}$  [m],

długość płyty  $L = 5,08 \times 10^{-2}$  [m].

## 6. Wnioski końcowe

Przedstawiona metoda obliczeń stwarza nową możliwość redukcji stopni swobody w zagadnieniach drgań rozwiązywanych metodą elementów skończonych. W klasycznym ujęciu, stosując elementy izoparametryczne, w każdym węzle siatki wprowadza się dla każdej składowej przemieszczenia cztery nie znane początkowo parametry (przemieszczenia i odpowiednie pochodne). Stosując postępowanie opisane w punkcie 2, redukujemy liczbę nie znanych parametrów dla każdej składowej przemieszczenia do jednego (wartość przemieszczenia). Zatem globalna liczba niewiadomych dla wszystkich węzłów siatki maleje czterokrotnie. Prowadzi to do operowania macierzami o czterokrotnie mniejszych wymiarach. Jest to główną zaletą proponowanej metody. Uzyskane wyniki numeryczne wykazały zadawalającą zgodność z wynikami uzyskiwanymi przez różnych autorów na drodze teoretycznej i doświadczalnej, co pozwala wnioskować o przydatności proponowanej koncepcji.



## Literatura cytowana w tekście

1. B. IRONS, *Eigenvalue economisers in vibration problems*, J. Roy. Ae. Soc., **67**, (1963), 526.
2. R. J. GUYAN, *Reduction of stiffness and mass matrices*, J.A.I.A.A., **3**, (1965), 380.
3. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.
4. M. V. BARTON, *Vibration of rectangular and skew cantilever plates*, J. Appl. Mech., **18**, (1951), 129 - 34.
5. K. DEMS, J. LIPIŃSKI, *Zastosowanie różnic skończonych do tworzenia macierzy sztywności w metodzie elementów skończonych na przykładzie zginanej płyty*, Mech. Teoret. Stos., **4**, **12**, (1974), 547 - 60.
6. K. DEMS, J. LIPIŃSKI, *Application of finite differences for solving the two-dimensional elasticity problem by means of the finite element method*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., **6**, (1975), 49 - 58.
7. R. BATHE, E. WILSON, *Large eigenvalue problems in dynamic analysis*, Proc. Am. Soc. Civ. Eng., EM6, **98** (1972).

## Р е з ю м е

СОКРАЩЕНИЕ РАЗМЕРОВ МАТРИЦ ЖЕСТКОСТИ, МАСС  
И ДЕМПФИРОВАНИЯ

В работе представлен способ сокращения размеров матриц жесткости, масс и демпфирования, используемых при решении задач динамики сплошной среды методом конечных элементов. Такое сокращение достигнуто путем использования конечных разностей при построении этих матриц.

## S u m m a r y

## REDUCTION OF THE STIFFNESS, MASS AND DAMPING MATRICES

The paper deals with the problem of reduction of the stiffness, mass and damping matrices, which are due to the application of the finite element method to solving the dynamic problems of continua. Reduction of the dimensions of the matrices is obtained by means of the finite differences used for constructing the matrices in question.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 25 czerwca 1976 r.*