

TARCZE I PŁYTY SPRĘŻYSTE Z WIĘZAMI LINIOWYMI DLA DEFORMACJI

WIESŁAW KUFEL, STANISŁAW MATYSIAK (WARSZAWA)

W pracy konstruuje się model tarcz i płyt sprężystych w oparciu o mechanikę ośrodków ciągłych z więzami [1].

Założono, że funkcja deformacji dźwigara jest liniowa względem nieznanych funkcji, opisujących ruch powierzchni dolnej i górnej dźwigara, oraz wyróżnionej zmiennej przestrzennej y opisującej kierunek prostopadły do tych powierzchni. Ograniczenia te nazwano więzami liniowymi dla deformacji. Wykorzystując znane metody wariacyjne, otrzymano podstawowy układ równań modelu. Następnie sformułowano kryterium szacujące dokładność otrzymanych rozwiązań oraz podano, dla ogólnej klasy obciążeń, rozwiązanie zamknięte płaskiego stanu odkształcenia. Na zakończenie rozpatrzono dwa zagadnienia brzegowe dla warstwy sprężystej obciążonej samozrównoważonymi układami sił, działającymi równoległe do osi y .

Wykaz oznaczeń

- ∂A brzeg zbioru A ,
- $\{a\}$ zbiór jednopunktowy,
- B obszar w przestrzeni fizycznej równy iloczynowi $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times (0, h)$ z układem współrzędnych, Z^1, Z^2, y , konfiguracja odniesienia,
- $f(x)|_{x \in A}$ obciążenie funkcji f do zbioru A ,
- π iloczyn kartezjański, $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$,
- π_0, π_1 powierzchnia dolna i górna powłoki,
- $\partial\pi_0$ podparta część brzegu, tj. zbioru $\partial\pi \times \{0\}$,
- I przedział czasu,
- h grubość powłoki w konfiguracji odniesienia,
- n wektor zewnętrznie normalny do ∂B ,
- \tilde{n} wektor zewnętrznie normalny do $\partial\pi$,
- χ funkcja deformacji,
- b siła masowa, zależna od Z, y, t ,
- p obciążenia powierzchniowe, zależne od Z, y, t ,
- p_0, p_1 obciążenia powierzchniowe powierzchni π_0, π_1 ,
- P obciążenie powierzchniowe brzegu $\partial\pi \times \langle 0, h \rangle$,
- k energia kinetyczna,
- σ tensor naprężenia,
- ϵ tensor odkształcenia,
- Ψ^0, Ψ^1 funkcje deformacji powierzchni dolnej i górnej,
- r masowe siły reakcji, zależne od Z, y, t ,
- s powierzchniowe siły reakcji, zależne odpowiednio od $(Z, y) \in \partial B, t \in I$,
- u siły reakcji podpór,

- $|a|$ wartość bezwzględna a ,
 ρ gęstość masy,
 λ, μ stałe Lamégo,
 f^0, f^1 uogólnione siły masowe, określone wzorami (2.4)_{1,2}
 i^0, i^1 uogólnione siły bezwładności, określone wzorami (2.4)₃.

1. Liniowa aproksymacja funkcji deformacji

Założmy, że konfiguracją odniesienia rozpatrywanego dźwigara powierzchniowego jest obszar B , równy iloczynowi kartezjańskiemu przedziałów $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times (O, h)$. Punkty należące do tych przedziałów oznaczamy będziemy kolejno przez Z^1, Z^2, y .

Niech $\chi = \chi(\mathbf{Z}, y, t)$, gdzie $\mathbf{Z} = (Z^K)$, $K = 1, 2$, $t \in I = \langle t_0, t_1 \rangle$, będzie funkcją deformacji dźwigara, a $\Psi^0(\mathbf{Z}, t)$, $\Psi^1(\mathbf{Z}, t)$ funkcjami opisującymi ruch jego powierzchni dolnej i górnej, tj. powierzchni $\pi \times \{O\}$ oraz $\pi \times \{h\}$, gdzie $\pi = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \Psi^0(\mathbf{Z}, t) &= \chi(\mathbf{Z}, O, t), \\ \Psi^1(\mathbf{Z}, t) &= \chi(\mathbf{Z}, h, t). \end{aligned}$$

Założmy, że funkcja deformacji χ dźwigara zależy od Ψ^0, Ψ^1 w następujący sposób

$$(1.2) \quad \chi(\mathbf{Z}, y, t) = \left(1 - \frac{y}{h}\right) \Psi^0(\mathbf{Z}, t) + \frac{y}{h} \Psi^1(\mathbf{Z}, t).$$

Przyjmujemy więc, że trójwymiarowy ruch ciała materialnego opisany jest ruchem powierzchni dolnej i górnej tak, by składowe deformacji włókien materialnych prostopadłych do π_0 były funkcjami liniowymi zmiennej y . Inaczej mówiąc, gdy znamy ruch powierzchni dolnej i górnej dźwigara, znamy też, przez związki (1.2), ruch całego ciała. Funkcjami poszukiwanymi są tutaj funkcje Ψ^0, Ψ^1 , które spełniają taką samą rolę, jak współrzędne uogólnione w mechanice analitycznej.

Dodając do prawej strony (1.2) wielomian

$$w_n(y) = \left(1 - \frac{y}{h}\right) (\mathbf{a}_n y^n + \mathbf{a}_{n-1} y^{n-1} + \dots + \mathbf{a}_1 y),$$

gdzie \mathbf{a}_i , $i = 1, 2, \dots, n$ są pewnymi ustalonymi stałymi, otrzymujemy, że składowe deformacji włókien materialnych prostopadłych do π_0 nie są wtedy funkcjami liniowymi y , ale dowolnymi wielomianami stopnia n . Przypadkiem tym nie będziemy się tutaj zajmować.

Ograniczenia (1.2) funkcji deformacji χ są przykładem więzów wewnętrznych [1].

Obciążenia powierzchniowe tarczy lub płyty $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{Z}, y, t)$, $(\mathbf{Z}, y) \in \partial B$ składają się z obciążeń powierzchni dolnej i górnej, które oznaczymy przez \mathbf{p}_0 i \mathbf{p}_1 , obciążeń brzegu $\partial\pi \times (O, h)$, oznaczonych przez \mathbf{P} oraz obciążeń brzegu $\partial\pi_0 = \partial\pi \times \{O\}$, które oznaczymy przez \mathbf{u} .

W przypadku podparcia brzegu płyty w punktach należących do $\partial\tilde{\pi}_0 \subset \partial\pi_0$, rozważać będziemy ograniczenia funkcji deformacji (więzy brzegowe) w postaci

$$(1.3) \quad \chi(\mathbf{Z}, O, t)|_{\mathbf{z} \in \partial\tilde{\pi}_0} = \Psi^0(\mathbf{Z}, t)|_{\mathbf{z} \in \partial\tilde{\pi}_0} = \tilde{\Psi}^0(\mathbf{Z}, t).$$

Obciążenia \mathbf{u} brzegu $\partial\tilde{\pi}_0$ są wtedy równe nieznanym oddziaływaniom podparcia brzegu, które wyznaczymy w dalszym ciągu.

2. Równania ruchu

Podstawowy układ równań dla funkcji Ψ^0, Ψ^1 otrzymuje się z zasady prac wirtualnych, którą zapisać można w postaci

$$(2.1) \quad \int_B [\rho(\mathbf{b} - \ddot{\mathbf{x}}) - \text{div} \boldsymbol{\sigma}] \delta \boldsymbol{\chi} dv + \int_{\partial B} (\mathbf{p} - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \delta \boldsymbol{\chi} d\partial B = 0.$$

W ramach liniowej teorii sprężystości, stan naprężenia, po uwzględnieniu związków (1.2), określają następujące wielkości

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \sigma_{KL} &= 2\mu \left[\left(1 - \frac{y}{h} \right) \Psi_{(K,L)}^0 + \frac{y}{h} \Psi_{(K,L)}^1 \right] + \\ &\quad + \lambda \delta_{KL} \left[\left(1 - \frac{y}{h} \right) \Psi_{M,M}^0 + \frac{y}{h} \Psi_{M,M}^1 - \frac{1}{h} (\Psi_3^0 - \Psi_3^1) \right], \\ \sigma_{K3} &= -\frac{\mu}{h} (\Psi_K^0 - \Psi_K^1) + \mu \left[\left(1 - \frac{y}{h} \right) \Psi_{3,K}^0 + \frac{y}{h} \Psi_{3,K}^1 \right], \\ \sigma_{33} &= (\lambda + 2\mu) \left[-\frac{1}{h} (\Psi_3^0 - \Psi_3^1) \right] + \lambda \left[\left(1 - \frac{y}{h} \right) \Psi_{M,M}^0 + \frac{y}{h} \Psi_{M,M}^1 \right]. \end{aligned}$$

Stosując znany formalizm wariacyjny [1], otrzymujemy następujący układ równań

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \frac{h\mu}{3} \left(\Psi_K^0 + \frac{1}{2} \Psi_K^1 \right)_{,LL} + \frac{h(\lambda + \mu)}{3} \left(\Psi_L^0 + \frac{1}{2} \Psi_L^1 \right)_{,LK} - \\ - \frac{\lambda}{2} (\Psi_3^0 - \Psi_3^1)_{,K} + \frac{\mu}{2} (\Psi_3^0 + \Psi_3^1)_{,K} - \frac{\mu}{h} (\Psi_K^0 - \Psi_K^1) + f_K^0 = i_K^0, \\ \frac{h\mu}{3} \left(\frac{1}{2} \Psi_K^0 + \Psi_K^1 \right)_{,LL} + \frac{h(\lambda + \mu)}{3} \left(\frac{1}{2} \Psi_L^0 + \Psi_L^1 \right)_{,LK} - \\ - \frac{\lambda}{2} (\Psi_3^0 - \Psi_3^1)_{,K} - \frac{\mu}{2} (\Psi_3^0 + \Psi_3^1)_{,K} + \frac{\mu}{h} (\Psi_K^0 - \Psi_K^1) + f_K^1 = i_K^1, \\ \frac{h\mu}{3} \left(\Psi_3^0 + \frac{1}{2} \Psi_3^1 \right)_{,LL} - \frac{\mu}{2} (\Psi_L^0 - \Psi_L^1)_{,L} + \\ + \frac{\lambda}{2} (\Psi_L^0 + \Psi_L^1)_{,L} - \frac{(2\mu + \lambda)}{h} (\Psi_3^0 - \Psi_3^1) + f_3^0 = i_3^0, \\ \frac{h\mu}{3} \left(\frac{1}{2} \Psi_3^0 + \Psi_3^1 \right)_{,LL} - \frac{\mu}{2} (\Psi_L^0 - \Psi_L^1)_{,L} - \frac{\lambda}{2} (\Psi_L^0 + \Psi_L^1)_{,L} + \\ + \frac{(\lambda + 2\mu)}{h} (\Psi_3^0 - \Psi_3^1) + f_3^1 = i_3^1, \end{aligned}$$

gdzie $K, L = 1, 2$, i $q = 1$.

Występujące w (2.3) uogólnione siły masowe \mathbf{f}^0 , \mathbf{f}^1 oraz uogólnione siły bezwładności \mathbf{i}^0 , \mathbf{i}^1 określone są wzorami

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \mathbf{f}^0 &= \int_0^h \left(1 - \frac{y}{h}\right) \mathbf{b} dy + \mathbf{p}^0, \\ \mathbf{f}^1 &= \int_0^h \frac{y}{h} \mathbf{b} dy + \mathbf{p}^1 \\ \mathbf{i}^\alpha &= \frac{d}{dt} \frac{\partial k}{\partial \dot{\Psi}^\alpha} - \frac{\partial k}{\partial \Psi^\alpha}, \quad \alpha = 0, 1, \end{aligned}$$

gdzie

$$k = \frac{1}{2} \int_0^h \left| \left(1 - \frac{y}{h}\right) \dot{\Psi}^{r0} + \frac{y}{h} \dot{\Psi}^{r1} \right|^2 dy.$$

Równania (2.3) winny być spełnione dla każdego $(\mathbf{Z}, t) \in \pi \times I$. Z kolei na $\partial\pi \times I$ winny być spełnione geometryczne warunki brzegowe [1] postaci

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \int_0^h \left(1 - \frac{y}{h}\right) \boldsymbol{\sigma} dy \mathbf{\hat{n}} &= \int_0^h \left(1 - \frac{y}{h}\right) \mathbf{P} dy, \\ \int_0^h \frac{y}{h} \boldsymbol{\sigma} dy \mathbf{\hat{n}} &= \int_0^h \frac{y}{h} \mathbf{P} dy, \end{aligned}$$

gdzie $\mathbf{\hat{n}}$ oznacza wektor zewnętrznie normalny do $\partial\pi$, a składowe tensora naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$ określa się związkami (2.2).

W przypadku podparcia płyty w punktach $\mathbf{Z} \in \partial\tilde{\pi}_0$, geometryczne warunki brzegowe przyjmą postać (1.3), zaś wielkości

$$(2.6) \quad \left[\int_0^h \left(1 - \frac{y}{h}\right) \boldsymbol{\sigma} dy \mathbf{\hat{n}} - \int_0^h \left(1 - \frac{y}{h}\right) \mathbf{P} dy \right]_{\mathbf{Z} \in \partial\tilde{\pi}_0}$$

obliczone dla Ψ^0 i Ψ^1 spełniających warunki (1.3) są równe nieznanym oddziaływaniom u tego podparcia.

Występujące w (2.4) i (2.5) całki są znane, gdyż znana jest zależność funkcji podcałkowych od y .

Równania (2.3)—(2.4) oraz warunki (2.5), wraz z warunkami początkowymi, stanowią podstawowy układ równań rozpatrywanych tarcz i płyt sprężystych.

3. Ocena stosowalności modelu

Rozwiązując podstawowy układ równań (2.3)—(2.5) znajdujemy funkcje Ψ^0, Ψ^1 , które po podstawieniu do związków (1.2) określają funkcję deformacji dźwigara, traktowanego jako trójwymiarowy ośrodek sprężysty. Obliczona tak funkcja deformacji (oznaczmy ją przez χ^*), nie spełnia na ogół równań klasycznej teorii sprężystości tj. równań

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \rho \ddot{\chi} - \operatorname{div} \sigma - \rho \mathbf{b} &= 0, \\ \sigma \mathbf{n} - \mathbf{p} &= 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$\sigma = 2\mu \epsilon + \lambda \operatorname{tr} \epsilon \delta.$$

Lewe strony (3.1), w przypadku $\chi = \chi^*$, nie są więc na ogół równe zero. Oznaczmy je odpowiednio przez \mathbf{r} i \mathbf{s} . Funkcje te w mechanice ośrodków ciągłych z więzami nazywa się siłami reakcji [1].

Normy sił reakcji

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \|\mathbf{r}_k\| &= \|\rho \ddot{\chi}_k - \sigma_{kl,l} - \rho \mathbf{b}_k\|, \\ \|\mathbf{s}_k\| &= \begin{cases} \|\sigma_{kl} n^l - p_{ok}\| & \text{dla } (\mathbf{Z}, y) \in \pi_0, \\ \|\sigma_{kl} n^l - p_{1k}\| & \text{dla } (\mathbf{Z}, y) \in \pi_1, \\ \|\sigma_{kl} n^l - P_k\| & \text{dla } (\mathbf{Z}, y) \in \partial\pi \times \langle 0, h \rangle - \partial\tilde{\pi}_0, \\ \|\sigma_{kl} n^l - u_k\| & \text{dla } (\mathbf{Z}, y) \in \partial\tilde{\pi}_0 \end{cases} \end{aligned}$$

charakteryzują różnicę między ruchem χ^* (ruchem przybliżonym), a ruchem χ spełniającym (3.1). Zależą one od stałych materiałowych λ, μ , stałych określających obciążenia zewnętrzne, równania więzów oraz stałych charakteryzujących kształt ciała.

Oznaczmy wszystkie te parametry przez $\delta_i, \delta_i \in \mathcal{R}, i = 1, 2, \dots, i_0$.

Mówimy, że rozpatrywany model jest stosowalny, jeżeli istnieją takie przedziały $\Delta_i^n, n = 1, 2, \dots, n_0, n_0 \geq 1$, że dla $\delta_i \in \Delta_i^n$ spełnione są nierówności

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \|\mathbf{r}_k\| &< \varepsilon, \\ \|\mathbf{s}_k\| &< \varepsilon, \end{aligned}$$

gdzie ε jest daną liczbą taką, że $0 < \varepsilon \ll 1$. Liczba ta powinna być ustalona dla każdego problemu brzegowego w zależności od norm sił \mathbf{b} i \mathbf{p} , takich samych jak normy (3.2).

Dla przykładu, w przypadku gdy $\mathbf{b} \neq 0, \mathbf{p} \neq 0, \varepsilon$ może być równy $\min\left(\frac{\varepsilon^0}{\|\mathbf{b}\|}, \frac{\varepsilon^0}{\|\mathbf{p}\|}\right)$, a ε^0 równe np. 0,05.

W przypadku, gdy nie istnieją przedziały Δ_i^n , w których zachodziłyby związki (3.3), rozwiązanie nie aproksymuje rozwiązania wzorcowego i przedstawiony model nie może być stosowany.

4. Rozwiązanie ogólne dla płaskiego stanu odkształcenia

Załóżmy, że funkcja deformacji χ zależy jedynie od Z^1 , y oraz $\chi_2 = \text{const}$. Oznacza to, że poszukiwane funkcje są funkcjami jednej zmiennej przestrzennej Z^1 , która oznaczać będziemy przez Z ;

$$\begin{aligned}\Psi_1^\alpha(Z^1, Z^2) &= \Psi_1^\alpha(Z), \\ \Psi_2^\alpha(Z^1, Z^2) &= \text{const}, \\ \Psi_3^\alpha(Z^1, Z^2) &= \Psi_3^\alpha(Z), \quad \alpha = 0, 1.\end{aligned}$$

Niech ponadto siły masowe, wraz z powierzchniowymi obciążeniami zewnętrznymi, spełniają warunek $b_k = 0$, $p_2^z = 0$. Równania (2.3) przyjmą wtedy postać

$$(4.1) \quad \begin{cases} \Psi_{1,11}^0 + \frac{1}{2} \Psi_{1,11}^1 + (A-B)\Psi_{3,1}^0 + (A+B)\Psi_{3,1}^1 - C(\Psi_1^0 - \Psi_1^1) + f_1^0 = 0, \\ \frac{1}{2} \Psi_{1,11}^0 + \Psi_{1,11}^1 - (A+B)\Psi_{3,1}^0 - (A-B)\Psi_{3,1}^1 + C(\Psi_1^0 - \Psi_1^1) + f_1^1 = 0, \\ \Psi_{3,11}^0 + \frac{1}{2} \Psi_{3,11}^1 + (D-E)\Psi_{1,1}^0 + (D+E)\Psi_{1,1}^1 - F(\Psi_3^0 - \Psi_3^1) + f_3^0 = 0, \\ \frac{1}{2} \Psi_{3,11}^0 + \Psi_{3,11}^1 - (D+E)\Psi_{1,1}^0 - (D-E)\Psi_{1,1}^1 + F(\Psi_3^0 - \Psi_3^1) + f_3^1 = 0, \end{cases}$$

gdzie

$$(4.2) \quad \begin{aligned} A &= \frac{3\mu}{2h(\lambda+2\mu)}, & B &= \frac{3\lambda}{2h(\lambda+2\mu)}, & C &= \frac{3\mu}{h^2(\lambda+2\mu)}, \\ D &= \frac{3\lambda}{2h\mu}, & E &= \frac{3}{2h}, & F &= \frac{3(\lambda+2\mu)}{\mu h^2}. \end{aligned}$$

Dodając stronami (4.1)₁ i (4.1)₂ oraz (4.1)₃ i (4.1)₄, a następnie odejmując od (4.1)₁ równanie (4.1)₂ oraz od (4.1)₃ równanie (4.1)₄ otrzymujemy:

$$(4.3) \quad \begin{cases} \frac{3}{2} u_{,11} - 2B y_{,1} = -(f_1^0 + f_1^1), \\ \frac{3}{2} v_{,11} - 2E w_{,1} = -(f_1^0 + f_1^1), \\ \frac{1}{2} w_{,11} + 2A v_{,1} - 2C w = f_1^1 - f_1^0, \\ \frac{1}{2} y_{,11} + 2D u_{,1} - 2F y = f_3^1 - f_3^0, \end{cases}$$

gdzie

$$\begin{aligned} u &= \Psi_1^0 + \Psi_1^1, & w &= \Psi_1^0 - \Psi_1^1, \\ v &= \Psi_3^0 + \Psi_3^1, & y &= \Psi_3^0 - \Psi_3^1. \end{aligned}$$

Układ równań (4, 3) rozwiążemy najpierw w przypadku, gdy znane są wartości funkcji u, w, v, y oraz ich pochodnych w danym punkcie $Z_0 \in (a_1, b_1)$

$$(4.4) \quad \begin{aligned} &u(Z_0), v(Z_0), w(Z_0), y(Z_0), \\ &u_{,1}(Z_0), v_{,1}(Z_0), w_{,1}(Z_0), y_{,1}(Z_0). \end{aligned}$$

Całkując dwukrotnie równanie (4.3) i uwzględniając warunki (4.4) otrzymujemy

$$(4.5) \quad \begin{aligned} u(Z) = &u(Z_0) + u_{,1}(Z_0)(Z - Z_0) + \frac{4}{3} B \int_{Z_0}^Z y(Z) dZ - \\ &- \frac{4}{3} B y(Z_0)(Z - Z_0) - \frac{2}{3} \int_{Z_0}^Z \left[\int_{Z_0}^{Z'} (f_1^0 + f_1^1) dZ \right] dZ'. \end{aligned}$$

Analogicznie, z równania (4.3)₂ otrzymujemy

$$(4.6) \quad \begin{aligned} v(Z) = &v(Z_0) + v_{,1}(Z_0)(Z - Z_0) + \frac{4}{3} E \int_{Z_0}^Z w(Z) dZ - \\ &- \frac{4}{3} E w(Z_0)(Z - Z_0) - \frac{2}{3} \int_{Z_0}^Z \left[\int_{Z_0}^{Z'} (f_3^0 + f_3^1) dZ \right] dZ'. \end{aligned}$$

Z kolei z równań (4.3)_{3,4} wyznaczmy funkcje $w(Z), y(Z)$. Podstawiając do (4.3) pochodną funkcji $v(Z)$ określoną wzorem (4.6), dostajemy

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} w_{,11} - 2Cw + \frac{8}{3} AEw = &-2Av_{,1}(Z_0) + \\ &+ \frac{8}{3} EA w(Z_0) + \frac{4}{3} A \int_{Z_0}^Z (f_3^0 + f_3^1) dZ - f_1^0 + f_1^1. \end{aligned}$$

Uwzględniając równość $\frac{8}{3} AE - 2C = 0$, gdzie A, C, E określone są wzorami (4.2), równanie (4.7) otrzymujemy w postaci

$$(4.8) \quad w_{,11} = -4Av_{,1}(Z_0) + \frac{16}{3} AEw(Z_0) + \frac{8}{3} A \int_{Z_0}^Z (f_3^0 + f_3^1) dZ + 2(f_1^1 - f_1^0).$$

Całkując dwukrotnie związek (4.8) względem Z i uwzględniając warunki (4.4) znajdujemy funkcję

$$(4.9) \quad \begin{aligned} w(Z) = &-4Av_{,1}(Z_0) \left(\frac{Z^2}{2} - \frac{Z_0^2}{2} \right) + 4Av_{,1}(Z_0) Z_0 (Z - Z_0) + \\ &+ \frac{16}{3} AEw(Z_0) \left(\frac{Z^2}{2} - \frac{Z_0^2}{2} \right) - \frac{16}{3} AEw(Z_0) Z_0 (Z - Z_0) + \\ &+ \frac{8}{3} A \int_{Z_0}^Z \left\{ \int_{Z_0}^{Z'} \left[\int_{Z_0}^{Z''} (f_3^0 + f_3^1) dZ \right] dZ'' \right\} dZ' - 2 \int_{Z_0}^Z \left[\int_{Z_0}^{Z'} (f_1^0 - f_1^1) dZ \right] dZ'. \end{aligned}$$

Podstawiając do (4.3)₄ pochodną funkcji $u(Z)$, określoną wzorem (4.5) otrzymujemy

$$(4.10) \quad \frac{1}{2}y_{,11} + \left(\frac{8}{3}DB - 2F\right)y = -2Du_{,1}(Z_0) + \\ + \frac{8}{3}BDy(Z_0) + \frac{4}{3} \int_{Z_0}^Z (f_1^0 + f_1^1)dZ + f_3^1 - f_3^0.$$

W tym przypadku wyrażenie $\frac{8}{3}DB - 2F$, stojące przy $y(Z)$, jest mniejsze od zera (co łatwo sprawdzić wykorzystując związki (4.2)). Wprowadzając oznaczenia

$$(4.11) \quad -m^2 = \frac{16}{3}DB - 4F = -\frac{48(\lambda + \mu)}{h^2(\lambda + 2\mu)}, \\ g(Z) = -4Du_{,1}(Z_0) + \frac{16}{3}BDy(Z_0) + \frac{8}{3} \int_{Z_0}^Z (f_1^0 + f_1^1)dZ - 2(f_3^0 - f_3^1),$$

równanie (4.10) zapisać można w postaci

$$(4.12) \quad y_{,11}(Z) - m^2y(Z) = g(Z).$$

Rozwiązanie ogólne (4.12) ma postać; [3], s. 457—458:

$$(4.13) \quad y(Z) = \frac{e^{mZ}}{2m} \int_{Z_0}^Z e^{-mZ}g(Z)dZ - \frac{e^{-mZ}}{2m} \int_{Z_0}^Z e^{mZ}g(Z)dZ + C_1 e^{mZ} + C_2 e^{-mZ},$$

$$\text{gdzie} \quad C_1 = \frac{1}{2m} e^{-mZ_0} [my(Z_0) + y_{,1}(Z_0)], \quad C_2 = \frac{e^{mZ_0}}{2m} [my(Z_0) - y_{,1}(Z_0)].$$

Funkcje (4.5), (4.6), (4.9) i (4.13) są rozwiązaniami ogólnymi układu (4.3). Podstawiając je do związków

$$(4.14) \quad \Psi_1^0 = \frac{u+w}{2}, \quad \Psi_1^1 = \frac{u-w}{2}, \\ \Psi_3^0 = \frac{v+y}{2}, \quad \Psi_3^1 = \frac{v-y}{2}$$

otrzymujemy rozwiązania ogólne układu (4.1).

W przypadku braku warunków (4.4), funkcje u, w, v, y zależą od ośmiu stałych a_i , $i = 1, 2, \dots, 8$, które wyznaczamy z warunków brzegowych (2.5) lub (2.5)₂ i (2.6):

$$(4.15) \quad u(Z) = a_1 Z + a_2 + \frac{4}{3} B \int y(Z)dZ - \frac{2}{3} \int \left[\int (f_1^0 + f_1^1)dZ \right] dZ, \\ v(Z) = a_3 Z + a_8 + \frac{4}{3} E \int w(Z)dZ - \frac{2}{3} \int \left[\int (f_3^0 + f_3^1)dZ \right] dZ, \\ w(Z) = \frac{8}{3} A \int \left\{ \int \left[\int (f_3^0 + f_3^1)dZ \right] dZ \right\} dZ - \\ - 2 \int \left[\int (f_1^0 - f_1^1)dZ \right] dZ - 2Aa_3 Z^2 + a_6 Z + a_7, \\ y(Z) = \frac{e^{mZ}}{2m} \int e^{-mZ}g(Z)dZ - \frac{e^{-mZ}}{2m} \int e^{mZ}g(Z)dZ + a_4 e^{mZ} + a_5 e^{-mZ},$$

gdzie m jest określone związkiem (4.11)₁, a

$$g(Z) = \frac{8}{3} \int (f_1^0 + f_1^1) dZ - 2(f_3^0 - f_3^1) - \frac{4}{3} Da_1.$$

Występujące w (4.15) całki nieoznaczone powinny być brane ze stałymi równymi zero, gdyż stałe różne od zera dodano już do stałych a_i .

Oznaczając z kolei składowe objętościowych sił reakcji przez r_1, r_2 , a składowe powierzchniowych sił reakcji przez s_1, s_2 oraz korzystając z definicji sił reakcji mamy

$$(4.16) \quad \begin{cases} r_1 = -(\sigma_{11,1} + \sigma_{13,3}) & \text{dla } (Z, y) \in B, \\ r_3 = -(\sigma_{31,1} + \sigma_{33,3}) & \text{dla } (Z, y) \in B, \\ s_1 = \begin{cases} s_1^\alpha = \sigma_{13} n_3^\alpha - p_1^\alpha & \text{dla } (Z, y) \in \pi^\alpha, \\ s_1^* = \sigma_{11} \tilde{n}_1 - P_1 & \text{dla } (Z, y) \in \partial\pi \times \langle 0, h \rangle - \partial\tilde{\pi}_0, \\ \tilde{s}_1 = \sigma_{11} \tilde{n}_1 - u_1 & \text{dla } (Z, y) \in \partial\tilde{\pi}_0, \end{cases} \\ s_3 = \begin{cases} s_3^\alpha = \sigma_{33} \tilde{n}_3 - p_3^\alpha & \text{dla } (Z, y) \in \pi^\alpha, \\ s_3^* = \sigma_{31} \tilde{n}_1 - P_3 & \text{dla } (Z, y) \in \partial\pi \times \langle 0, h \rangle - \partial\tilde{\pi}_0, \\ \tilde{s}_3 = \sigma_{31} \tilde{n}_1 - u_3 & \text{dla } (Z, y) \in \partial\tilde{\pi}_0. \end{cases} \end{cases}$$

Podstawiając do (4.16) wielkości (2.2), otrzymamy

$$(4.17) \quad \begin{aligned} r_1 &= -(\lambda + 2\mu) \left[\left(1 - \frac{y}{h} \right) \Psi_{1,11}^0 + \frac{y}{h} \Psi_{1,11}^1 \right] - \frac{\lambda + \mu}{h} (\Psi_{3,1}^1 - \Psi_{3,1}^0), \\ r_3 &= -\mu \left[\left(1 - \frac{y}{h} \right) \Psi_{3,11}^0 + \frac{y}{h} \Psi_{3,11}^1 \right] - \frac{\lambda + \mu}{h} (\Psi_{1,1}^1 - \Psi_{1,1}^0), \\ s_1^0 &= -\frac{\mu}{h} (\Psi_1^1 - \Psi_1^0) - \mu \Psi_{3,1}^0 - p_1^0, \\ s_1^1 &= \frac{\mu}{h} (\Psi_1^1 - \Psi_1^0) + \mu \Psi_{3,1}^0 - p_1^1, \\ s_3^0 &= -\frac{(\lambda + 2\mu)}{h} (\Psi_3^1 - \Psi_3^0) - \lambda \Psi_{1,1}^0 - p_3^0, \\ s_3^1 &= \frac{\lambda + 2\mu}{h} (\Psi_3^1 - \Psi_3^0) + \lambda \Psi_{1,1}^0 - p_3^1, \\ s_1^* &= \pm (\lambda + 2\mu) \left[\left(1 - \frac{y}{h} \right) \Psi_{1,1}^0 + \frac{y}{h} \Psi_{1,1}^1 \right] + \frac{\lambda}{h} (\Psi_3^1 - \Psi_3^0) - P_1, \\ \tilde{s}_1 &= \pm (\lambda + 2\mu) \left[\left(1 - \frac{y}{h} \right) \Psi_{1,1}^0 + \frac{y}{h} \Psi_{1,1}^1 \right] + \frac{\lambda}{h} (\Psi_3^1 - \Psi_3^0) - u_1, \\ s_3^* &= \pm \mu \left[\left(1 - \frac{y}{h} \right) \Psi_{3,1}^0 + \frac{y}{h} \Psi_{3,1}^1 + \frac{1}{h} (\Psi_1^1 - \Psi_1^0) \right] - P_3, \\ \tilde{s}_3 &= \pm \mu \left[\left(1 - \frac{y}{h} \right) \Psi_{3,1}^0 + \frac{y}{h} \Psi_{3,1}^1 + \frac{1}{h} (\Psi_1^1 - \Psi_1^0) \right] - u_1. \end{aligned}$$

Wzory (4.17) wykorzystamy w dalszym ciągu do oceny rozwiązań szczegółowych.

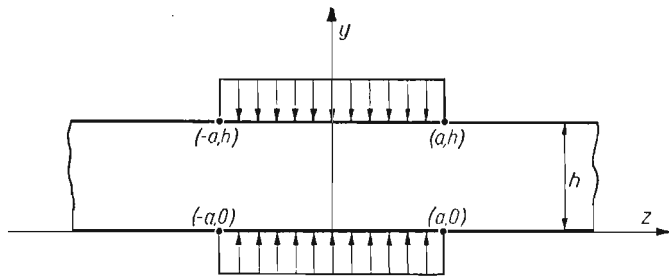
5. Przykłady

a) Rozpatrzmy warstwę sprężystą z obciążeniem postaci:

$$\begin{aligned} p_1^0 &= p_1^1 = 0, \\ p_3^0 &= pH(a-|Z|), \\ p_3^1 &= -p_3^0, \end{aligned}$$

gdzie

$$H(a-|z|) = \begin{cases} 1 & |z| < a \\ 0 & |z| > a \end{cases} \text{--- funkcja Heaviside'a.}$$



Rys. 1

Oznacza to, zgodnie ze wzorem (2.4)_{1,2}, że uogólnione siły zewnętrzne f^0 i f^1 są postaci

$$(5.1) \quad \begin{aligned} f_1^0 &= f_1^1 = 0, \\ f_3^0 &= p_3^0, \quad f_3^1 = p_3^1. \end{aligned}$$

Uwzględniając związki (5.1) w równaniach (4.15), otrzymujemy

$$(5.2) \quad \begin{aligned} u(Z) &= a_1 Z + a_2 + \frac{4}{3} B \int y(Z) dZ, \\ v(Z) &= a_3 Z + a_8 + \frac{4}{3} E \int w(Z) dZ, \\ w(Z) &= -2Aa_3 Z^2 + a_6 Z + a_7, \\ y(Z) &= \frac{e^{mZ}}{2m} \int e^{-mZ} g(Z) dZ - \frac{e^{-mZ}}{2m} \int e^{mZ} g(Z) dZ + a_4 e^{mZ} + a_5 e^{-mZ}, \end{aligned}$$

gdzie

$$g(Z) = -4pH(a-|Z|) - \frac{4}{3} Da_1.$$

Rozpatrywana warstwa sprężysta jest tak obciążona, że funkcje deformacji powierzchni dolnej i górnej powinny być symetryczne względem osi y , tj.:

$$\Psi_3^1(Z) = \Psi_3^1(-Z), \quad \Psi_3^0(Z) = \Psi_3^0(-Z).$$

Skoro $\Psi_3^0 + \Psi_3^1 = v$ oraz $\Psi_3^0 - \Psi_3^1 = y$, to

$$(5.3) \quad v(Z) = v(-Z), \quad y(Z) = y(-Z).$$

Całkując związek (5.2)₄, otrzymujemy

$$(5.4) \quad y(Z) = \frac{4p}{m^2} H(a-|Z|) + \frac{4}{3} \frac{Da_1}{m^2} + b_1 \frac{e^{mZ} + e^{-mZ}}{2} + b_2 \frac{e^{mZ} - e^{-mZ}}{2},$$

gdzie $b_1 = a_4 + a_5$ i $b_2 = a_4 - a_5$.

Z warunku (5.3)₂ otrzymujemy $b_2 = 0$. Z kolei z warunku $\lim_{Z \rightarrow \pm\infty} y(Z) = 0$ otrzymujemy $b_1 = 0$ i $a_1 = 0$.

Podstawiając funkcję (5.4), po uwzględnieniu $b_1 = b_2 = a_1 = 0$, do (5.2)₁ otrzymujemy

$$(5.5) \quad u(Z) = a_2 + \frac{16p}{3m^2} BZH(a-|Z|).$$

Funkcja $w(Z)$ określona związkiem (5.2)₃ powinna także znikać w nieskończoności. Oznacza to, że $a_3 = a_6 = a_7 = 0$, czyli $w(Z) = 0$. Uwzględniając te warunki w równaniu (5.2)₂ oraz $\lim_{Z \rightarrow \pm\infty} v(Z) = 0$, otrzymujemy $a_8 = 0$, czyli $v(Z) = 0$.

Stałą a_2 występującą w (5.5) wyznaczmy z warunku $\Psi_1^0(O) = 0$, co wobec znikania funkcji $w(Z)$ daje warunek $u(O) = 0$. Stąd $a_2 = 0$.

Poszukiwane funkcje mają więc postać

$$(5.6) \quad \begin{cases} w(Z) = v(Z) = 0, \\ u(Z) = \frac{16p}{3m^2} BZH(a-|Z|), \\ y(Z) = \frac{4p}{m^2} H(a-|Z|). \end{cases}$$

Uwzględniając (4.14) i (5.6), otrzymujemy

$$(5.7) \quad \begin{cases} \Psi_1^0 = \frac{8}{3m^2} BpZH(a-|Z|), \\ \Psi_1^1 = \Psi_1^0, \\ \Psi_3^0 = \frac{2p}{m^2} H(a-|Z|), \\ \Psi_3^1 = -\Psi_3^0. \end{cases}$$

Funkcje (5.7) są w tym przypadku rozwiązaniami układu (4.2). Podstawiając (5.7) do (1.2) otrzymujemy funkcję deformacji dla płaskiego stanu odkształcenia w postaci

$$(5.8) \quad \begin{cases} \chi_1 = \frac{8}{3m^2} BpZH(a-|Z|), \\ \chi_3 = \frac{2p}{m^2} \left(1 - \frac{2y}{h}\right) H(a-|Z|). \end{cases}$$

Obliczając, po uwzględnieniu (5.7), siły reakcji (4.17)₁₋₆, mamy

$$(5.9) \quad \begin{cases} r_1 = r_3 = 0, \\ s_1^0 = s_1^1 = 0, \\ s_3^0 = p \left[\frac{(\lambda + 2\mu)^2 - 4\lambda^2}{48(\lambda + \mu)} \delta - 1 \right] H(a - |Z|), \\ s_3^1 = -s_3^0, \end{cases}$$

gdzie $\delta = h/a$. Siły reakcji (5.9) są funkcjami stałych materiałowych λ , μ , intensywności obciążeń p oraz parametru opisującego stosunek wysokości do długości przedziału, w którym działają obciążenia.

Wprowadźmy następującą normę sił reakcji

$$(5.10) \quad \|s_3^0\| = \max_{Z \in R} |s_3^0| = |p(\omega\delta - 1)|,$$

gdzie

$$\omega = \frac{(\lambda + 2\mu)^2 - 4\lambda^2}{48(\lambda + \mu)}.$$

Parametrem opisującym tutaj granice stosowalności otrzymanego rozwiązania jest δ . Jeżeli $2\mu \neq \lambda$, tzn. $(\lambda + 2\mu)^2 - 4\lambda^2 \neq 0$, funkcja (5.10) jest liniowa względem δ i dla $\delta^* = \frac{1}{\omega}$ mamy $\|s_3^0\| = 0$. Dla tego przypadku rozwiązanie (5.8) jest także rozwiązaniem równań (3.1), tj. równań klasycznej teorii sprężystości. Z kolei dla $\delta \in (\delta^* - \varepsilon, \delta^* + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, rozwiązanie (5.8) aproksymuje nieznanne rozwiązanie układu (3.1) z błędem równym $\varepsilon\omega$. Widać stąd, że zarówno przy $h \rightarrow \infty$, jak i $a \rightarrow 0$, rozwiązanie (5.8) jest coraz gorsze (wartość bezwzględna siły reakcji s_3^0 dąży do nieskończoności).

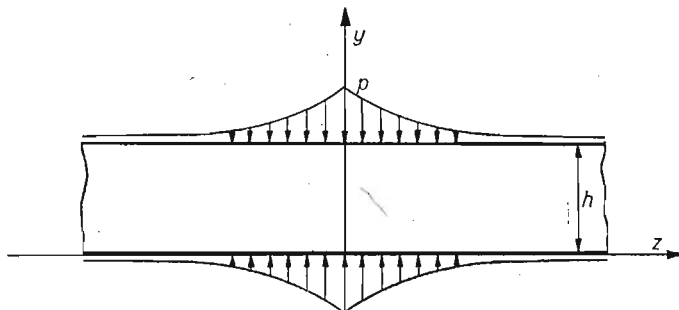
W przypadku $2\mu = \lambda$ mamy $s_3^0 = -pH(a - |Z|)$.

Powierzchniowa siła reakcji s_3^0 jest tutaj rzędu obciążenia zewnętrznego ($s_3^0 = -p_3^0$) i rozwiązanie nie może być stosowane do opisu problemu w ramach klasycznej teorii sprężystości.

b) Rozpatrzmy teraz obciążenie warstwy postaci:

$$p_1^0 = p_1^1 = 0, \quad p_3^0 = pe^{-\frac{|Z|}{c}}, \quad p_3^1 = -p_3^0,$$

gdzie $C = \text{const} > 0$ (rys. 2).



Rys. 2

W tym przypadku uogólnione siły f^0 i f^1 są postaci

$$f_1^0 = f_1^1 = 0, \quad f_3^0 = p_3^0, \quad f_3^1 = p_3^1.$$

Poszukiwane funkcje u , w , v , y są teraz równe

$$(5.11) \quad \begin{cases} w(Z) = v(Z) = 0, \\ u(Z) = -\frac{16pBc^3}{3(m^2c^2-1)} \operatorname{sgn} Z e^{-\frac{|Z|}{c}}, \\ y(Z) = \frac{4pc^2}{c^2m^2-1} e^{-\frac{|Z|}{c}}, \quad c^2m^2 \neq 1. \end{cases}$$

Podstawiając (5.11) do (4.14) otrzymujemy

$$(5.12) \quad \begin{cases} \Psi_1^0 = -\frac{8pBc^3}{3(c^2m^2-1)} \operatorname{sgn} Z e^{-\frac{|Z|}{c}}, \\ \Psi_3^0 = \frac{2pc^2}{c^2m^2-1} e^{-\frac{|Z|}{c}}, \\ \Psi_1^1 = \Psi_1^0, \\ \Psi_3^1 = -\Psi_3^0. \end{cases}$$

Postępując podobnie jak w przypadku a), otrzymamy siły reakcji w postaci

$$(5.13) \quad \begin{aligned} r_1 &= \frac{4p\mu c^3}{h(c^2m^2-1)} \operatorname{sgn} Z e^{-\frac{|Z|}{c}}, \\ r_3 &= -\frac{2pc\mu}{m^2c^2-1} \left(1 - \frac{2y}{h}\right) e^{-\frac{|Z|}{c}}, \\ s_1^0 &= \frac{2p\mu c}{c^2m^2-1} \operatorname{sgn} Z e^{-\frac{|Z|}{c}}, \\ s_1^1 &= s_1^0, \\ s_3^0 &= p e^{-\frac{|Z|}{c}} \left[\frac{4(\lambda+2\mu)c^2}{h(c^2m^2-1)} + \operatorname{sgn} Z \left(\frac{4\lambda^2c^2}{h(c^2m^2-1)(\lambda+\mu)} - 1 \right) \right], \\ s_3^1 &= s_3^0, \quad m^2c^2 \neq 1. \end{aligned}$$

Wprowadzając analogiczne do (5.10), normy sił reakcji, z równań (5.13) otrzymujemy

$$(5.14) \quad \begin{aligned} \|r_1\| &= \left| \frac{4p\mu(\lambda+2\mu)\delta}{(\lambda+2\mu)\delta^2 - 48(\lambda+\mu)} \right|, \\ \|r_3\| &= \frac{\delta}{2} \|r_1\|, \\ \|s_1^0\| &= \|r_3\|, \\ \|s_3^0\| &= \max \left\{ p \frac{4[(\lambda+2\mu)^2 + \lambda^2]\delta}{(\lambda+2\mu)\delta^2 - 48(\lambda+\mu)} + 1 \right\}, \\ &\quad \left| p \frac{4[-(\lambda+2\mu)^2 + \lambda^2]\delta}{(\lambda+2\mu)\delta^2 - 48(\lambda+\mu)} + 1 \right\}, \end{aligned}$$

gdzie $\delta = h/c$ jest parametrem opisującym stosowność otrzymanego rozwiązania.

Składowe objętościowych sił reakcji: podłużna r_1 i poprzeczna r_3 dążą do zera, jeżeli grubość warstwy jest coraz mniejsza (lub $c \rightarrow \infty$). Podobnie zachowują się podłużne powierzchniowe siły reakcji s_1^0, s_1^1 . W przypadku składowych poprzecznych powierzchniowych sił reakcji s_3^0, s_3^1 otrzymamy dla $\delta = 0, s_3^0 = 1$. Oznacza to, że przy zmniejszeniu grubości warstwy (lub zwiększeniu c przy ustalonym h) rozwiązanie (5.13) nie opisuje zachowania się warstwy pod danym obciążeniem. Ponadto, ze wzorów (5.14)₄ wynika, że $\|s_3^0\| > 1$ dla $\delta \neq 0$. Otrzymane rozwiązanie (5.13) nie może więc być stosowane dla żadnej δ (poprzeczne siły reakcji powierzchniowych są większe od sił przyłożonych).

6. Uwagi końcowe

Rozważane w pracy tarcze i płyty stanowią szczególną klasę ciał sprężystych z więzami dla deformacji. Założono, że funkcja deformacji dźwigara jest liniowa względem nieznanymi funkcji opisujących ruch powierzchni dolnej i górnej dźwigara oraz wyróżnionej zmiennej przestrzennej opisującej kierunek prostopadły do tych powierzchni.

Podstawowy układ równań otrzymuje się z zasady d'Alemberta. Rozwiązując podstawowy układ równań wraz z odpowiednimi warunkami brzegowymi (tj. wyznaczając niewiadome funkcje Ψ^0, Ψ^1 , opisujące ruch powierzchni dolnej i górnej) możemy, wykorzystując funkcję więzów dla deformacji, określić ruch dźwigara traktowanego jako ciało trójwymiarowe. Otrzymana funkcja deformacji jest określona w każdym punkcie ciała i na ogół różni się od funkcji deformacji, jaką otrzymalibyśmy w ramach klasycznej teorii sprężystości. W pracy formuluje się kryterium stosowalności modelu, pozwalające ocenić różnicę między otrzymanym rozwiązaniem modelowym, a nieznanym rozwiązaniem liniowej teorii sprężystości.

W przypadku płaskiego stanu odkształcenia otrzymuje się, dla dowolnego obciążenia zewnętrznego, rozwiązanie zamknięte.

Praca zilustrowana jest dwoma przykładami warstwy sprężystej obciążonej samorzównoważonymi układami sił działających pionowo na dźwigar.

Sformułowany model tarcz i płyt sprężystych jest szczególnym przypadkiem modelu warstwowego powłok, którego opis znajduje się w [2].

Literatura cytowana w tekście

1. Cz. WOŹNIAK, *Wstęp do elastokinytyki form konstrukcyjnych*, (w:) *Dźwigary powierzchniowe*, Ossolineum, 1975.
2. W. KUFEL, *Modele warstwowe grubych płyt i powłok*, *Rozpr. Inż.*, 4 (1976).
3. Н. М. МАТВЕЕВ, *Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений*, Минск 1974.

Резюме

УПРУГИЕ ДИСКИ И ПЛАСТИНЫ С ЛИНЕЙНЫМИ СВЯЗЯМИ ДЛЯ ДЕФОРМАЦИЙ

В статье конструируется модель упругих дисков и пластин в терминах механики сплошной среды с прямыми связями. Принято, что функция деформации диска или пластины линейная по отношению к неизвестным функциям, описывающим движение нижней и верхней поверхности

конструкции а также по отношению к выделенной пространственной переменной, описывающей нормальное к этим поверхностям направление. Такие ограничения названы линейными связями для деформаций. С помощью известных вариационных методов получена основная система уравнений модели.

Сформулирован критерий, оценивающий точность полученных решений и приведены точные решения плоского состояния деформации для общего случая нагружения. В заключение рассмотрены две краевые задачи для упругого слоя, нагруженного самоуравновешенными системами сил, действующими параллельно к оси выделенной пространственной переменной.

S u m m a r y

ELASTIC PLATES WITH LINEAR CONSTRAINTS OF DEFORMATION

A model of elastic plates is constructed on the basis of continuum mechanics with simple constraints. The function of deformation of the plate is assumed, to be linear in the unknown functions describing the motions of its lower and upper surfaces and in the coordinate normal to those surfaces. These limitations are called the linear constraints of deformation. The fundamental equations of the model are derived by means of variational methods. A criterion of estimating the accuracy of the solutions derived is then formulated and closed form solutions of the plane strain cases are given for a general case of loading. In conclusion, the boundary value problems are considered for an elastic layer loaded by self-equilibrated forces normal to the surfaces.

INSTYTUT MECHANIKI UNIWERSYTETU WARSZAWSKIEGO

Praca została złożona w Redakcji dnia 19 maja 1976 r.