

STATECZNOŚĆ BOCZNA W CZASIE DOBIEGU
LĄDUJĄCEGO SAMOŁOTU SPORTOWEGO

ZDOBYSŁAW G O R A J, JERZY M A R Y N I A K, ZBIGNIEW P A T U R S K I,
M A R I A Z Ł O C K A (WARSZAWA)

1. Wstęp

Zagadnienia dynamiki samolotu w czasie ruchu po ziemi i wiążący się z tym problem shimmy są obecnie intensywnie badane w szeregu ośrodkach zagranicznych [2, 3, 11, 12, 14, 15, 16, 19, 20].

COLLINS i BLACK [2, 3] badali shimmy samolotu przy uwzględnieniu ciągnowej teorii pneumatyków sformułowanej przez von SHLIPPE i DIETRICHA oraz przy uwzględnieniu teorii punktowej sformułowanej przez MORELANDA. W swoich pracach nie uwzględniali wpływu ruchu samolotu na własności dynamiczne rozważanego podwozia.

PACEJKA w pracy [14] wprowadził bardzo złożony model pneumatyka, który może być opisany równaniami różniczkowymi cząstkowymi I rzędu. Przyjęcie modelu PACEJKI [14] do badań dynamicznych rozbiegu i dobiegu samolotu prowadzi do znacznych trudności obliczeniowych nawet przy zastosowaniu szybkołatających maszyn cyfrowych o dużej pamięci. Ponadto teoria PACEJKI powstała w oparciu o pewien uproszczony wyidealizowany model pneumatyka odnośnie jego struktury wewnętrznej, układu nitek kordu osnowy i kostek bieźnika i dlatego nie powinna być stosowana do opon innych niż radialne.

W pracy [13] PACEJKA analizował własności dynamiczne koła ogumionego formułując transmisyjne równania pneumatyków. Są to równania różniczkowe zwyczajne I rzędu względem niewiadomych sił i momentów sił generowanych na pneumatykach. Badanie własności dynamicznych koła ogumionego przeprowadził w oparciu o analizę transmitancji widmowej dla otrzymanego układu równań.

PODGORSKI, KRAUTER i RAND [15] analizowali shimmy przedniego podwozia samolotu przy uwzględnieniu punktowej teorii MORELANDA badając wpływ geometrii podwozia, niewyważenia koła i nieregularności drogi na własności dynamiczne podwozia. Nie uwzględniali wpływu ruchu całego samolotu.

ROGERS i BREWER podali w pracy [16] metodę eksperymentalnego wyznaczania współczynników w równaniu transmisyjnym pneumatyka w oparciu o odwrotne przekształcenie Laplace'a. STUBBS, BYRDSOŃG i SLEEPER [20] symulowali eksperymentalnie dynamiczne własności podwozia samolotu dla 4 różnych konstrukcji przy uwzględnieniu bocznego opływu. NEJMARK i FUF AJEW [12] badali shimmy przedniego podwozia samolotu przy uwzględnieniu teorii pneumatyka sformułowanej przez KIEDYSZA.

W żadnej z cytowanych prac nie uwzględniono wpływu ruchu całego samolotu na

dynamikę podwozia. Nie uwzględniono również wpływu sił i momentów aerodynamicznych na współczynniki w równaniach transmisyjnych pneumatyków.

W niniejszej pracy dynamiczne równania ruchu samolotu otrzymano stosując równania Boltzmanna-Hamela. Na podstawie obliczonych wartości i wektorów własnych macierzy stanu wyróżniono 2 postacie drgań własnych układu, które decydują o dynamice samolotu w czasie ruchu po ziemi: wysokoczęstotliwościowe *wężykowanie przedniego podwozia* i niskoczęstotliwościowe *odchylanie samolotu*. Zbadano wpływ najważniejszych parametrów układu na częstości i tłumienia postaci drgań własnych.

2. Dynamiczne równania ruchu samolotu kolującego po ziemi

Do opisu dynamiki samolotu przyjęto cztery następujące układy odniesienia (rys. 1, 2):

— układ inercjalny $Ox_0 y_0 z_0$ związany z ziemią oraz trzy nieinercjalne układy współrzędnych $O_i x_i y_i z_i$ związane z samolotem, powstałe przez kolejne prawoskrętne obroty ortogonalne i przesunięcia równoległe;

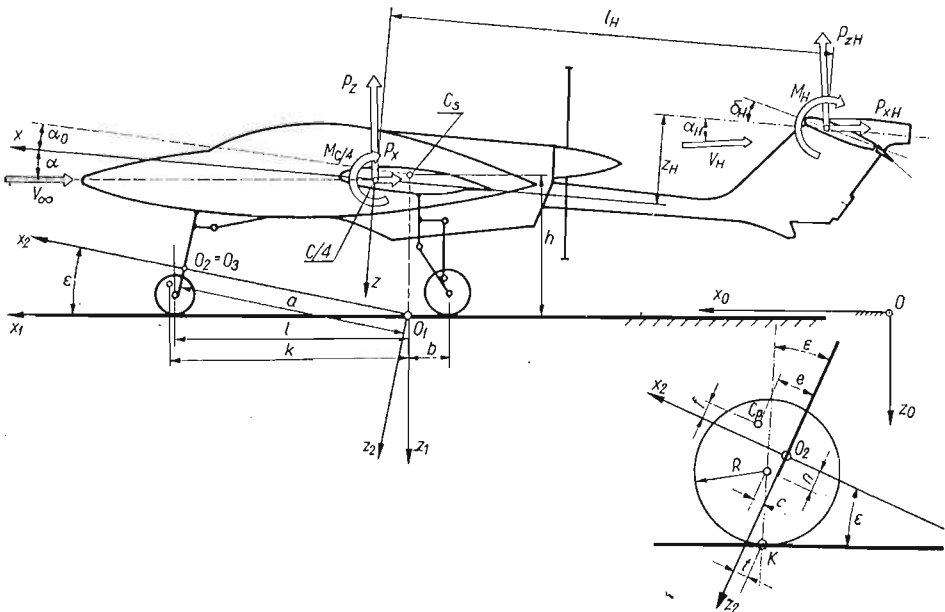
— układ $O_1 x_1 y_1 z_1$ powstały przez obrót układu $Ox_0 y_0 z_0$ wokół osi z o kąt odchylenia samolotu ψ ;

— układ $O_2 x_2 y_2 z_2$ powstały przez obrót układu $O_1 x_1 y_1 z_1$ wokół osi y_1 o konstrukcyjny kąt ε pochylenia osi goleni przedniego podwozia i przesunięcie równoległe do punktu O_2 ;

— układ $O_3 x_3 y_3 z_3$ powstały przez obrót układu $O_2 x_2 y_2 z_2$ wokół osi z_2 o kąt δ skręcenia koła przedniego podwozia.

Punkt O_1 jest rzutem środka masy samolotu na płaszczyznę ziemi.

Punkt O_2 (i pokrywający się z nim punkt O_3) jest punktem przecięcia osi x_2 z osią goleni przedniego podwozia.



Rys. 1. Samolot M17 w ruchu po ziemi

Położenie samolotu opisano za pomocą czterech współrzędnych uogólnionych x_0, y_0, ψ, δ w układzie współrzędnych $Ox_0 y_0 z_0$ związanym z ziemią oraz czterech quasi-współrzędnych uogólnionych x_1, y_1, ψ, δ w układzie quasi-współrzędnych $O_1 x_1 y_1 z_1$ związanym z samolotem.

Równania transformacyjne z układu prędkości uogólnionych do układu quasi-prędkości zapisano następująco:

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{x}_0 \cos \psi + \dot{y}_0 \sin \psi, \\ \dot{y}_1 &= -\dot{x}_0 \sin \psi + \dot{y}_0 \cos \psi, \\ \dot{\psi} &= \dot{\psi}, \\ \dot{\delta} &= \dot{\delta}. \end{aligned}$$

Równania ruchu samolotu otrzymano na podstawie:
— holonomicznych równań Boltzmann-Hamela [9]

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial \omega_\mu} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_\mu} + \sum_{r=1}^4 \sum_{\alpha=1}^4 \frac{\partial T^*}{\partial \omega_r} \gamma_{r\mu\alpha} \omega_\alpha = Q_\mu^*,$$

gdzie $\mu = 2, 3, 4$, oraz

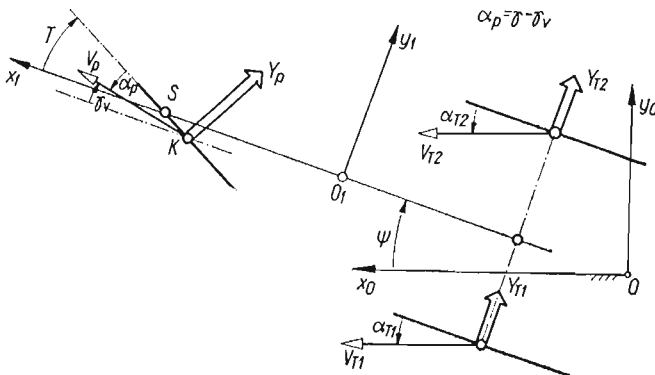
— równań transmisyjnych pneumatyków [13],
dla przedniego podwozia:

$$(3a) \quad \dot{Y}_p \frac{\sigma}{V} + Y_p = C_{p1} \alpha_p + C_{p2} \Phi_p,$$

dla głównego podwozia:

$$(3b) \quad \dot{Y}_{Ti} \frac{\sigma}{V} + Y_{Ti} = C_T \alpha_{Ti}; \quad i = 1, 2,$$

gdzie σ oznacza współczynnik relaksacji pneumatyka, Y — siłę boczną generowaną na pneumatyku, α — kąt bocznego znoszenia pneumatyka, C_1, C_2 — współczynniki sztywności pneumatyka odpowiednio bocznego znoszenia i przechylenia, Φ_p — kąt przechylenia płaszczyzny koła przedniego podwozia, przy czym indeksy p i T oznaczają odpowiednio podwozie przednie i tylne.



Rys. 2. Kąty znoszenia α_p, α_{Ti} oraz siły boczne Y_p, Y_{Ti} działające na pneumatyki

Obliczone na podstawie definicji niezerowe symbole Boltzmanna $\gamma_{\mu\alpha}^r$ wynoszą:

$$\gamma_{23}^1 = -\gamma_{32}^1 = 1, \quad \gamma_{13}^2 = -\gamma_{31}^2 = -1.$$

Dynamiczne równania ruchu samolotu odpowiadające quasi-współrzednym y_1, ψ, δ otrzymano na podstawie równań (2) stosując metodę macierzową przedstawioną w pracy [7]. W wyniku otrzymano różniczkowe równanie macierzowe w postaci normalnej:

$$(4) \quad \dot{\mathbf{w}} = (\mathbf{A}^{(1)} + \mathbf{T}_{QW}^{(2,3)})^{-1} \cdot (-\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{T}_{\pi}^{(1)} - \mathbf{T}_{QW}^{(2,3)} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{T}_R^{(2,3)} + \\ + \mathbf{T}_{\pi}^{(2,3)} - \mathbf{T}_Q^{(1,2,3)T} \cdot \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{Q}_G + \mathbf{Q}_A),$$

gdzie \mathbf{w} oznacza macierz quasi-prędkości, $\mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{T}_{QW}^{(2,3)}$ — macierze bezwładności nie zawierające kombinacji quasi-prędkości, $\mathbf{C}^{(1)}, \mathbf{T}_{QW}^{(2,3)}$ — te składniki macierzy bezwładności, które zawierają kombinacje quasi-prędkości, $\mathbf{T}_{\pi}^{(1)}, \mathbf{T}_{\pi}^{(2,3)}$ — macierze pochodnych energii kinetycznej względem quasi-współrzednych, $\mathbf{T}_Q^{(1)}, \mathbf{T}_Q^{(2,3)}$ — macierze pochodnych energii kinetycznej względem quasi-prędkości, $\mathbf{\Gamma}$ — macierz współczynników Boltzmanna, $\mathbf{Q}_G, \mathbf{Q}_A$ — macierze sił uogólnionych odpowiednio ciężkości i aerodynamicznych.

Indeksy (1) oraz (2, 3) odpowiadają umownemu podziałowi samolotu na trzy bryły: (1) koło przedniego podwozia wraz z golenią bez uwzględnienia ruchów obrotowych koła, (2) samolot bez goleni i koła przedniego podwozia oraz bez uwzględnienia obrotów kół podwozia głównego, (3) koła podwozia przedniego i głównego przy uwzględnieniu rzeczywistych ruchów tych kół w celu opisu efektów giroskopowych [7]. Metoda wyznaczenia wszystkich zdefiniowanych powyżej macierzy dla pełnego przypadku nieliniowego oraz metoda linearyzacji macierzowego równania różniczkowego jest podana w pracy [7]. Energię kinetyczną bryły umownej nr (1) wyznaczono na podstawie znajomości prędkości liniowych środka masy w układzie $O_2 x_2 y_2 z_2$:

$$(5) \quad \begin{aligned} V_{x_2} &= V \cos \varepsilon - \dot{\psi} e \sin \delta \cos \varepsilon - \delta e \sin \delta, \\ V_{y_2} &= \dot{y}_1 + \dot{\psi} (a \cos \varepsilon + e \cos \delta \cos \varepsilon - f \sin \varepsilon) + \dot{\delta} e \cos \delta, \\ V_{z_2} &= V \sin \varepsilon - \dot{\psi} e \sin \delta \sin \varepsilon, \end{aligned}$$

oraz prędkości kątowych w układzie $O_3 x_3 y_3 z_3$:

$$(6) \quad \Omega_{x_3} = -\dot{\psi} \sin \varepsilon \cos \delta, \quad \Omega_{y_3} = \dot{\psi} \sin \varepsilon \sin \delta, \quad \Omega_{z_3} = \dot{\psi} \cos \varepsilon + \dot{\delta}.$$

Kąt przechylenia Φ_p koła przedniego podwozia obliczono ze wzoru:

$$(7) \quad \sin \Phi_p = \sin \delta \cdot \sin \varepsilon,$$

natomiast kąty znoszenia kół α_p i $\alpha_T = \alpha_{T1} = \alpha_{T2}$ obliczono następująco:

$$(8) \quad \alpha_p = \gamma - \gamma_v; \quad \alpha_T = \arctg \frac{-\dot{y}_1 + b\dot{\psi}}{V},$$

przy czym

$$\gamma = \arcsin \frac{\sin \delta \cos \varepsilon}{\sqrt{1 - \sin^2 \delta \sin^2 \varepsilon}},$$

$$\gamma_v = \arctg \frac{V_{ky1}}{V_{kx1}},$$

gdzie: V_{kx1}, V_{ky1} — prędkości punktu kontaktu K (rys. 2) odpowiednio wzdłuż osi x_1 i y_1 .

Prędkości punktu kontaktu K obliczono na podstawie wzoru:

$$\vec{V}_k = \vec{V}_{o1} + \vec{\psi} \times \overline{O_1 O_3} + (\vec{\psi} + \vec{\delta}) \times \overline{O_3 K}.$$

Jedynym niezerowym składnikiem macierzy sił ciężkości Q_G jest Q_3^*

$$(9) \quad Q_3^* = M_p g \sin \delta \sin \epsilon.$$

Siły i momenty aerodynamiczne uwzględniono w równaniu bocznego znoszenia odpowiadającego quasi-współrzędnej y_1 oraz w równaniu odchylenia odpowiadającego quasi-współrzędnej ψ . Na podstawie prac [1, 4, 5, 6, 17, 18] obliczono bezwymiarowe pochodne siły bocznej \bar{Y} oraz momentu odchyłającego \bar{N} względem kąta ślizgu β oraz bezwymiarowej prędkości kątowej odchylenia $\bar{\psi}$:

$$(10) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \beta} &= -a_r(1-ds) \frac{S_v}{S}, \\ \frac{\partial \bar{N}}{\partial \beta} &= \frac{C_z^2}{4\pi\lambda} + a_r \frac{S_v}{S} \frac{l_b}{b} - 0,96w_3 \frac{S_k}{S} \frac{d_k}{b} \sqrt{\frac{h_{k1}}{h_{k2}}} \sqrt[3]{\frac{S_{k1}}{S_{k2}}}, \\ \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{\psi}} &= -2 \frac{l_v}{b} \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \beta}, \\ \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{\psi}} &= -0,02 \cdot C_z^2 - 0,3C_{x0} + 2 \left(\frac{l_v}{b} \right)^2 \frac{\partial \bar{N}}{\partial \beta}, \end{aligned}$$

gdzie a_r oznacza pochodną siły nośnej na usterzeniu pionowym względem kąta natarcia, d_s — współczynnik bocznego załamania strug za skrzydłem, S , S_v , S_k — powierzchnie odpowiednio płata, usterzenia kierunku oraz boczna kadłuba, C_z — współczynnik siły nośnej, C_{x0} — współczynnik oporu profilowego, λ — wydłużenie geometryczne płata skończonego, l_b — odległość środka parcia usterzenia kierunku od środka masy samolotu, d_k — długość kadłuba, h_{k1} , h_{k2} , S_{k1} , S_{k2} — wysokość oraz szerokość kadłuba odpowiednio w 1/4 (indeks 1) oraz w 3/4 (indeks 2) długości kadłuba, b — rozpiętość płata, l_A — ciężew aerodynamiczną płata, w_3 — współczynnik zależny od geometrii samolotu [18].

Uwzględniając, że dla małych kątów ślizgu β ,

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\dot{y}_1}{V} \approx \beta,$$

oraz że

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \beta} = \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \dot{y}_1} \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial \beta} \approx \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \dot{y}_1} V,$$

otrzymano:

$$(11) \quad \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \dot{y}_1} = \frac{1}{V} \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial \bar{N}}{\partial \dot{y}_1} = \frac{1}{V} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \beta}.$$

Sily i momenty aerodynamiczne odpowiednio w równaniu boczego znoszenia i odchylenia wynoszą:

$$(12) \quad \begin{aligned} Y_A &= \frac{1}{V} \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \beta} \dot{y}_1 \frac{1}{2} \rho V^2 S + \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{\psi}} \dot{\psi} \frac{1}{2} \rho V^2 S, \\ N_A &= \frac{1}{V} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \beta} \dot{y}_1 \frac{1}{2} \rho V^2 S b + \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{\psi}} \dot{\psi} \frac{1}{2} \rho V^2 S b. \end{aligned}$$

Uwzględniając (3) ÷ (11) oraz linearyzując na podstawie pracy [7] macierze występujące w równaniu (4), otrzymano układ równań różniczkowych zwyczajnych I rzędu zapisany w postaci macierzowej następująco:

$$(13) \quad \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{w}} \\ \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{Y}_P \\ \dot{Y}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{O}_{3 \times 2} \\ \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{E}_3 & \mathbf{O}_{3 \times 2} \\ & & \frac{V}{\sigma} & 0 \\ \mathbf{O}_{2 \times 3} & \mathbf{O}_{2 \times 3} & 0 & \frac{V}{\sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{E}_3 & \mathbf{O}_r & \\ & & \mathbf{T}_1 & -\mathbf{E}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{q} \\ Y_P \\ Y_T \end{bmatrix},$$

gdzie \mathbf{E}_2 , \mathbf{E}_3 — macierze jednostkowe odpowiednio o wymiarach 2×2 i 3×3 , $\mathbf{O}_{2 \times 3}$, $\mathbf{O}_{3 \times 2}$, $\mathbf{O}_{3 \times 3}$ — macierze zerowe odpowiednio o wymiarach 2×3 , 3×2 , 3×3 ,

$$\mathbf{O}_r = \begin{bmatrix} 0 & V & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{w} = \text{col}[\dot{y}_1, \dot{\psi}, \dot{\delta}]$ — macierz kolumnowa quasi-prędkości, $\mathbf{q} = \text{col}[y_0, \psi, \delta]$ — macierz kolumnowa współrzędnych uogólnionych,
— macierz bezwładności

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} M_s & M_p k & M_p e \\ M_p k & M_p k^2 + J_{Tz} + J_{px} \sin^2 \varepsilon + J_{pz} \cos^2 \varepsilon & M_p k e + J_{pz} \cos \varepsilon \\ M_p e & M_p k e + J_{pz} \cos \varepsilon & M_p e^2 + J_{pz} \end{bmatrix},$$

— macierz tłumienia

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{V} \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \beta} \frac{1}{2} \rho V^2 S & \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{\psi}} \frac{1}{2} \rho V^2 S - M_s V & 0 \\ \frac{1}{V} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \beta} \frac{1}{2} \rho V^2 S b & \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{\psi}} \frac{1}{2} \rho V^2 S b - M_p k V & J_{py} \frac{V}{R} \sin \varepsilon \\ 0 & -M_p V e - J_{py} \frac{V}{R} \sin \varepsilon & -K_p \end{bmatrix},$$

— macierz sztywności

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & 0 \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & & 0 \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & M_p g e \sin \varepsilon + t Z_p \sin \varepsilon + S_p & \end{bmatrix},$$

— uogólniona macierz sztywności pneumatyków

$$T_1 = \begin{bmatrix} -\frac{C_{p1}}{V} & -\frac{C_{p1}l}{V} & \frac{C_{p1}t}{V} & 0 & 0 & C_{p1} \cos \varepsilon + C_{p3} \sin \varepsilon \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{C_{T1}}{V} & \frac{C_{T1}b}{V} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

— macierz sił uogólnionych pneumatyków

$$T_{21}^T = \begin{bmatrix} 1 & l & -t & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & -2b & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

przy czym M_p , M_s oznaczają masy odpowiednio przedniego podwozia (przednie koło wraz z golenią) oraz całego samolotu, J_{px} , J_{py} , J_{pz} — momenty bezwładności przedniego podwozia względem układu osi $O_3 x_3 y_3 z_3$, J_{py} — centralny moment bezwładności przedniego koła względem osi równoległej do osi $O_3 y_3$, ε — kąt pochylenia goleni przedniego podwozia, b , t , k , e , R , l — wielkości geometryczne pokazane na rys. 1, K_p , S_p — sztywność i tłumienie wiskotyczne drgań skrętnych przedniego podwozia, g , Z_p — przyspieszenie ziemskie oraz nacisk pionowy na koła przedniego podwozia.

W macierzowym równaniu ruchu (13) uwzględniono, że współczynniki sztywności pneumatyków C_{p1} , C_{p3} , C_T oraz nacisk pionowy Z_p zależą od sił i momentów aerodynamicznych. Nacisk na podwoziu przednim Z_p i głównym Z_G obliczono ze wzorów:

$$Z_p = \frac{Q_c(b + \mu h) - C_M}{b + l}, \quad Z_G = Q_c - Z_p,$$

gdzie

$$C_M = (c_{mbu} + c_{mH}) \frac{1}{2} \rho V^2 S l_A,$$

$$c_{mH} = -\kappa''_{Hx} c_{zH} + \kappa''_{Hz} \left(c_{x0} + \frac{c_{zH}^2}{\pi \Lambda_{EH}} \right),$$

$$c_{zH} = a_1 (\alpha - \alpha_0 - \varepsilon + \delta_H),$$

$$\varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} (\alpha - \alpha_0),$$

$$Q_c = Q - \frac{1}{2} \rho V^2 S c_z,$$

przy czym Q oznacza ciężar samolotu, l , b , h — współrzędne punktów kontaktu podwozia przedniego i głównego wzdłuż osi x_1 oraz osi z_1 , α_0 — kąt pomiędzy poziomą montażową i prostą zerowej siły nośnej, α — geometryczny kąt natarcia, ε — kąt odchylenia strug za płatem, δ_H — kąt wychylenia steru wysokości, $\kappa''_{Hx} = \frac{S_H l_H}{S l_A}$, $\kappa''_{Hz} = \frac{S_H z_H}{S l_A}$ — cechy

objętościowe usterzenia wysokości, c_{ZH} — współczynnik siły nośnej usterzenia wysokości, A_{EH} — wydłużenie efektywne płata.

Założono, że sztywności pneumatyków C_{p1} , C_{p3} , C_T są liniowymi funkcjami nacisków pionowych Z_p , Z_G :

$$C_{p1} = k_{p1}Z_p; \quad C_{p3} = k_{p3}Z_p; \quad C_T = k_G Z_G.$$

3, Analiza postaci drgań własnych

Macierz fundamentalna układu równań różniczkowych (13) może być przedstawiona na podstawie [8] w postaci:

$$(14) \quad X = \left[\begin{array}{c|cc} x_{01} e^{\lambda_1 t} & \begin{array}{c} A_{1j} e^{\xi_j t} \cos(\eta_j t - \alpha_{1j}) \\ A_{2j} e^{\xi_j t} \cos(\eta_j t - \alpha_{2j}) \\ A_{Nj} e^{\xi_j t} \cos(\eta_j t - \alpha_{Nj}) \end{array} & \begin{array}{c} A_{1j} e^{\xi_j t} \sin(\eta_j t - \alpha_{1j}) \\ A_{2j} e^{\xi_j t} \sin(\eta_j t - \alpha_{2j}) \\ A_{Nj} e^{\xi_j t} \sin(\eta_j t - \alpha_{Nj}) \end{array} \\ \hline & & \end{array} \right] x_{0N} e^{\lambda_N t},$$

gdzie A_{ij} oznaczają amplitudy kolejnych składowych na j -tej postaci drgań własnych, α_{ij} — przesunięcia fazowe kolejnych składowych j -tej postaci drgań własnych, ξ_j , η_j — współczynnik tłumienia i częstość kołowa oscylacji j -tej postaci drgań własnych.

Postaciami drgań własnych kołującego samolotu nazwano na podstawie [8] kolumny macierzy fundamentalnej (14). W celu obliczenia współczynników tłumienia ξ i częstości kołowych oscylacji η zastosowano algorytm Householdera. Obliczenia numeryczne przeprowadzono w języku FORTRAN 4 na maszynie cyfrowej CDC-6400 dla samolotu M17 w konfiguracji lądowania. Rysunki 3 ÷ 6 wykreślono na plotterze firmy CALCOMP pracującym w układzie *online* z maszyną cyfrową CDC-6400.

Analizując wektory i wartości własne macierzy stanu R , gdzie

$$R = \left[\begin{array}{c|cc} \begin{array}{c} A^{-1} \\ O_{33} \end{array} & \begin{array}{c} O_{33} \\ E_3 \end{array} & \begin{array}{c} O_{32} \\ O_{32} \end{array} \\ \hline & & \begin{array}{c} \frac{V}{\sigma} \quad 0 \\ 0 \quad \frac{V}{\sigma} \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} O_{23} \\ O_{23} \end{array} & \begin{array}{c} O_{23} \\ O_{23} \end{array} & \begin{array}{c} T_1 \\ -E_2 \end{array} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} B \\ E_3 \end{array} & \begin{array}{c} C \\ O_r \end{array} \\ \hline & T_2 \end{array} \right],$$

stwierdzono, że o dynamicznych własnościach kołującego samolotu decydują 2 postacie drgań własnych:

— *wężykowanie przedniego podwozia* — oscylacyjna postać drgań własnych o częstościach około 8 Hz dla małych współczynników tłumienia ($S_p < 10$ Nm/(rd/s)) oraz nieoscylacyjna dla dużych współczynników tłumienia ($S_p > 10$ Nm/(rd/s)). Ruchem dominującym [8] *wężykowania przedniego podwozia* są narastające drgania skrętne goleni dla współczynników relaksacji pneumatyków $\sigma > 0,07$ m dla małych prędkości ruchu oraz malejące dla współczynników relaksacji $\sigma < 0,07$ m niezależnie od prędkości ruchu (rys. 3);

— *odchylenie samolotu* — oscylacyjna postać drgań własnych o częstościach około 0,4 Hz dla prędkości $V > 5$ m/s. Ruchami dominującymi *odchylenia samolotu* jest znoszenie boczne y_1 sprzężone z odchyleniem ψ . Dla współczynników tłumienia viskotycznego

drgań skrętnych goleni przedniego podwozia $S_p < 40$ Nm/(rd/s) *odchylanie samolotu* jest malejące.

Macierz stanu \mathbf{R} (14) ma ponadto 2 wartości własne rzeczywiste ujemne ($-700 < \xi < -100$) oraz 2 wartości własne zerowe odpowiadające współrzędnym cyklicznym y_1, ψ .

Na rys. 3 - 6 przedstawiono zależność współczynników tłumienia i częstości oscylacji *wężykowania przedniego podwozia i odchylania samolotu* w funkcji prędkości ruchu V dla różnych współczynników relaksacji pneumatyków σ , różnych kątów pochylenia goleni ε i różnych współczynników tłumienia viskotycznego S_p . Na podstawie współczynników tłumienia i częstości oscylacji obliczono odpowiadające czasy stłumienia amplitud danej postaci do połowy oraz okresy drgań.

Z rys. 3 wynika, że współczynnik relaksacji pneumatyków σ bardzo silnie wpływa na tłumienie *wężykowania*. Przy współczynnikach relaksacji $\sigma > 0,07$ m i dla prędkości mniejszych od 20 m/s *wężykowanie* jest niestateczne. *Odchylanie* przy prędkościach powyżej 3 m/s praktycznie nie zależy od współczynnika relaksacji σ . Niestateczność *wężykowania* może być szczególnie niebezpieczna z uwagi na wysoką częstość drgań (~ 8 Hz). Z praktyki wiadomo, że ruch stateczny z człowiekiem w układzie sterowania jest możliwy, o ile częstość narastających oscylacji układu niesterowanego nie przekracza 2 Hz.

Na rys. 4 przedstawiono tłumienie i częstość *wężykowania i odchylania* przy współczynniku tłumienia $S_p = 2$ Nm/(rd/s) dla różnych kątów pochylenia goleni ε . Ujemne kąty pochylenia goleni bardzo silnie ustateczniają *wężykowanie* oraz uniestateczniają *odchylanie* przy jednoczesnym zmniejszeniu częstości *odchylania* z około 0,4 Hz do około 0,2 Hz. Częstość *wężykowania* praktycznie nie zależy od kąta pochylenia goleni ε .

Na rys. 5 przedstawiono tłumienie i częstość *wężykowania i odchylania* przy współczynniku tłumienia $S_p = 20$ Nm/(rd/s) dla różnych kątów pochylenia goleni ε . Silne tłumienie drgań skrętnych goleni S_p spowodowało, że *wężykowanie* przy prędkościach $V > 6$ m/s jest postacią nieoscylacyjną. Kąt pochylenia goleni ε ma niewielki wpływ na *wężykowanie*, natomiast ma silny wpływ na *odchylanie*. Ujemne kąty pochylenia goleni ε uniestateczniają *odchylanie* przy jednoczesnym zmniejszeniu częstości *odchylania*.

Na rys. 6 przedstawiono tłumienie i częstość *wężykowania i odchylania* dla kąta pochylenia goleni $\varepsilon = 7^\circ$ przy różnych współczynnikach tłumienia S_p w układzie sterowania podwoziem przednim. Współczynnik tłumienia *odchylania* samolotu, a także częstość *odchylania i wężykowania* praktycznie nie zależą od współczynnika S_p . Wzrost współczynnika S_p bardzo silnie natomiast ustatecznia *wężykowanie* przedniego podwozia. *Wężykowanie* przedniego podwozia będzie stateczne jeżeli $S_p > 1,2$ Nm/(rd/s).

4. Dane przyjęte do obliczeń numerycznych

$$M_p = 15 \text{ kg}$$

$$M_s = 900 \text{ kg}$$

$$J_{px} = 0,54 \text{ kgm}^2$$

$$J_{py} = 0,55 \text{ kgm}^2$$

$$J_{pz} = 0,11 \text{ kgm}^2$$

$$f = 0,12 \text{ m}$$

$$J_{py} = 0,21 \text{ kgm}^2$$

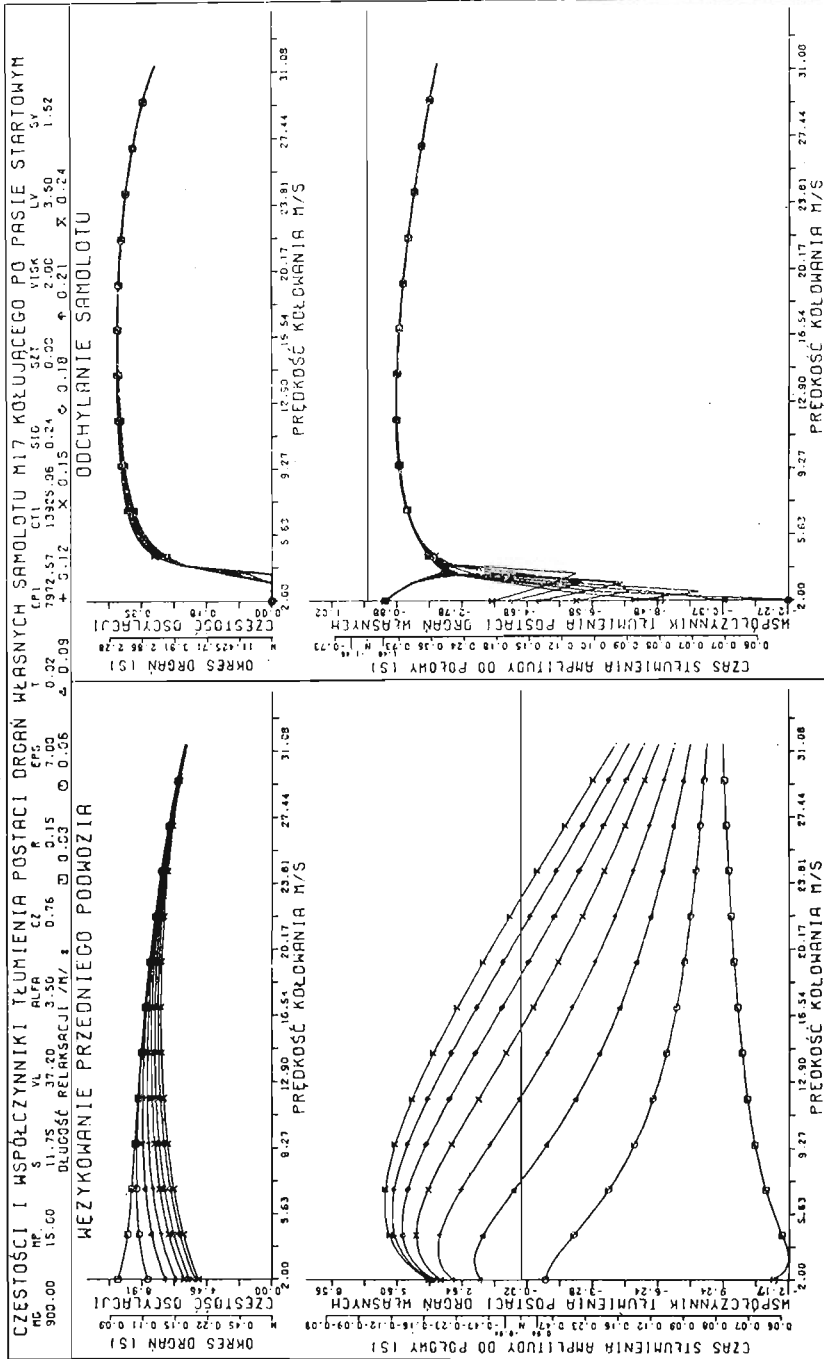
$$\varepsilon = 7^\circ$$

$$b = 0,41 \text{ m}$$

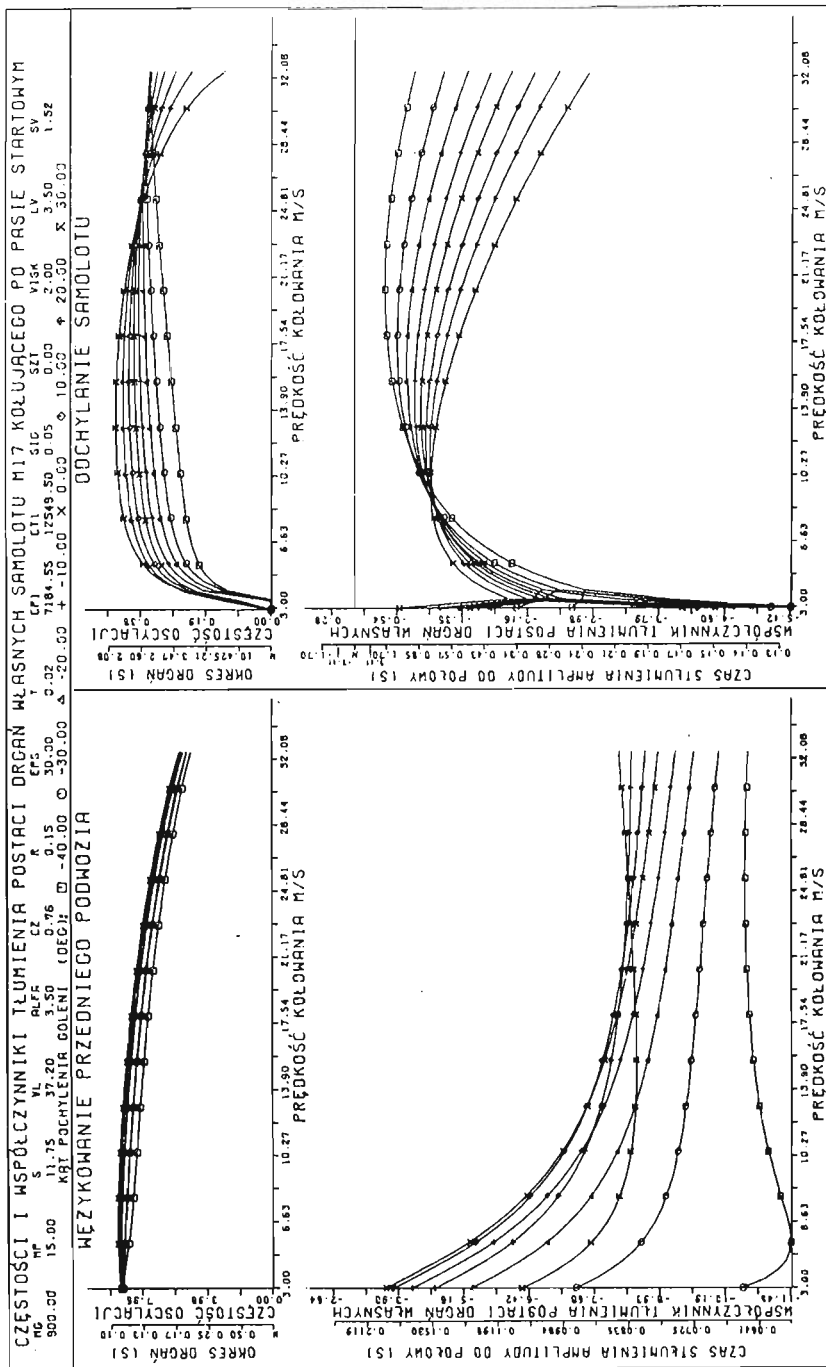
$$l = 0,02 \text{ m}$$

$$k = 1,7 \text{ m}$$

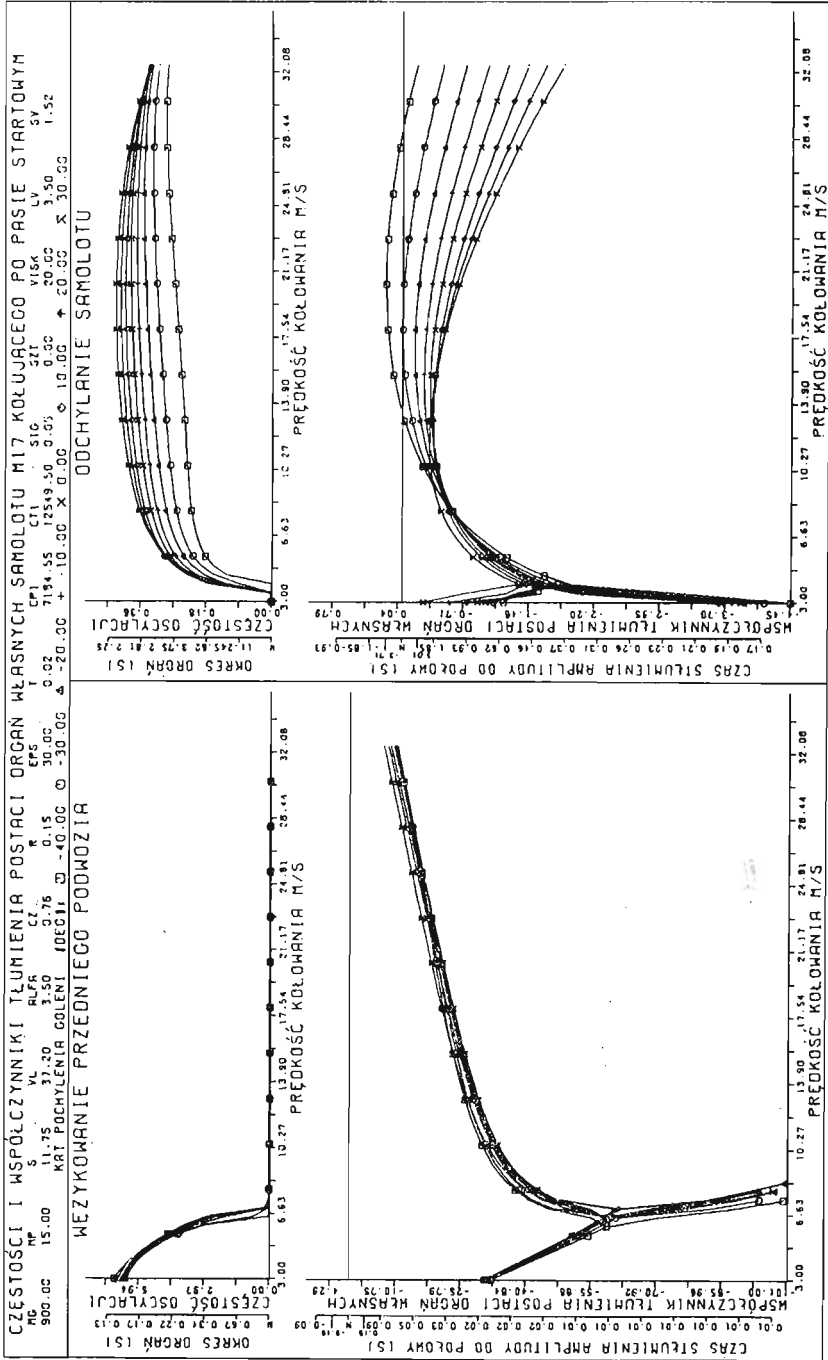
$$h = 1,05 \text{ m}$$



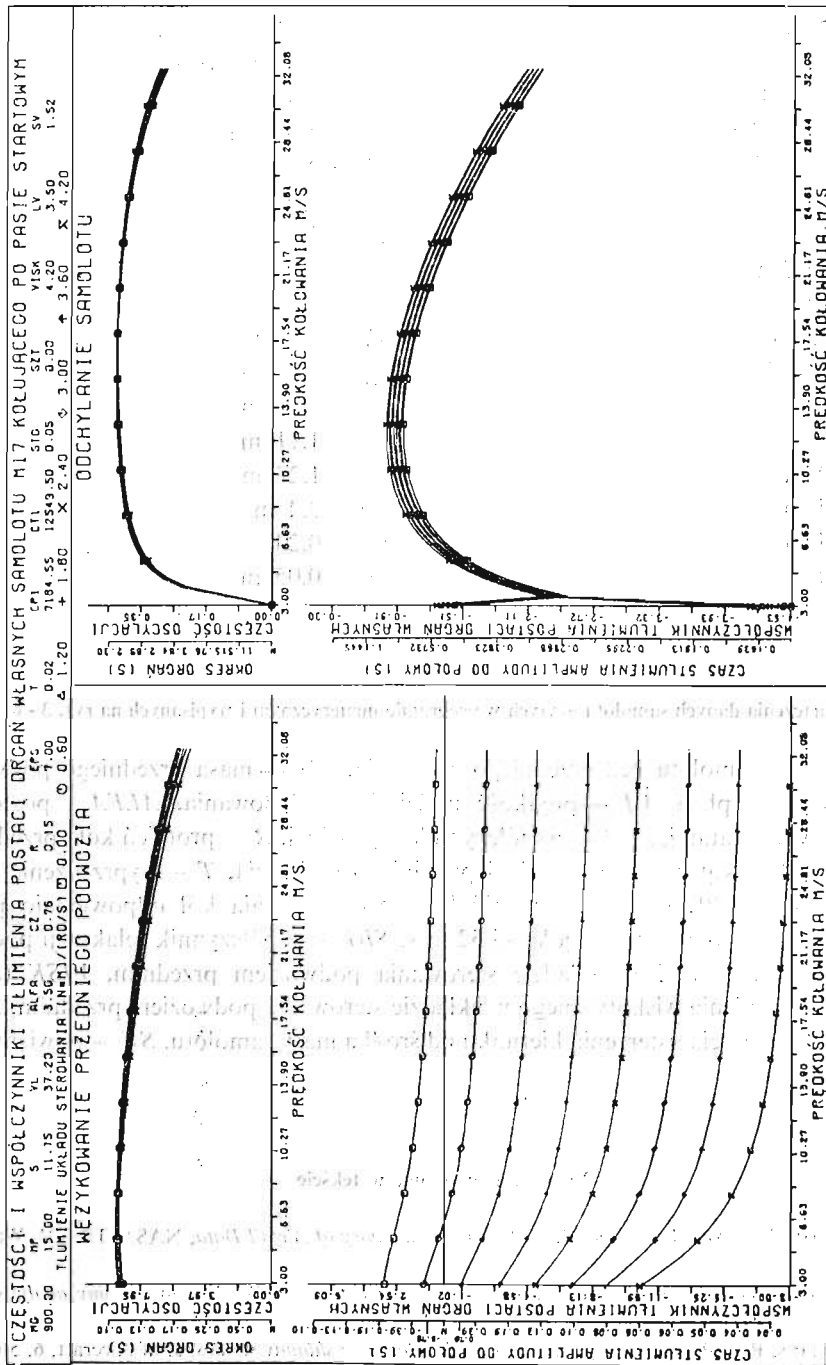
Rys. 3. Wpływ współczynnika relaksacji σ i prędkości V na postacie drgań własnych samolotu w czasie ruchu po ziemi



Rys. 4. Wpływ kąta pochylenia gołeni przedniego podwozia i prędkości V na postacie drgań własnych samolotu w czasie ruchu po ziemi przy współczynniku tłumienia viskozycznego $S_p = 2 \text{ Nm}/(\text{rd/s})$



Rys. 5. Wpływ kąta pochylecia nogi przedniego podwozia i prędkości V na postacie drgań własnych samolotu w czasie ruchu po ziemi przy współczynniku tłumienia wiskotycznego $S_p = 20 \text{ Nm/(rd/s)}$



Rys. 6. Wpływ współczynnika tłumienia wiskotycznego S_p i prędkości V na postacie drgań własnych samolotu w czasie ruchu po ziemi

$e = 0,0$ m	$\Lambda_{EII} = 4$
$R = 0,15$ m	$k_{p1} = 10,5$ (N/rd)/N
$l = 1,72$ m	$k_{p3} = 1,0$ (N/rd)/N
$K_p = 0$ Nm/rd	$k_G = 5,0$ (N/rd)/N
$S_p = 2$ Nm/(rd/s)	$a_r = 2$ (1/rd)
$g = 9,81$ m/s ²	$d_s = 0$
$c_{mbu} = -0,05$	$S_r = 1,52$ m ²
$C_{x0} = 0,01$	$S_k = 2,5$ m ²
$a_1 = 0,061$ /deg	$\lambda = 7,5$
$\alpha_0 = -1,4^\circ$	$l_V = 3,5$ m
$S = 11,75$ m ²	$d_k = 0,8$ m
$\rho = 1,23$ kg/m ³	$h_{k1} = 0,52$ m
$\delta_H = 0^\circ$	$h_{k2} = 0,57$ m
$S_H = 2$ m ²	$s_{k1} = 1,11$ m
$l_H = 3,49$ m	$s_{k2} = 1,27$ m
$Z_H = 0,84$ m	$b = 9,4$ m
$l_A = 1,25$ m	$w_3 = 0.24$
$\mu = 0,04$	$\sigma = 0.05$ m
$\alpha = 3,5^\circ$	

5. Oznaczenia danych samolotu użytych w programie numerycznym i wypisanych na rys. 3 - 6

MG — masa samolotu bez przedniego podwozia, MP — masa przedniego podwozia, S — powierzchnia płata, VL — prędkość podejścia do lądowania, $ALFA$ — postojowy geometryczny kąt natarcia, CZ — współczynnik siły nośnej, R — promień koła przedniego podwozia, EPS — kąt pochylenia goleni przedniego podwozia, T — wyprzedzenie (śląd) przedniego koła, $CP1$, $CT1$ — sztywność bocznego znoszenia kół odpowiednio przedniego i tylnego podwozia przy prędkości 32 m/s, SIG — współczynnik relaksacji pneumatyków, SZT — sztywność w układzie sterowania podwoziem przednim, $VISK$ (S_p) — współczynnik tłumienia wiskotycznego w układzie sterowania podwoziem przednim, LV — odległość środka parcia usterzenia kierunku od środka masy samolotu, SV — powierzchnia usterzenia kierunku.

Literatura cytowana w tekście

1. T. H. ABBOT, A. E. VON DOENHOFF, S. L. STIVERS, *Summary of Airfoil Data*, NASA TR-824, Washington 1945.
2. R. L. COLLINS, *Theories on the mechanics of the tires and their applications to shimmy analysis*, J. of Aircraft, 8, 4 (1971).
3. R. L. COLLINS, R. I. BLACK, *Tire parameters for landing-gear shimmy studies*, J. of Aircraft, 6, 5 (1969).
4. Engineering Sciences Data (Data Sheets: *Aerodynamics, Aircraft, Controls, Flaps, Wings*), Royal Aeronautical Society, London.
5. B. ETKIN, *Dynamics of Atmospheric Flight*, John Wiley and Sons, Inc, New York, London, Sydney, Toronto 1972.

6. W. FISZDON, *Mechanika lotu*, PWN, Warszawa 1961.
7. Z. GORAJ, *Macierzowy zapis nieliniowych równań ruchu generowanych formalizmem Lagrange'a*, Mech. Teoret. Stos., **14**, 2 (1976).
8. Z. GORAJ, *Stateczność strukturalna modeli matematycznych pojazdów jednośladowych*, Praca doktorska w Politechnice Warszawskiej (nie publikowana), Warszawa 1977.
9. R. GUTOWSKI, *Mechanika analityczna*, PWN, Warszawa 1971.
10. J. MARYNIAK, M. ZŁOCKA, *Stateczność boczna samolotu i drgania lotek z uwzględnieniem odkształcalności giętej skrzydeł i sprężystości układu sterowania*, Mech. Teoret. Stos., **14**, 2 (1976).
11. J. MARYNIAK, A. BANAŚ, Z. GORAJ, Z. PATURSKI, M. ZŁOCKA, *Boczna równowaga, stateczność i sterowność samolotu*, Sprawozdanie dla OBR-SK Mielec Nr 80/76, Warszawa 1976.
12. Ю. И. НЕЙМАРК, Н. А. ФУФАЕВ, *Динамика неголономных систем*, Наука, Москва 1967.
13. Н. В. ПАСЕЖКА, *Analysis of the dynamic response of a rolling string-type tire model to lateral wheel — plane vibrations*, Vehicle System Dynamics **1**, 37 - 66 (1972).
14. Н. В. ПАСЕЖКА, *The Wheel Shimmy Phenomenon*, Ph. D. thesis, Delft Technical Institute, The Netherlands, Delft 1966.
15. W. A. PODGÓRSKI, A. I. KRAUTER, R. H. RAND, *The Wheel shimmy problem: its relationship to wheel and road irregularities*, Vehicle System Dynamics **4**, 9 - 41 (1975).
16. L. C. ROGERS, H. K. BREWER, *Synthesis of tire equations for use in shimmy and other dynamics studies*, J. of Aircraft, **8**, 9 (1971).
17. F. O. SMETANA, D. C. SUMMEG, R. K. CARDEN, *Light Aircraft Lift, Drag and Moment Prediction — a Review and Analysis*, NASA CR-2523, Washington 1975.
18. F. C. SMETANA, D. C. SUMMEG, W. D. JOHNSON, *Riding and Handling Qualities of Light Aircraft — a Review and Analysis*, NASA CR-1975, Washington 1972.
19. R. F. SMILEY, *Correlation, Evaluation, and Extension of Linearized Theories for Tire Motion and Wheel Shimmy*, NASA 1299, Washington 1957.
20. S. M. STUBBS, Z. A. BYRDSOONG, R. K. SLEEPER, *An Experimental Simulation Study of Four Crosswind Landing — Gear Concepts*, NASA TND-7864, Washington 1975.

Р е з ю м е

БОКОВАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СПОРТИВНОГО САМОЛЕТА ДВИЖУЩЕГОСЯ
ПО ЗЕМЛЕ ПОСЛЕ ПОСАДКИ

В работе представлена математическая модель спортивного самолета, движущегося по земле после посадки. Учитывается пять степеней свободы. Нестационарные боковые силы, действующие на шины колес, считаются линейными функциями бокового перемещения, угла перекоса стойки и стационарных аэродинамических сил. Уравнения движения выведены с помощью уравнений Больцмана-Гамеля для голономных систем.

На основе полного анализа установлено, что решающими для динамических свойств самолета движущегося по земле являются две формы собственных колебаний: рыскание переднего шасси и отклонение самолета. Рассмотрен также эффект изменений параметров самолета.

S u m m a r y

THE LATERAL STABILITY OF SPORTS AIRCRAFT DURING
LANDING RUN

Mathematical model of the sports aircraft during the landing run with five degrees of freedom is presented. Non-steady state tyre side forces are developed as linear function of sideslip, camber angle and stationary aerodynamics forces. The equations of motion in quasi — coordinates are derived by application of Boltzmann-Hamel equations for the system with holonomic constraints.

Results of the full analysis show that the aircraft during the landing run has two physically significant modes, which are referred to here as the shimmy and yaw modes. An effect of parameters changes is discussed.

INSTYTUT TECHNIKI LOTNICZEJ I MECHANIKI STOSOWANEJ
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 lutego 1977 r.