

DRGANIA WŁASNE BELEK Z UWZGLĘDNIENIEM WPŁYWU ŚCINANIA

ŚLAWOMIR JANECKI (GDAŃSK)

1. Wstęp

W praktyce inżynierskiej, przy ocenie dynamicznego zachowania się szeregu elementów konstrukcyjnych zastępuje się je modelami jednowymiarowymi (pręty, belki). Klasyczna teoria tych modeli opiera się na szeregu hipotez kinematycznych, będących w swej istocie wewnętrznymi więzami geometrycznymi, nakładanymi na ruch ciała jako trójwymiarowego ośrodka ciągłego. W zależności od przyjętych hipotez można otrzymać różne modele, a na ich podstawie różne równania opisujące ruch.

Przyjmowane hipotezy kinematyczne mogą prowadzić do modeli, które nie nadają się do opisu zjawisk falowych, bądź do modeli prowadzących do równań falowych. Przykładem pierwszych jest model belki Eulera-Bernoulliego, a drugich model belki Timoszenki. Model Eulera-Bernoulliego, oparty na hipotezie płaskich i prostopadłych do osi belki przekrojów po jej odkształceniu, stosuje się do wyznaczania najniższych częstości drgań poprzecznych belek smukłych. Model ten nie obejmuje drugorzędnych efektów powodowanych obrotem przekrojów poprzecznych podczas ruchu oraz naprężeniami ścinającymi. Dla belek mało smukłych, posiadających wymiary poprzeczne, porównywalne z ich długością, wspomniane wyżej drugorzędne wpływy mogą mieć duże znaczenie, zwłaszcza przy badaniu rozchodzenia się fal oraz drgań o wyższych częstościach. Poprawkę uwzględniającą obrót przekrojów poprzecznych podczas ruchu belki wprowadził RAYLEIGH, natomiast poprawkę uwzględniającą wpływ sił poprzecznych na ugięcie wprowadził TIMOSZENKO [1].

Problematyką związaną z modelem zaproponowanym przez TIMOSZENKĘ zajmowało się szereg badaczy. Charakter falowy równań ruchu opartych na powyższym modelu badano w pracach [2, 3, 4], drgania własne belki w [2—13], drgania wymuszone w [14, 15, 16]. Pełniejszy przegląd poruszanych tu zagadnień został dokonany w [17]. W pracach [18—21] zajmowano się odpowiednim doбором, występującego w równaniach Timoszenki, współczynnika ścinania charakteryzującego nierównomierność rozkładu naprężeń stycznych w przekrojach poprzecznych belki. Szereg prac poświęcono również doskonaleniu modelu. Wychodząc z trójwymiarowej, zlinearyzowanej teorii sprężystości przy ogólniejszych założeniach dotyczących deformacji w pracach [19—24] otrzymano nowe sformułowania teorii.

W niniejszej pracy, opierając się na ogólniejszych założeniach dotyczących deformacji przekrojów poprzecznych, podano algorytm budowania bardziej dokładnych wariantów

teorii drgań poprzecznych belek uwzględniających ścinanie. Wyprowadzony układ równań może być stosowany do badania dynamicznego zachowania się belek krótkich. Układ ten w szczególnym przypadku sprowadza się do układu Timoszenki.

2. Spis ważniejszych oznaczeń

- A, I pole powierzchni i moment bezwładności przy zgięciu przekrojów poprzecznych belki,
 $I_{1x_i}, I_{x_i x_j}$ momenty bezwładności przekrojów poprzecznych belki występujące przy ścinaniu ($i, j = 1, 2, \dots, R$),
 L, λ długość i smukłość belki,
 ρ, E, G gęstość materiału oraz moduły sprężystości podłużnej i postaciowej,
 u_0 przemieszczenie całkowite punktu materialnego znajdującego się na osi belki,
 ω, γ_i kąty zgięcia i ścinania ($i = 1, 2, \dots, R$),
 Q, M, H_j siła poprzeczna, moment gnący i momenty ścinania,
 q, m, h_j obciążenia zewnętrzne belki ($j = 1, 2, \dots, R$),
 p, k_n bezwymiarowa i względna częstość drgań własnych,
 x_k, t współrzędne miejsca i czasu ($k = 1, 2, 3$),
 $\varepsilon_{ij}, z_{ij}, \eta_j$ bezwymiarowe charakterystyki geometryczne przekroju poprzecznego belki charakteryzujące wpływ deplanacji przy ścinaniu ($i, j = 1, 2, \dots, R$),
 χ_j funkcja deplanacji ($j = 1, 2, \dots, R$).

3. Model Timoszenki

W celu prześledzenia założeń przy ustalaniu modelu zgięcia belki z uwzględnieniem ścinania i momentów obrotowych wyprowadzimy równania ruchu Timoszenki [1]. Aby tego dokonać rozważymy elementarny odcinek belki (rys. 1, 2). Dla prostoty ograniczymy się do rozważania odkształcenia odbywającego się w jednej płaszczyźnie.

Pod wpływem obciążeń oś elementu belki wygina się i tworzy z osią OX_3 kąt

$$(1) \quad \alpha = \omega + \gamma,$$

gdzie ω, γ są odpowiednio kątem powstałym w wyniku zginania i ścinania (rys. 1). Przy założeniu małych odkształceń, całkowity kąt pochylenia materialnej osi belki można przyjąć

$$(2) \quad \alpha = \frac{\partial u_0}{\partial x_3},$$

gdzie $u_0(x_3, t)$ jest przemieszczeniem całkowitym punktu materialnego znajdującego się na osi belki.

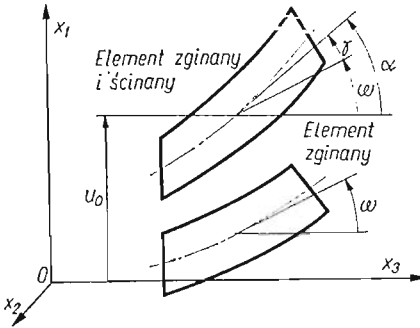
W teorii Timoszenki, przy utrzymaniu słuszności hipotezy płaskich przekrojów, związki fizyczne zachodzące pomiędzy siłami wewnętrznymi i odkształceniami przyjmuje się następująco:

$$(3) \quad M = EJ \frac{\partial \omega}{\partial x_3}, \quad Q = \kappa GA \gamma,$$

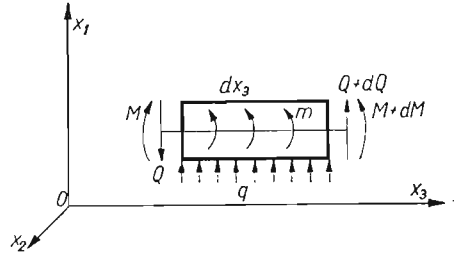
gdzie M, Q są odpowiednio momentem gnącym i siłą poprzeczną, κ współczynnikiem ścinania uwzględniającym nierównomierny rozkład naprężeń stycznych w przekroju poprzecznym belki.

Na podstawie rys. 2 można ustalić następujące równania równowagi elementarnego odcinka belki

$$(4) \quad \frac{\partial Q}{\partial x_3} + q = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial x_3} + Q + m = 0.$$



Rys. 1. Schemat odkształcenia elementu belki



Rys. 2. Schemat obciążeń elementu belki

Kiedy obciążenia zewnętrzne są obciążeniami masowymi bezwładnościowymi, to wtedy

$$(5) \quad q = -\rho A \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}, \quad m = -\rho J \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}.$$

Wprowadzając bezwymiarowe zmienne

$$(6) \quad \zeta = \frac{x_3}{L}, \quad \tau = \frac{c_E}{L} t, \quad u = \frac{u_0}{L},$$

na podstawie związków (1)–(5) można otrzymać następujący układ równań:

$$(7) \quad \frac{\partial^4 \omega}{\partial \zeta^4} - \frac{\partial^4 \omega}{\partial \zeta^2 \partial \tau^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (\omega + \gamma) = 0,$$

$$\kappa \left(\frac{c_G}{c_E} \right)^2 \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (\omega + \gamma) = 0,$$

dla kątów zgięcia ω i ścinania γ , albo równanie

$$(8) \quad \frac{\partial^4 u}{\partial \zeta^4} - \left(1 + \frac{1}{\bar{\mu}^2} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial \zeta^2 \partial \tau^2} + \frac{1}{\bar{\mu}^2} \frac{\partial^4 u}{\partial \tau^4} + \lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0$$

dla przemieszczenia bezwymiarowego u .

W napisanych wyżej równaniach wprowadzono następujące oznaczenia:

$$(9) \quad \lambda = \frac{L}{\sqrt{I/A}}, \quad \bar{\mu}^2 = \kappa \left(\frac{c_G}{c_E} \right)^2, \quad c_G^2 = \frac{G}{\rho}, \quad c_E^2 = \frac{E}{\rho},$$

gdzie λ jest smukłością belki, natomiast c_E i c_G są odpowiednio prędkością rozchodzenia się fal wzdłużnych i poprzecznych.

Równanie (8) w literaturze przedmiotu znane jest jako równanie Timoszenki.

4. Uogólniony model zgięcia poprzecznego

Przy ustalaniu modelu belki i wyprowadzeniu równań ruchu przyjmować będziemy, że:

1) rozważana belka jest prosta i ma stałe, bisymetryczne przekroje poprzeczne;
2) belka jest wykonana z materiału jednorodnego i izotropowego, dla którego ważne jest prawo Hooke'a;

3) ruch belki odbywa się w jednej płaszczyźnie; w trakcie ruchu przekroje poprzeczne pierwotnie płaskie obracają się i deplanują, nie zmieniając swych wymiarów poprzecznych;

4) odkształcenia i przemieszczenia są na tyle małe, że opis ruchu zostanie dokonany na stanie nieodkształconym belki;

5) naprężenia styczne działające w płaszczyźnie przekroju poprzecznego belki oraz naprężenia normalne działające z tego przekroju będziemy uważać za istotne, natomiast pozostałe za drugorzędne i będziemy je pomijać przy ustalaniu związków fizycznych;

6) rozkłady naprężeń w kierunku poprzecznym po szerokości belki będziemy przyjmować jako niezmiennie.

Zgodnie z powyższymi założeniami składowe przemieszczenia dowolnej cząstki belki znajdującej się przed odkształceniem w miejscu $P(x_1)$ przekroju $x_3 = \text{const}$, można przyjąć w postaci

$$(10) \quad u_1 = u_0(x_3, t), \quad u_2 \equiv 0, \quad u_3 = -x_1 \omega(x_3, t) + \sum_{i=1}^R \chi_i(x_1) \gamma_i(x_3, t),$$

gdzie $\omega(x_3, t)$, $\gamma_i(x_3, t)$ są nieznanymi funkcjami określającymi sztywny obrót i deplanację przekroju wzdłuż długości belki, natomiast $\chi_i(x_1)$ są znanymi funkcjami, spełniającymi określone warunki i charakteryzującymi rozkład deplanacji w danym przekroju.

Znając składowe przemieszczenia możemy wyznaczyć składowe tensora odkształcenia. Zgodnie z założeniami, ograniczając się do teorii zlinearyzowanej mamy

$$(11) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{11} = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{23} = 0, \\ \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(-\omega + u'_0 + \sum_{i=1}^R \frac{\partial \chi_i}{\partial x_1} \gamma_i \right), \quad \varepsilon_{33} = -x_1 \omega' + \sum_{i=1}^R \chi_i \gamma_i', \end{aligned}$$

gdzie „primem” oznaczono pochodną względem zmiennej x_3 .

Przyjmując, że pochylenie całkowite osi pręta jest

$$(12) \quad u'_0 = \omega + \sum_{i=1}^R \gamma_i,$$

to niezerowe składowe tensora odkształcenia można przepisać

$$(13) \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^R \left(1 + \frac{\partial \chi_i}{\partial x_1} \right) \gamma_i, \quad \varepsilon_{33} = -x_1 \omega' + \sum_{i=1}^R \chi_i \gamma_i'.$$

Na skutek odkształcania się belki pod wpływem obciążeń zewnętrznych pojawiają się wewnętrzne siły sprężystości. Uwzględniając założenia dotyczące materiału, z którego wykonana jest belka, istotne składowe tensora naprężenia możemy przyjąć

$$(14) \quad \tau_{13} = 2G\varepsilon_{13}, \quad \tau_{33} = E\varepsilon_{33}.$$

Przy powyższych ustaleniach i poczynionych założeniach równania zgięcia belki wyrowadzimy z ogólnych równań ruchu ciał smukłych opisanych dowolnymi modelami jednowymiarowymi ośrodka ciągłego [26]. Wspomniane równania mają postać

$$(15) \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_3} - \mathbf{Q}^* + \mathbf{h} + \tilde{\mathbf{h}} = \mathbf{0},$$

gdzie \mathbf{H} i \mathbf{Q}^* są wektorami uogólnionych sił wewnętrznych występujących w przekrojach poprzecznych, natomiast \mathbf{h} i $\tilde{\mathbf{h}}$ są wektorami obciążeń powierzchniowych i masowych. Wspomniane wektory określone są następująco:

$$(16) \quad \mathbf{H} = \int_A (\mathbf{F}\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{e}_3) U dA, \quad \mathbf{Q}^* = \int_A \text{tr}(\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{F}^T \text{Grad } \mathbf{U}) dA, \\ \tilde{\mathbf{h}} = \int_A \varrho(\mathbf{f} - \ddot{\mathbf{u}}) U dA,$$

gdzie \mathbf{F} , $\tilde{\mathbf{T}}$, ϱ , \mathbf{f} są kolejno gradientem deformacji, symetrycznym tensorem naprężenia Pioli-Kirchhoffa, gęstością materiału i intensywnością rozkładu obciążeń masowych. Nadto tensor

$$(17) \quad \mathbf{U} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{q}},$$

gdzie

$$(18) \quad \mathbf{u} = \Phi(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{q}(x_3, t)).$$

Funkcja wektorowa Φ jest funkcją znaną, $\hat{\mathbf{x}}$ jest wektorem pozycyjnym w obszarze A przekroju poprzecznego belki w stanie niezdeformowanym, \mathbf{q} jest wektorem współrzędnych uogólnionych.

Przyjmując w rozważanym przypadku wektor współrzędnych uogólnionych następująco:

$$(19) \quad \mathbf{q} = \text{col}(u_0, \omega, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_R),$$

składowe tensora \mathbf{U} na podstawie (17) można napisać

$$(20) \quad U^{rs} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & -x_1, & \chi_1, & \dots, & \chi_R \end{bmatrix}.$$

Wtedy ze związków (16) dla przypadku zlinearyzowanego otrzymujemy definicje składowych sił wewnętrznych:

$$(21) \quad Q = \int_A \tau_{13} dA, \quad M = - \int_A x_1 \tau_{33} dA, \\ H_j = \int_A \chi_j \tau_{33} dA, \quad Q_j^* = \int_A \frac{\partial \chi_j}{\partial x_1} \tau_{13} dA, \\ (j = 1, 2, \dots, R).$$

Z ogólnych równań (15) otrzymujemy skalarne równania ruchu:

$$(22) \quad \begin{aligned} Q' + q + \tilde{q} &= 0, \\ M' + Q + m + \tilde{m} &= 0, \\ H'_j - Q_j^* + h_j + \tilde{h}_j &= 0, \\ (j &= 1, 2, \dots, R). \end{aligned}$$

Wykorzystując zależności (13) i (14) siły wewnętrzne (21) można uzależnić od odkształceń. Otrzymujemy

$$(23) \quad \begin{aligned} Q &= G \sum_{i=1}^R S_i \gamma_i, & M &= E \left(I \omega' - \sum_{i=1}^R I_{1x_i} \gamma_i' \right), \\ H_j &= E \left(-I_{1x_j} \omega' + \sum_{i=1}^R I_{x_i x_j} \gamma_i' \right), \end{aligned}$$

gdzie

$$(24) \quad \begin{aligned} S_i &= \int_A \left(1 + \frac{\partial \chi_i}{\partial x_1} \right) dA, & I &= \int_A x_1^2 dA, \\ I_{1x_j} &= \int_A x_1 \chi_j dA, & I_{x_i x_j} &= \int_A \chi_i \chi_j dA, \\ & & (i, j &= 1, 2, \dots, R) \end{aligned}$$

są geometrycznymi charakterystykami przekroju poprzecznego belki.

Funkcje $\chi_i(x_1)$ można dobrać w taki sposób, aby dla każdego i było

$$(25) \quad S_i = kA,$$

gdzie k jest pewną liczbą, którą określimy w dalszej części pracy.

Wtedy siłę poprzeczną można napisać jako

$$(26) \quad Q = kGA \sum_{i=1}^R \gamma_i.$$

Siły wewnętrzne Q_j^* wygodnie jest przedstawić następująco:

$$(27) \quad Q_j^* = G_j - Q,$$

gdzie

$$(28) \quad \begin{aligned} G_j &= GA \sum_{i=1}^R \kappa_{ij} \gamma_i, \\ \kappa_{ij} &= \frac{1}{A} \int_A \left(1 + \frac{\partial \chi_i}{\partial x_1} \right) \left(1 + \frac{\partial \chi_j}{\partial x_1} \right) dA \\ & & (i, j &= 1, 2, \dots, R). \end{aligned}$$

Wykorzystując (10), (16) i (20) oraz przyjmując $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, obciążenia masowe bezwładnościowe można napisać:

$$(29) \quad \begin{aligned} \tilde{q} &= -\varrho A \ddot{u}_0, & \tilde{m} &= -\varrho \left(I \ddot{\omega} - \sum_{i=1}^R I_{1x_i} \ddot{\gamma}_i \right), \\ \tilde{h}_j &= \varrho \left(I_{1x_j} \ddot{\omega} - \sum_{i=1}^R I_{x_i x_j} \ddot{\gamma}_i \right) \\ & (j = 1, 2, \dots, R), \end{aligned}$$

gdzie kropką oznaczono pochodną względem zmiennej t . Wprowadzając bezwymiarowe zmienne, siły wewnętrzne i obciążenia:

$$(30) \quad \begin{aligned} \zeta &= \frac{x_3}{L}, & \tau &= \frac{c_E}{L} t, & u &= \frac{u_0}{L}, \\ \bar{Q} &= \frac{Q}{EI/L^2}, & \bar{M} &= \frac{M}{EI/L}, & \bar{H}_j &= \frac{H_j}{EI_{x_j x_j} L}, & \bar{G}_j &= \frac{G_j}{EI_{x_j x_j} L^2}, \\ \bar{q} &= \frac{q}{EI/L^3}, & \bar{m} &= \frac{m}{EI/L^2}, & \bar{h}_j &= \frac{h_j}{EI_{x_j x_j} L^2} \end{aligned}$$

oraz bezwymiarowe parametry

$$(31) \quad \begin{aligned} \lambda &= \frac{L}{\sqrt{I/A}}, & \varepsilon_{ij} &= \frac{I_{x_j x_j}}{I}, & \eta_i &= \frac{I_{1x_i}}{I}, \\ & (i, j = 1, 2, \dots, R) \end{aligned}$$

Wyprowadzone wyżej równania (22) i związki (12), (23), (26), (28) i (29) można przedstawić w postaci bezwymiarowej.

Związek kinematyczny

$$(32) \quad \frac{\partial u}{\partial \zeta} = \omega + \sum_{i=1}^R \gamma_i.$$

Równania ruchu:

$$(33) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \zeta} + \bar{q} &= 0, & \frac{\partial \bar{M}}{\partial \zeta} + \bar{Q} + \bar{m} &= 0, & \frac{\partial \bar{H}_j}{\partial \zeta} + \frac{1}{\varepsilon_{jj}} \bar{Q} - \bar{G}_j + \bar{h}_j &= 0, \\ & (j = 1, 2, \dots, R) \end{aligned}$$

po pominięciu obciążeń powierzchniowych.

Siły wewnętrzne:

$$(34) \quad \begin{aligned} \bar{Q} &= k \lambda^2 \left(\frac{c_G}{c_E} \right)^2 \sum_{i=1}^R \gamma_i, & \bar{M} &= -\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(-\omega + \sum_{i=1}^R \eta_i \gamma_i \right), \\ \bar{H}_j &= \frac{1}{\varepsilon_{jj}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(-\eta_j \omega + \sum_{i=1}^R \varepsilon_{ij} \gamma_i \right), & \bar{G}_j &= \lambda^2 \left(\frac{c_G}{c_E} \right)^2 \frac{1}{\varepsilon_{ij}} \sum_{i=1}^R \varkappa_{ij} \gamma_i. \end{aligned}$$

Obciążenia masowe:

$$(35) \quad \bar{q} = -\lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}, \quad \bar{m} = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(-\omega + \sum_{i=1}^R \eta_i \gamma_i \right),$$

$$\bar{h}_j = -\frac{1}{\varepsilon_{ij}} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(-\eta_j \omega + \sum_{i=1}^R \varepsilon_{ij} \gamma_i \right).$$

Do jednoznacznego opisu ruchu niezbędne są jeszcze odpowiednie warunki dla sił wewnętrznych i przemieszczeń na końcach belki. W ogólnym przypadku dla sił wewnętrznych na powierzchniach czołowych dowolnego modelu jednowymiarowego mamy (por. [26])

$$(36) \quad \mathbf{H} = \varepsilon \hat{\mathbf{h}}, \quad \hat{\mathbf{h}} = \int_A \hat{\mathbf{p}} U dA,$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$, natomiast $\hat{\mathbf{p}}$ jest wektorem obciążenia zewnętrznego przekrojów krańcowych; gdy $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$, to wtedy $\mathbf{H} = \mathbf{0}$.

W rozpatrywanym zadaniu

$$(37) \quad \mathbf{H} = \text{col}(Q, M, H_1, \dots, H_R).$$

Z punktu widzenia zastosowań praktyczne znaczenie mają warunki dla swobodnego, podpartego przegubowo i utwierdzonego końca belki.

W poszczególnych przypadkach mamy:

$$(38) \quad Q = M = H_j = 0,$$

na końcu swobodnym,

$$(39) \quad u = M = H_j = 0,$$

na końcu podpartym przegubowo oraz

$$(40) \quad u = \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$$

na końcu utwierdzonym.

5. Przypadki szczególne

Obecnie rozpatrzmy pewne przypadki szczególne wynikające z przedstawionych powyżej rozważań.

Eliminując z dwu ostatnich równań (33) siłę poprzeczną wyznaczoną z równania pierwszego oraz wykorzystując zależności (32), (34) i (35), układ równań ruchu można sprowadzić do postaci:

$$(41) \quad \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} \left(-\omega + \sum_{i=1}^R \eta_i \gamma_i \right) - \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \tau^2} \left(-\omega + \sum_{i=1}^R \eta_i \gamma_i \right) - \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(\omega + \sum_{i=1}^R \gamma_i \right) = 0,$$

$$\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} \left(-\eta_j \omega + \sum_{i=1}^R \varepsilon_{ij} \gamma_i \right) - \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \tau^2} \left(-\eta_j \omega + \sum_{i=1}^R \varepsilon_{ij} \gamma_i \right) -$$

$$- \lambda^2 \left(\frac{c_G}{c_E} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \sum_{i=1}^R \varepsilon_{ij} \gamma_i + \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left(\omega + \sum_{i=1}^R \gamma_i \right) = 0,$$

$$(j = 1, 2, \dots, R).$$

Kładąc w nich $R = 1$, $\eta_i = \varepsilon_{ij} = 0$ otrzymujemy układ równań (7) wynikający z teorii Timoszenki, gdzie

$$(42) \quad \kappa_{11} = \kappa = \frac{1}{A} \int_A \left(1 - \frac{\partial \chi}{\partial x_1} \right)^2 dA.$$

W przypadku ogólniejszym teorii rzędu pierwszego ($R = 1$), mamy do czynienia z sześcioma niewiadomymi \bar{Q} , \bar{M} , \bar{H} , u , ω i γ . Można je wyznaczyć z układu równań różniczkowych:

$$(43) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \zeta} &= \omega + \gamma, \\ \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} &= \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \eta^2} \bar{M} + \frac{\varepsilon \eta}{\varepsilon - \eta^2} \bar{H}, \\ \frac{\partial \gamma}{\partial \zeta} &= \frac{\eta}{\varepsilon - \eta^2} \bar{M} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \eta^2} \bar{H}, \\ \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \zeta} &= \lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}, \\ \frac{\partial \bar{M}}{\partial \zeta} &= -\bar{Q} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \tau^2} - \eta \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \tau^2}, \\ \varepsilon \frac{\partial \bar{H}}{\partial \zeta} &= -\bar{Q} + \kappa \lambda^2 \left(\frac{c_G}{c_E} \right)^2 \gamma - \eta \frac{\partial^2 \omega}{\partial \tau^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \tau^2} \\ &(\varepsilon = \varepsilon_{11}, \eta = \eta_1, \kappa = \kappa_{11}), \end{aligned}$$

napisanych na podstawie (32) - (35) oraz odpowiednich warunków początkowych i brzegowych.

W dalszym ciągu wykorzystamy powyższe równania przy badaniu wpływu parametrów ε , η i λ na częstości drgań własnych belki wspornikowej.

Teorię rzędu wyższego ($R > 1$) zbadamy na przykładzie drgań swobodnych harmonicznym belki obustronnie podpartej przegubowo. Rozwiązania poszukiwać będziemy w postaci

$$(44) \quad \begin{aligned} \omega &= \Omega \cos \alpha_n \zeta \cos p \tau, & \gamma_i &= \Gamma_i \cos \alpha_n \zeta \cos \tau, \\ \alpha_n &= \pi n, & (i &= 1, 2, \dots, R; n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Podstawiając je do (41) otrzymujemy układ równań algebraicznych jednorodnych:

$$(45) \quad \begin{aligned} &\left[1 - \left(1 + \frac{\alpha_n^2}{\lambda^2} \right) k_n^2 \right] \Omega + \sum_{i=1}^R \left[-\eta_i - \left(1 - \eta_i \frac{\alpha_n^2}{\lambda^2} \right) k_n^2 \right] \Gamma_i = 0, \\ &\left[-\eta_j - \left(1 - \eta_j \frac{\alpha_n^2}{\lambda^2} \right) k_n^2 \right] \Omega + \sum_{i=1}^R \left[\left(\varepsilon_{ij} + \mu^2 \frac{\lambda^2}{\alpha_n^2} \kappa_{ij} \right) - \left(1 + \varepsilon_{ij} \frac{\alpha_n^2}{\lambda^2} \right) k_n^2 \right] \Gamma_i = 0, \\ &(j = 1, 2, \dots, R) \end{aligned}$$

do wyznaczenia względnych częstości drgań własnych

$$(46) \quad k_n = \frac{p}{\alpha_n^2/\lambda},$$

gdzie

$$\mu = \frac{c_G}{c_E}.$$

Wprowadzając macierze:

$$(47) \quad \mathbf{A} = (a_{ij}), \quad \mathbf{B} = (b_{ij}),$$

gdzie

$$(48) \quad \begin{aligned} a_{11} &= 1, & a_{i+1,1} &= a_{1,i+1} = -\eta_i, & a_{i+1,j+1} &= \varepsilon_{ij} + \mu^2 \frac{\lambda^2}{\alpha_n^2} \varkappa_{ij}, \\ b_{11} &= 1 + \frac{\alpha_n^2}{\lambda^2}, & b_{1,i+1} &= b_{i+1,1} = 1 - \eta_i \frac{\alpha_n^2}{\lambda^2}, & b_{i+1,j+1} &= 1 + \varepsilon_{ij} \frac{\alpha_n^2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

oraz wektor

$$(49) \quad \mathbf{x} = \text{col}(\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_R),$$

równania (45) można przepisać w postaci macierzowej

$$(50) \quad (\mathbf{A} - k_n^2 \mathbf{B}) \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Powyższy układ równań posłuży nam do wyznaczenia względnej częstości drgań własnych k_n .

Macierze \mathbf{A} i \mathbf{B} są symetryczne i nieosobliwe, stąd wartości własne równania (50) będą rzeczywiste.

6. Przykłady

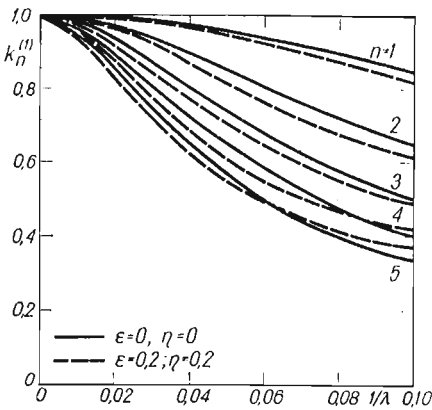
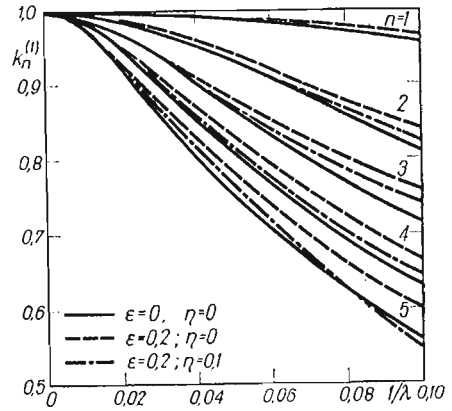
Wykorzystując przedstawione powyżej równania wykonano obliczenia numeryczne częstości względnych

$$(51) \quad k_n = \left(\frac{p}{p_0} \right)_n$$

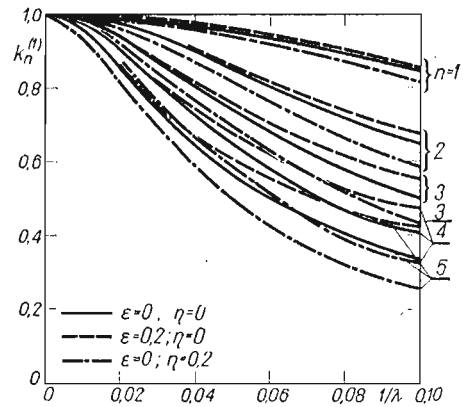
dla harmoniczných drgań własnych poprzecznych belki wspornikowej według teorii rzędu $R = 1$ oraz belki podpartej obustronnie przegubowo dla $R \geq 1$. Wielkość p_0 jest bezwymiarową częstością własną drgań poprzecznych belki wyznaczoną z teorii Eulera-Bernoulliego (bez wpływu momentów obrotowych i sił tnących).

Wyniki obliczeń dla $R = 1$ i różnych wartości parametrów $\varepsilon = \varepsilon_{11}$, $\eta = \eta_1$, przy ustalonej wartości $\bar{\mu}^2 = \varkappa(c_G/c_E)^2 = 1/3$ w funkcji smukłości belki λ , zostały przedstawione na rys. 3 dla belki wspornikowej i na rys. 4 i 5 dla belki podpartej przegubowo. Przegląd otrzymanych wyników prowadzi do następujących stwierdzeń.

Rys. 3. Wpływ parametrów geometrycznych na względne częstotliwości drgań poprzecznych belki wspornikowej $\left(R = 1, \bar{\mu}^2 = \frac{1}{3}\right)$



Rys. 4. Wpływ parametrów geometrycznych na względne częstotliwości drgań poprzecznych belki podpartej przegubowo $\left(R = 1, \bar{\mu}^2 = \frac{1}{3}\right)$



Rys. 5. Wpływ parametrów geometrycznych na względne częstotliwości drgań poprzecznych belki podpartej przegubowo $\left(R = 1, \bar{\mu}^2 = \frac{1}{3}\right)$

— Momenty obrotowe przekrojów poprzecznych i ścinanie powodują zmniejszanie wartości częstotliwości drgań własnych. Obniżenie to jest większe dla belek krępych i harmonik o numerach wyższych. Stwierdzenie to potwierdza wnioski uzyskane we wcześniejszych pracach [1, 5, 6, 10, 15].

— Wpływ parametrów ϵ i η występujących w teorii ogólniejszej od teorii Timoszenki ($\epsilon = 0, \eta = 0$) na częstotliwości drgań własnych jest następujący: wzrost wartości parametru ϵ powoduje podwyższenie częstotliwości, natomiast wzrost parametru η ich obniżenie.

Do przeprowadzenia obliczeń częstotliwości względnych k_n według równań (50) dla $R \geq 1$, niezbędne są charakterystyki geometryczne $\eta_i, \epsilon_{ij}, \kappa_{ij}$ określone wzorami (28) i (31), zależnymi od funkcji deplanacji χ_i . Stąd pierwszym krokiem jest ich wyznaczenie dla

konkretnego przekroju poprzecznego. Dla belki posiadającej prostokątne przekroje poprzeczne o wymiarach $b \times 2h$, funkcje χ_i powinny spełniać następujące warunki:

$$(52) \quad \begin{aligned} 1. & \chi_i(-x_1) = -\chi_i(x_1), \\ 2. & \tau_{13}/x_1 = \pm h = 0, \\ 3. & S_i = kA, \end{aligned}$$

gdzie b i h są odpowiednio szerokością i połową wysokości przekroju.

Napisane wyżej warunki spełniają funkcje określone wzorami

$$(53) \quad \chi_i = \frac{1}{2} h \xi \left[(k-1)(3-\xi^2) + \sum_{m=1}^i \frac{(1-\xi^2)^m}{(m-1)!} \right]$$

$$(i = 1, 2, \dots, R),$$

gdzie

$$\xi = \frac{x_1}{h}, \quad \xi \in \langle 1, -1 \rangle.$$

Ze wzorów (28) i (31) oraz zależności (53) dla belki o przekrojach prostokątnych mamy

$$(54) \quad \begin{aligned} \eta_i &= \frac{6}{5} (k-1) + \eta_i^{(1)}, \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{51}{35} (k-1)^2 + 3(k-1)(\varepsilon_i + \varepsilon_j) + \varepsilon_{ij}^{(1)}, \\ \kappa_{ij} &= 2(k-1) + \frac{6}{5} (k-1)^2 + \frac{3}{4} (k-1)(\kappa_i + \kappa_j) + \kappa_{ij}^{(1)}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(55) \quad \begin{aligned} \eta_i^{(1)} &= \frac{3}{2} \sum_{m=1}^i \sum_{s=0}^m \frac{(-1)^s \binom{m}{s}}{(2s+3)(m-1)!}, \\ \varepsilon_k &= \sum_{m=1}^k \sum_{s=0}^m \frac{(-1)^s \binom{m}{s}}{(m-1)!} \frac{s+3}{(2s+3)(2s+5)}, \\ \varepsilon_{ij}^{(1)} &= \frac{3}{4} \sum_{m=1}^i \sum_{n=1}^j \sum_{s=0}^{m+n} \frac{(-1)^s \binom{m+n}{s}}{(m-1)!(n-1)!(2s+3)}, \\ \kappa_k &= \sum_{m=1}^k \sum_{s=0}^m \frac{(-1)^s \binom{m}{s}}{(m-1)!} \left[\frac{1}{2s+1} - \frac{2m+1}{2s+3} \right], \end{aligned}$$

$$\kappa_{ij}^{(1)} = \frac{1}{4} \sum_{m=1}^i \sum_{n=1}^j \sum_{s=0}^{m+n-2} \frac{(-1)^s \binom{m+n-2}{s}}{(m-1)!(n-1)!} \left[\frac{1}{2s+1} - \frac{2(m+n+1)}{2s+3} + \frac{(2m+1)(2n+1)}{2s+5} \right].$$

Liczbę k wyznaczmy z warunku niewystępowania wewnętrznej sprzeczności teorii w jej szczególnym przypadku gdy $R = 1$ i $\varepsilon = \eta = 0$. Wtedy z ostatniego równania ruchu (43) jest

$$(56) \quad \bar{Q} = \alpha_{11} \lambda^2 \left(\frac{c_G}{c_E} \right)^2 \gamma.$$

Z drugiej strony na podstawie zależności (26) określającej siłę poprzeczną dla $R = 1$ mamy

$$(57) \quad \bar{Q} = k \lambda^2 \left(\frac{c_G}{c_E} \right)^2 \gamma.$$

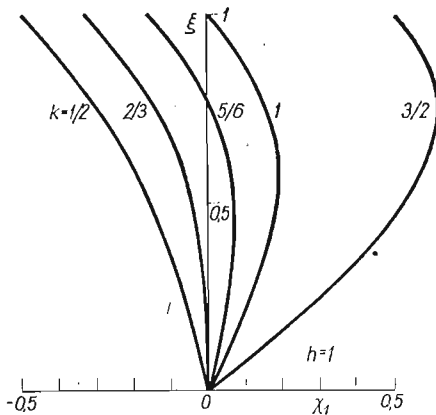
Z porównania powyższych zależności i wzoru (28) otrzymujemy

$$(58) \quad k = \alpha_{11} = \frac{1}{A} \int_A \left(1 - \frac{\partial \chi_1}{\partial x_1} \right)^2 dA.$$

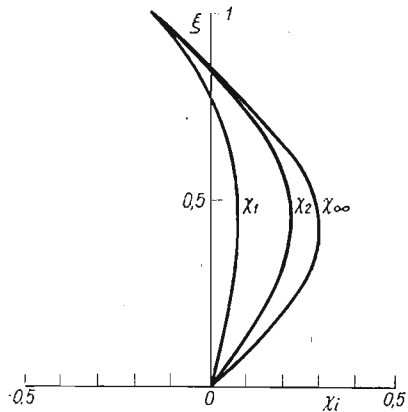
Z powyższego warunku dla belki o przekroju prostokątnym po uwzględnieniu (53) otrzymujemy $k = 5/6$.

Identyczną wartość we wzorze (3) określającym siłę poprzeczną dla belki o przekroju prostokątnym proponuje COWPER [20].

W zależności od wartości parametru k funkcje deplanacji $\chi_i(x_1, k)$ mają różny kształt. Na rys. 6 wykreślono $\chi_1(x_1)$ dla $k = 1/2, 2/3, 5/6, 1$ i $3/2$ natomiast na rys. 7 χ_i dla $k = 5/6$.



Rys. 6. Funkcja deplanacji χ_1



Rys. 7. Funkcje deplanacji χ_i dla $k = \frac{5}{6}$

Obraz przedstawionych rozkładów deplanacji jest jakościowo zgodny z deplanacjami dla pręta o przekroju kołowym, otrzymanymi na podstawie teorii POCHHAMMERA-CHREE przy różnych stosunkach promienia przekroju do długości fali [25].

Z porównania krzywych deplanacji, podanych na rys. 6 i w pracy [25] można wnosić, że liczba $k = 2/3$ proponowana przez TIMOSZENKĘ jest wartością graniczną, rozdzielającą deplanacje odpowiadające falom długim od deplanacji dla fal dostatecznie krótkich. Nadto obserwuje się, że dla k mniejszych deplanacja przekroju poprzecznego staje się mniejsza.

Mając określone charakterystyki geometryczne można przystąpić do wyznaczenia częstości drgań własnych belki podpartej przegubowo o prostokątnych przekrojach poprzecznych. Rozważając równanie (50) i uwzględniając zależności (54) i (55) w przypadku $R = 1$, można pokazać, że względne częstości drgań własnych $k_n^{(r)}$ nie zależą od liczby k charakteryzującej rozkład deplanacji w przekroju. W rozważanym przypadku z (50) otrzymamy równanie częstości

$$(59) \quad (b_{11}b_{22} - b_{12}^2)k_n^4 + (a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - 2a_{12}b_{12})k_n^2 - (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = 0.$$

Uwzględniając (48), (54) i (55) mamy:

$$(60) \quad \begin{aligned} b_{11}b_{22} - b_{12}^2 &= \left(\frac{6}{5}k^2\right) \left[\frac{17}{14} + \frac{1}{70} \left(\frac{\alpha_n}{\lambda}\right)^2 \right] \left(\frac{\alpha_n}{\lambda}\right)^2, \\ a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - 2a_{12}b_{12} &= \left(\frac{6}{5}k^2\right) \left\{ \mu^2 \left[1 + \left(\frac{\lambda}{\alpha_n}\right)^2 \right] + \left[\frac{17}{14} + \frac{1}{35} \left(\frac{\alpha_n}{\lambda}\right)^2 \right] \right\}, \\ a_{11}a_{22} - a_{12}^2 &= \left(\frac{6}{5}k^2\right) \left[\frac{1}{140} + \mu^2 \left(\frac{\lambda}{\alpha_n}\right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Stąd widać, że dla $R = 1$ bezwymiarowe częstości $k_n^{(r)}$ ($r = 1, 2$) nie zależą od k . Podobnie jest dla $R > 1$.

Wyniki obliczeń w przypadku $R = 1$ według modelu Timoszenki ($\varepsilon = \eta = 0$) dla $k = 2/3, 5/6, 1$ oraz według modelu uogólnionego dla smukłości $\lambda = 10, 25$ i 50 przedstawiono w tabelicy 1. Z przeglądu otrzymanych wyników widać, że $k_n^{(r)}$ liczone z równań

Tabela 1. Bezwymiarowe częstości drgań $k_n^{(r)}$ ($r = 1, 2$) belki podpartej przegubowo o przekroju prostokątnym ($\nu = 0.25$)

λ	n	Model belki Timoszenki $ \varepsilon = 0, n = 0 $						Model uogólniony $ R = 1 $	
		$k = \frac{2}{3}$		$k = \frac{5}{6}$		$k = 1$		$k_n^{(1)}$	$k_n^{(2)}$
		$k_n^{(1)}$	$k_n^{(2)}$	$k_n^{(1)}$	$k_n^{(2)}$	$k_n^{(1)}$	$k_n^{(2)}$		
10	1	0,80805	5,79150	0,85327	6,85575	0,88094	7,96845	0,85355	6,82108
	2	0,57716	2,02709	0,64781	2,25753	0,69680	2,51853	0,64951	2,24883
	3	0,43184	1,20410	0,50287	1,29253	0,55642	1,40175	0,50660	1,28879
	4	0,34048	0,85906	0,40530	0,90208	0,45276	0,95949	0,41122	0,90011
	5	0,27946	0,66984	0,33725	0,69383	0,38574	0,72792	0,34533	0,69267
25	1	0,95838	30,51909	0,97016	37,68564	0,97674	176,55547	0,97017	37,46993
	2	0,86215	8,48140	0,89693	10,19062	0,91756	44,91814	0,89707	10,13657
	3	0,75499	4,30453	0,80875	5,02296	0,84265	20,51761	0,80924	4,99883
	4	0,65833	2,77679	0,72350	3,15836	0,76677	11,95379	0,72452	3,14474
	5	0,57716	2,02709	0,64781	2,25753	0,69680	7,96845	0,64951	2,24883
50	1	0,98899	118,29765	0,99222	147,39126	0,99398	176,55547	0,99222	146,52850
	2	0,95838	30,51909	0,97016	37,68564	0,97674	44,91814	0,97017	37,46993
	3	0,91356	14,22325	0,93708	17,34043	0,95037	20,51761	0,93711	17,24450
	4	0,86215	8,48140	0,89693	10,19062	0,91756	11,95379	0,89707	10,13657
	5	0,80805	5,79150	0,85327	6,85575	0,88094	7,96845	0,85355	6,82108

Timoszenki przy współczynniku $k = 5/6$ rekomendowanym przez COWPERA [20], mają wartości bliskie w porównaniu z wartościami częstości wyznaczonymi na podstawie modelu ogólniejszego, zwłaszcza dla większych smukłości λ .

Wyniki obliczeń w przypadku $R \geq 1$ według modelu uogólnionego dla $\lambda = 10$ zostały zestawione w tablicy 2. Na podstawie otrzymanych wyników widać, że dla każdego R istnieje $r = 1, 2, \dots, R+1$ gałęzi częstości drgań własnych. Nadto dla każdego n przy ustalonym r częstości $k_n^{(r)}$ maleją ze wzrostem i są ograniczone od dołu.

Tablica 2. Bezwymiarowe częstości drgań $k_n^{(r)}$ belki podpartej przegubowo o przekroju prostokątnym ($\lambda = 10, \nu = 0,25$)

$R \backslash n$	1	2	3	4	5
1	0,853548 6,82108	0,853541 6,81700 18,0939	0,853541 6,81700 17,7382 31,4361	0,853541 6,81700 17,7328 29,3617 47,3689	0,853541 6,81700 17,7328 29,2355 41,3318
2	0,649512 2,24883	0,649362 2,24768 4,73632	0,649362 2,24768 4,65047 7,98125	0,649362 2,24768 4,64918 7,47048 11,9212	0,649362 2,24768 4,64918 7,44027 10,4203
3	0,506605 1,28879	0,505992 1,28826 2,25317	0,505992 1,28826 2,21696 3,63587	0,505992 1,28826 2,21641 3,41423 5,35815	0,505992 1,28826 2,21641 3,40084 4,74438
4	0,411217 0,900108	0,409772 0,899814 1,37502	0,409768 0,899814 1,35589 2,11292	0,409768 0,899814 1,35560 1,99212 3,05985	0,409768 0,899814 1,35560 1,98488 2,70088

Częstości względne $k_n^{(r)}$ drgań własnych belki dwustronnie podpartej przegubowo zależą od stosunku μ^2 prędkości rozchodzenia się fal poprzecznych i wzdłużnych oraz od ilorazu $c_n(\lambda) - \frac{\pi n}{\lambda}$. Z uwagi na równość $c_{kn}(k\lambda) = c_n(\lambda)$ ($k, n = 1, 2, \dots$) częstości względne kn -tej harmoniki drgań belki o smukłości $k\lambda$, równe są częstościom n -tej harmoniki drgań belki o smukłości λ , dla danej gałęzi rozwiązań i ustalonej wartości μ^2 .

7. Uwagi końcowe

Na podstawie przytoczonych powyżej rozważań i wyników obliczeń widać, że przedstawiony model zgięcia belki umożliwia obliczenie częstości drgań własnych dla skończonego ciągu gałęzi rozwiązań. Dla R funkcji deplanacji przekroju otrzymuje się $R+1$ gałęzi

częstości, zależnych od $R(R+2)$ współczynników liczbowych η_i , ε_{ij} i κ_{ij} , ($i, j = 1, 2, \dots, R$) charakteryzujących kształt i rozkład deplanacji przekrojów poprzecznych belki. W przypadku szczególnym $R = 1$ i przyjęciu $\eta_1 = \varepsilon_{11} = 0$ otrzymuje się model belki Timoszenki. Badając drgania belki dwustronnie podpartej przegubowo o przekrojach prostokątnych stwierdzono, że częstości drgań własnych nie zależą od liczby k charakteryzującej rozkład deplanacji w przekroju, w odróżnieniu od teorii Timoszenki. Najlepsza zgodność wyników otrzymanych na podstawie modelu będącego przedmiotem pracy i modelu Timoszenki występuje przy przyjęciu liczby $k = 5/6$ rekomendowanej przez COWPERA.

Niezbędne jest doświadczalne potwierdzenie istnienia częstości drgań własnych znajdujących się na gałęziach $r \geq 2$ proponowanego modelu. Dalsze badania teoretyczne winny polegać na doskonaleniu przedstawionego modelu poprzez włączenie do rozważań wpływu odkształcenia poprzecznego belki i wzajemnego sprzężenia ugięć występujących w dwu płaszczyznach oraz na zastosowaniu tego modelu do zagadnień drgań wymuszonych i falowych.

Literatura cytowana w tekście

1. S. P. TIMOSZENKO, *On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars*, Phil. Magazine, Ser., 6, 41 (1921).
2. J. PRESCOTT, *Elastic waves and vibrations of thin rods*, Phil. Magazine, Ser. 7, 33 (1942).
3. W. FLÜGGE, *Die Ausbreitung von Biegungswellen in Stäben*, ZAMM, 22 (1942).
4. Я. С. Уфлянд, *Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин*, Прикл. мат. мех., 12 (1948).
5. E. T. KRUSZEWSKI, *Effect of transverse shear and rotary inertia on the natural frequency of a uniform beam*, NACA TN No 1909, 1949.
6. R. W. TRAIL-NASH, A. R. COLLAR, *The effects of shear flexibility and rotary inertia on the bending vibrations of beams*, Quart. J. Mech. Appl. Math., 2, 6 (1953).
7. R. A. ANDERSON, *Flexural vibrations in uniform beams according to the Timoshenko theory*, J. Appl. Mech., 20 (1953).
8. М. Ш. ФЛЕКСЕР, *Об учете влияния инерции вращения и перерезывающих сил на поперечные колебания стержня конечной длины*, Инж. сборник, 23 (1956).
9. D. RASKOVIC, *Wartości funkcji własnych dla drgań poprzecznych belek jednorodnych z uwzględnieniem wpływu ścinania i bezwładności obrotowej*, Rozpr. Inż., 6 (1958).
10. T. C. HUANG, *The effect of rotary inertia and of shear deformation on the frequency and normal mode equations of uniform beams with simple end conditions*, J. Appl. Mech., 28 (1961).
11. W. C. HURTY, M. F. RUBINSTEIN, *Rotary inertia and shear in beam vibration*, J. of Franklin Inst., 278 (2) (1964) 124.
12. K. K. KAPUR, *Vibrations of a Timoshenko beam using finite element approach*, J. Acoust. Soc. Am., 40 (1966) 1058.
13. T. M. WANG, *Natural frequencies of continuous Timoshenko beams*, J. Sound Vibr., 13 (4), (1970).
14. G. HERRMANN, *Forced motions of Timoshenko beams*, J. Appl. Mech., 1, 22 (1955).
15. B. A. BOLEY, C. C. CHAO, *Some solutions of the Timoshenko beam equations*, J. Appl. Mech., 22 (1955).
16. Г. Я. ЛЕОНТЬЕВ, *К учету деформации сдвига и инерции вращения сечения в теории колебаний не-призматических стержней*, Изв. АН СССР, Мех. и машиностр., 1 (1960).
17. K. WILMAŃSKI, *Obciążenia dynamiczne belek. Belka Timoszenki*, Mech. Teoret. Stos., 2, 2 (1964).
18. R. D. MINDLIN, H. DERESIEWICZ, *Timoshenko's shear coefficient for flexural vibrations of beams*, Proc. Second U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., 1954.
19. A. D. S. BARR, *Cross-section distortion and the Timoshenko beam equation*, J. Appl. Mech., 1, 26 (1959).
20. G. R. COWPER, *The shear coefficient in Timoshenko's beam theory*, J. Appl. Mech., 2, 33 (1966).

21. D. GROSS, *Timosheiko-theorie and elastodynamik*, Schiffbauforschung 5 - 6, 8 (1969).
22. E. VOLTERRA, E. C. ZACHMANOGLU, *Free and forced vibrations of streight elastic bars according to the method of internal constraints*, Ing. Arch., 6, 26 (1957).
23. A. V. K. MURTHY, *Vibrations of short beams*, AIAA Journal, 1, 8 (1970).
24. B. AALAMI, B. ATZORI, *Flexural vibrations and Timoshenko's beam theory*, AIAA Journal, 5, 12 (1974).
25. H. N. ABRAMSON, H. J. PLASS, E. A. RIPPERGER, *Stress wave propagation in rods and beams*, Advances in Appl. Mech., 5 (1958).
26. С. Янэцкий, Уравнения движения тонких тел замещенных одномерными моделями сплошной среды, Проблемы машиностроения, издательство „Наукова Думка” (w druku).

Резюме

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ С УЧЕТОМ ДЕФОРМАЦИИ СДВИГА

В работе показана новая модель балки. При принятых предположениях относительно деформаций получены уравнения движения. В частном случае они сводятся к уравнению Тимошенко. Учитывая то, что во время движения имеет место не только вращение, но и искривление поперечных сечений балки, составляющие перемещений определяются уравнениями (10). Затем на основании общих зависимостей (15)—(18) для тонких одномерных тел, получены уравнения движения (33), определены внутренние силы (34) и внешние нагрузки (35) для принятой модели балки. Приведены результаты вычислений собственных частот для консольной (фиг. 3) и шарнирно опертой балок (фиг. 4, 5, табл. 1, 2).

Summary

FREE VIBRATIONS OF BEAMS INFLUENCED BY THE SHEAR EFFECT

The paper presents a new model of tranverse vibrations of uniform beams. Basing on the assumptions concerning the cross-sectional deformation of the beam, the motion equations are presented; a particular case of these equations are the equations given by Timoshenko. Under the assumption that the external loads acting upon the beam produce rotation and warping of its cross-sections, the components of displacement are given by (10). Using the generalized equations of a slender body (15)—(18), the equations of motion (33) for the considered model of the beam have been found as well as the expressions describing the internal forces (34) and external loads (35). Calculation results of eigenfrequencies for two special cases viz. the cantilever beam (Fig. 3) and the simply supported beam (Fig. 4, 5; Table 1, 2) have been presented.

INSTYTUT MASZYN PRZEPLYWOWYCH PAN W GDAŃSKU

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 sierpnia 1976 r.