

## NIESTOWARZYSZONE PRAWO PŁYNIĘCIA ANIZOTROPOWYCH PLASTYCZNIE STOPÓW ALUMINIUM

ANDRZEJ LITWKA (POZNAŃ)

### 1. Wstęp

Badania plastycznego płynięcia przeprowadzone dla blachy wykonanej ze stopu aluminium PA4 [2] wykazały rozbieżność pomiędzy odkształceniami plastycznymi pomierzonymi doświadczalnie a uzyskanymi w oparciu o stowarzyszone prawo płynięcia. W wyniku pomiarów granic plastyczności przy rozciąganiu w płaszczyźnie blachy stwierdzono, że granica plastyczności jest niezależna od orientacji próbki. Natomiast równoczesny pomiar odkształceń plastycznych wykazał, że odkształcenia plastyczne zmieniają się w zależności od kierunku, w którym próbka została wycięta. Zaobserwowane odchylenie od stowarzyszonego prawa płynięcia wyniknęło więc stąd, że przy pomiarze granic plastyczności stwierdzono izotropię transwersalną [3], natomiast pomiar odkształceń plastycznych wykazał istnienie ortotropii plastycznej. W takim przypadku stowarzyszone prawo płynięcia nie może dać poprawnego opisu plastycznego płynięcia, gdyż stałość granicy plastyczności wymaga, ażeby warunek plastyczności dla naprężeń w płaszczyźnie blachy był izotropowy, natomiast potencjał plastyczności musi być anizotropowy, z uwagi na stwierdzoną anizotropię odkształceń plastycznych.

W niniejszej pracy przedstawiono opis początkowego plastycznego płynięcia przy osiowym rozciąganiu próbek wykonanych ze stopów aluminium PA2 i PA4, uzyskany w oparciu o niestowarzyszone prawo płynięcia, w którym jako potencjał plastyczności wykorzystano anizotropowy warunek plastyczności zaproponowany przez OTA, SHINDO i FUKUOKĘ [4].

### 2. Sformułowanie problemu

Warunek plastyczności OTA, SHINDO i FUKUOKI, stanowiący modyfikację znanego anizotropowego warunku HILLA [1], uwzględniającą odmiennosć własności materiału przy ściskaniu i rozciąganiu, ma postać

$$(2.1) \quad 2f(\sigma_{ij}) = F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{31}^2 + \\ + 2N\sigma_{12}^2 - C\sigma_{11} - D\sigma_{22} - E\sigma_{33} = 1,$$

gdzie:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} 2F &= \frac{1}{X_{22}X'_{22}} + \frac{1}{X_{33}X'_{33}} - \frac{1}{X_{11}X'_{11}}, \\ 2G &= \frac{1}{X_{33}X'_{33}} + \frac{1}{X_{11}X'_{11}} - \frac{1}{X_{22}X'_{22}}, \\ 2H &= \frac{1}{X_{11}X'_{11}} + \frac{1}{X_{22}X'_{22}} - \frac{1}{X_{33}X'_{33}}, \\ C &= \frac{X_{11} - X'_{11}}{X_{11}X'_{11}} & 2L &= \frac{1}{X_{23}^2}, \\ D &= \frac{X_{22} - X'_{22}}{X_{22}X'_{22}} & 2M &= \frac{1}{X_{31}^2}, \\ E &= \frac{X_{33} - X'_{33}}{X_{33}X'_{33}} & 2N &= \frac{1}{X_{12}^2}, \end{aligned}$$

gdzie  $X_{11}$ ,  $X_{22}$ ,  $X_{33}$  oraz  $X'_{11}$ ,  $X'_{22}$ ,  $X'_{33}$  są granicami plastyczności, odpowiednio, przy rozciąganiu i ściskaniu w trzech wzajemnie prostopadłych kierunkach określonych przez osie układu współrzędnych  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , natomiast  $X_{12}$ ,  $X_{23}$ ,  $X_{31}$  są odpowiednimi granicami plastyczności przy ścinaniu. W dalszych rozważaniach przyjęto, że osie  $x_1$  i  $x_2$  leżą w płaszczyźnie blachy, przy czym oś  $x_1$  pokrywa się z kierunkiem walcowania blachy, natomiast oś  $x_3$  jest prostopadła do płaszczyzny blachy.

W dalszym ciągu rozważań wygodnie było się posłużyć stosunkami przyrostów odkształceń, które w przypadku rozciągania próbki nachylonej pod kątem  $\alpha$  do kierunku osi  $x_1$  mają dla potencjału plastyczności wyrażonego równaniami (2.1) i (2.2) następującą postać:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \nu_{21} &= \frac{d\varepsilon_{2,2}^p}{d\varepsilon_{1,1}^p} = \frac{A_1 - A_2 \cos^2 2\alpha - \frac{2}{\sigma(\alpha)} (C \sin^2 \alpha + D \cos^2 \alpha)}{A_3 + A_2 \cos^2 2\alpha - A_4 \cos 2\alpha - \frac{2}{\sigma(\alpha)} (C \cos^2 \alpha + D \sin^2 \alpha)}, \\ \nu_{31} &= \frac{d\varepsilon_{3,3}^p}{d\varepsilon_{1,1}^p} = \frac{-A_5 + A_4 \cos 2\alpha - \frac{2}{\sigma(\alpha)} E}{A_3 + A_2 \cos^2 2\alpha - A_4 \cos 2\alpha - \frac{2}{\sigma(\alpha)} (C \cos^2 \alpha + D \sin^2 \alpha)}, \end{aligned}$$

gdzie  $\sigma(\alpha)$  jest naprężeniem występującym w próbce, a  $d\varepsilon_{1,1}^p$ ,  $d\varepsilon_{2,2}^p$ ,  $d\varepsilon_{3,3}^p$  są przyrostami odkształceń plastycznych, mierzonymi, odpowiednio, po długości, szerokości i grubości próbki, oraz gdzie

$$\begin{aligned} A_1 &= F + G - 2N, & A_4 &= 2(F - G), \\ A_2 &= F + G + 4H - 2N, & A_5 &= 2(F + G), \\ A_3 &= F + G + 2N, \end{aligned}$$

Zależność granicy plastyczności  $\sigma(\alpha)$  przy osiowym obciążeniu przedstawia poniższe równanie

$$(2.4) \quad [F \sin^2 \alpha + G \cos^2 \alpha + H + (2N - F - G - 4H) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha] \sigma^2(\alpha) - (C \cos^2 \alpha + D \sin^2 \alpha) \sigma(\alpha) = 1.$$

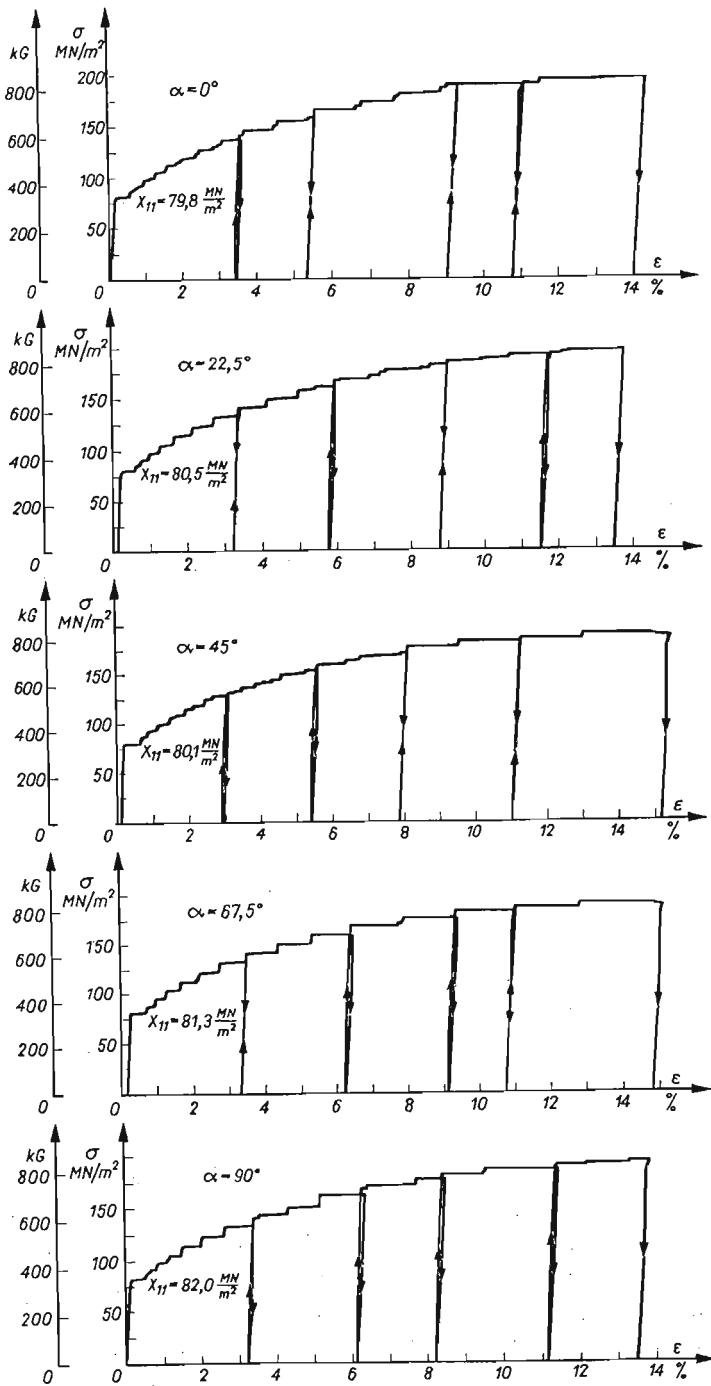
Sposób przeprowadzenia pomiarów odkształceń plastycznych oraz pomiar granic plastyczności omówiono w pracy [2], gdzie pokazano również krzywe rozciągania dla stopu aluminium PA4. Krzywe rozciągania utrwalone rejestratorem MKe B. Holle dla stopu PA2 przy rozciąganiu próbek pod różnymi kątami w stosunku do kierunku walcowania pokazano na rys. 1. Przebieg tych krzywych w zakresie odkształceń plastycznych wskazuje na istnienie wyraźnego efektu Portevina-Le Chateliera, natomiast krzywe dla stopu PA4, przedstawione w pracy [2] nie wykazywały tego efektu.

Granice plastyczności przedstawione na rys. 2 są w przypadku stopu PA2 wyraźnymi granicami plastyczności, określonymi jako punkt załamania krzywej rozciągania w chwili pojawienia się odkształceń plastycznych. Natomiast granice plastyczności dla stopu PA4, pokazane na rys. 2, są umownymi granicami plastyczności, określonymi dla odkształceń plastycznych o wartości równej 0,2%. Z rys. 2 wynika, że w przypadku badanych stopów aluminium obserwuje się przy pomiarze granic plastyczności izotropię w płaszczyźnie blachy. Na podstawie rys. 1 oraz krzywych rozciągania dla stopu PA4, pokazanych w pracy [2] można stwierdzić, że badane materiały wykazują również izotropię modułów wzmocnienia, co wynika z pokrywania się krzywych dla próbek wycinanych pod różnymi kątami do kierunku walcowania.

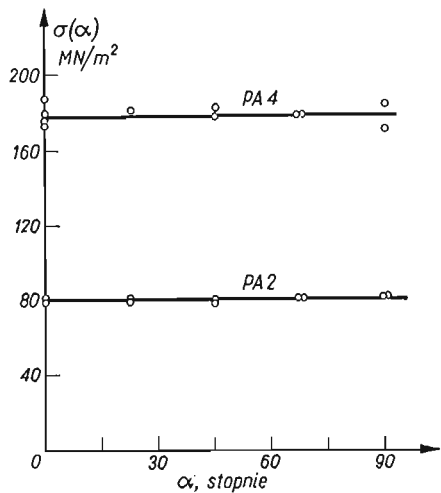
Rysunek 3 przedstawia określone doświadczalnie stosunki przyrostów odkształceń plastycznych dla początkowego plastycznego płynięcia stopów PA2 i PA4. Bezpośredni pomiar tych wielkości był kłopotliwy i niedokładny, gdyż wymagał bardzo precyzyjnego pomiaru niewielkich odkształceń plastycznych w chwili przejścia materiału w stan plastyczny. Z tego względu stosunki przyrostów odkształceń plastycznych  $\nu_{21}$  i  $\nu_{31}$  obliczano na podstawie pomierzonych stosunków odkształceń plastycznych  $\nu_{21}^*$  i  $\nu_{31}^*$  wykorzystując zależności:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \nu_{21} &= \nu_{21}^* + \varepsilon_{1'1'}^p \cdot \frac{d\nu_{21}^*}{d\varepsilon_{1'1'}^p}, \\ \nu_{31} &= \nu_{31}^* + \varepsilon_{1'1'}^p \cdot \frac{d\nu_{31}^*}{d\varepsilon_{1'1'}^p}, \end{aligned}$$

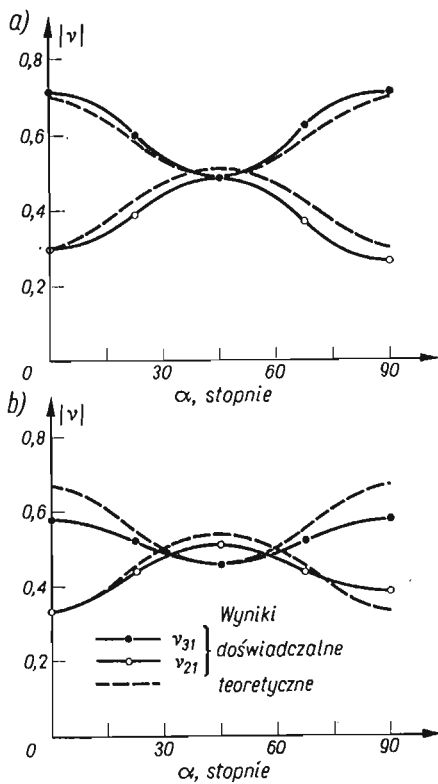
oraz rys. 4. Ze względu na to, że  $\nu_{21}^* \rightarrow \nu_{21}$  oraz  $\nu_{31}^* \rightarrow \nu_{31}$  dla  $\varepsilon_{1'1'}^p \rightarrow 0$ , poszukiwane wartości  $\nu_{21}$  i  $\nu_{31}$  znajdowano z rys. 4 jako punkty przecięcia krzywych z osią pionową. Z badań doświadczalnych [2] otrzymano również granice plastyczności dla ściskania dla  $\alpha = 0^\circ$  i  $90^\circ$ . Ze względu na małą grubość blachy (5 mm dla PA4 i 2 mm dla PA2) nie można było przeprowadzić pomiarów granic plastyczności  $X_{33}$  i  $X'_{33}$ , natomiast pomiar  $X_{12}$  był kłopotliwy ze względu na konieczność realizacji czystego ścinania. Doświadczalnie pomierzono więc tylko cztery spośród dziewięciu granic plastyczności, które występują w równaniu (2.1), ponieważ jednak w przypadku płaskiego stanu naprężenia nie występują stałe  $L$  i  $M$  (porównaj równania (2.3)) brakuje tylko trzech granic plastyczności  $X_{33}$ ,  $X'_{33}$  oraz  $X_{12}$ . Do jakościowego porównania wyników doświadczeń z wynikami otrzymanymi z równań (2.3) stałe te nie są jednak potrzebne. Pamiętając, że granica plastyczności  $\sigma(\alpha)$  jest stała dla wszystkich kątów  $\alpha$ , co również pociąga za sobą równość  $F = G$  oraz  $C = D$ , otrzymujemy z równań (2.3), biorąc również pod uwagę równanie (2.4), stałe wartości  $\nu_{21}$  i  $\nu_{31}$ , niezależne od kąta  $\alpha$ . Jest to oczywiście sprzeczne z przedstawionymi na rys. 3 wynikami pomiarów przyrostów odkształceń plastycznych.



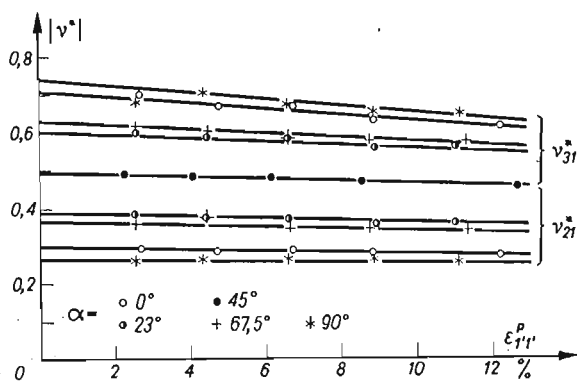
Rys. 1. Krzywe rozciągania dla stopu aluminium PA4



Rys. 2. Granice plastyczności przy rozciąganiu dla stopów aluminium PA2 i PA4



Rys. 3. Stosunki przyrostów odkształceń plastycznych  $\nu_{21}$  i  $\nu_{31}$  dla różnych kątów  $\alpha$  dla stopów aluminium: a) PA4, b) PA2



Rys. 4. Zależność stosunków  $\nu_{21}^*$  i  $\nu_{31}^*$  od odkształceń  $\epsilon_{1,1}^p$

Dla przeprowadzenia ilościowej analizy wyników konieczne było znalezienie brakujących stałych  $X_{33}$ ,  $X'_{33}$  i  $X_{12}$ . W tym miejscu należy wyraźnie rozgraniczyć dwa następujące problemy:

a) obliczenie brakujących granic plastyczności dla warunku plastyczności  $f(\sigma_{ij})$  zapisanego równaniem (2.1), wyspecyfikowanego dla przypadku izotropii transwersalnej,

b) obliczenie brakujących stałych dla potencjału plastyczności  $g(\sigma_{ij}, \alpha)$  zapisanego równaniem (2.1), dostosowanego do szczególnego przypadku anizotropii, przy którym zachodzą równości  $F = G$  i  $C = D$ .

Wyznaczone w ten sposób brakujące stałe umożliwią znalezienie ostatecznej postaci potencjału plastyczności.

### 3. Obliczenie brakujących stałych

**3.1. Stałe dla warunku plastyczności.** Brakujące granice  $X_{33}$ ,  $X'_{33}$  i  $X_{12}$  obliczone zostały przy wykorzystaniu następujących warunków:

a) warunek nieściśliwości materiału, który, biorąc pod uwagę stwierdzone doświadczalnie równości  $X_{11} = X_{22}$  oraz  $X'_{11} = X'_{22}$  pociąga za sobą równość

$$(3.1) \quad \frac{X_{33} - X'_{33}}{2X_{33}X'_{33}} = - \frac{X_{11} - X'_{11}}{X_{11}X'_{11}};$$

b) warunek, ażeby dla  $\alpha = 0^\circ$  stosunek  $\nu_{21}$ , wyrażony równaniem (2.3)<sub>1</sub> był równy doświadczalnie pomierzonej wartości. Po przekształceniu równań (3.1) i (2.3)<sub>1</sub> otrzymujemy następujące zależności

$$(3.2) \quad \left[ \frac{2(\nu_{21}^{(0)} + 1)}{X_{11}X'_{11}} + \frac{X_{11} - X'_{11}}{\sigma(0)X_{11}X'_{11}} (1 - \nu_{21}^{(0)}) \right] (X'_{33})^2 - 2 \frac{X_{11} - X'_{11}}{X_{11}X'_{11}} X'_{33} - 1 = 0,$$

$$X_{33} = \frac{X_{33}}{1 + 2 \frac{X_{11} - X'_{11}}{X_{11}X'_{11}} X'_{33}},$$

służące do obliczenia wartości  $X_{33}$  oraz  $X'_{33}$ , gdzie  $\nu_{21}^{(0)}$  jest wartością stosunku przyrostów odkształceń dla  $\alpha = 0$ ;

c) warunek stałości granicy plastyczności  $\sigma(\alpha)$ , który, biorąc pod uwagę równanie (2.4) ma postać

$$(3.3) \quad N = F + 2H,$$

skąd można obliczyć  $X_{12}$ .

**3.2. Stałe dla potencjału plastyczności.** Z równań (2.3) i (2.4) widać, że o istnieniu stwierdzonej doświadczalnie anizotropii decyduje w rozpatrywanym przypadku tylko stała  $N$ . W związku z tym wartości  $X_{33}$  i  $X'_{33}$  będzie można obliczyć z równania (3.2), natomiast wartość  $N$  musi być inna niż określona równaniem (3.3). Poszukiwaną wartość  $N$  obliczono

z warunku, że stosunek  $\nu_{31}$ , przedstawiony równaniem (2,3)<sub>2</sub> musi być dla kąta  $\alpha = 45^\circ$  równy zmierzonej doświadczalnie wartości. Dla  $\alpha = 45^\circ$  równanie (2.3)<sub>2</sub> ma postać

$$(3.4) \quad \nu_{31}^{(45)} = \frac{-2F - \frac{E}{\sigma(45)}}{F + N - \frac{C}{\sigma(45)}}$$

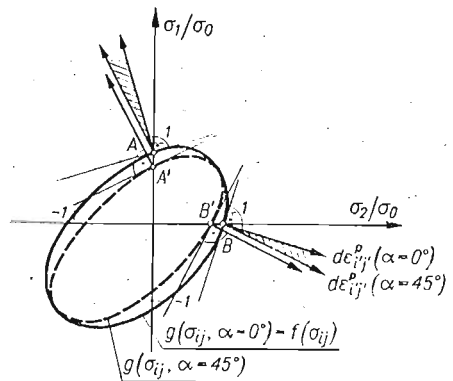
gdzie  $\sigma(45)$  jest wartością, która musi spełniać równanie (2.4). Po przekształceniu równań (3.4) i (2.4) otrzymujemy następujące zależności:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \nu_{31}^{(45)} \sigma^2(45) + \frac{1}{2} \left( C + \frac{E}{\nu_{31}^{(45)}} \right) \sigma(45) + 1 &= 0, \\ N &= \frac{C}{\sigma(45)} - F - \frac{1}{\nu_{31}^{(45)}} \left( 2F + \frac{E}{\sigma(45)} \right) \end{aligned}$$

służące do obliczenia wartości  $N$ . Należy tu podkreślić, że równie dobrze można by wykorzystać warunek dotyczący  $\nu_{21}^{(45)}$  zamiast  $\nu_{31}^{(45)}$ .

4. Omówienie wyników

Interpretację geometryczną potencjału plastyczności  $g(\sigma_{ij}, \alpha)$  w układzie osi głównych  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  przy stałych określonych równaniami (3.2) i (3.5), przedstawiono dla stopu PA4 na rys. 5. Dla drugiego badanego materiału, to znaczy stopu PA2, ślady powierzchni



Rys. 5. Ślady powierzchni plastycznego płynięcia dla stopu PA4

płynięcia były podobne. Linia ciągłą przedstawiono ślad powierzchni płynięcia dla  $\alpha = 0^\circ$ , a przerywaną dla  $\alpha = 45^\circ$ . Występująca na rys. 5 wielkość  $\sigma_0$  jest średnią arytmetyczną  $X_{11}$  i  $X'_{11}$ . Łatwo zauważyć, że warunek plastyczności  $f(\sigma_{ij})$  zapisany dla granic plastyczności pomierzonych doświadczalnie i obliczonych w punkcie 3.1 pokrywa się z potencjałem plastyczności  $g(\sigma_{ij}, \alpha)$  dla  $\alpha = 0$ . Na rys. 5 pokazano również określone doświadczalnie kierunki wektorów przyrostów odkształceń plastycznych  $d\epsilon_{ij}^p$ , dla  $\alpha = 0$  i  $45^\circ$ . Zakresowany obszar jest zakresem zmienności kierunków  $d\epsilon_{ij}^p$ , dla różnych kątów  $\alpha$ . Z rys. 5

widać, że normalne do  $g(\sigma_{ij}, \alpha = 45^\circ)$  poprowadzone w punktach  $A'$  i  $B'$  odpowiadają określonym doświadczalnie kierunkom  $d\epsilon_{ij}^p$ , dla  $\alpha = 45^\circ$ . Zbieżność wyników doświadczalnych z wartościami obliczonymi z równań (2.3) dla potencjału plastyczności  $g(\sigma_{ij}, \alpha)$  jest wyraźniej widoczna na rys. 3, gdzie przedstawiono stosunki przyrostów odkształceń plastycznych  $\nu_{21}$  i  $\nu_{31}$  dla stopów aluminium PA2 i PA4.

Istotnym brakiem przedstawionych tu badań jest fakt, że ograniczają się one tylko do osiowego rozciągania próbek, to znaczy ograniczają się do stanu w dwóch punktach  $A$  i  $B$  przestrzeni naprężeń. Analiza byłaby pełniejsza, gdyby możliwe było przeprowadzenie badań dla stanu naprężenia, w którym występują obydwie naprężenia główne. Nie jest jednak praktycznie możliwe przeprowadzenie takich badań z wymaganą dokładnością. Odpada tutaj możliwość badania na próbkach rurkowych, gdyż nie jest możliwe wykonanie próbki rurkowej, która mogłaby zachować badane własności blach, natomiast badanie na próbkach krzyżowych, dwukierunkowo rozciąganych wymaga specjalnej maszyny wytrzymałościowej i nie zapewnia dostatecznie jednorodnego stanu naprężenia.

Przedstawione w niniejszej pracy wyniki mogą być nieco zniekształcone z uwagi na fakt występowania plastycznych odkształceń postaciowych  $\epsilon_{1'2}'$  przy rozciąganiu osiowym próbek wykonanych z materiału plastycznie anizotropowego. Problem polega mianowicie na tym, że w przypadku rozciągania osiowego sposób mocowania próbki utrudnia lub uniemożliwia powstanie odkształceń postaciowych, przez co stan naprężenia przestaje być stanem osiowym. Przyrost odkształceń postaciowych obliczony dla potencjału plastyczności (2.1) przedstawia się następująco:

$$(4.1) \quad d\epsilon_{1'2}' = -\frac{d\lambda}{4} \{ [F - G - (F + G + 4H - 2N) \cos 2\alpha] \sin 2\alpha \cdot \sigma(\alpha) - (C - D) \sin 2\alpha \}.$$

gdzie  $d\lambda$  jest mnożnikiem.

Z równania (4.1) wynika, że  $d\epsilon_{1'2}' = 0$  dla  $\alpha = 0^\circ, 45^\circ$  i  $90^\circ$  przy  $F = G$  i  $C = D$ . Otrzymane wyniki badań doświadczalnych mogą być więc zakłócone jedynie w przypadku próbek wycinanych pod kątami  $\alpha = 22,5^\circ$  i  $67,5^\circ$ , dla których odkształcenia postaciowe przybierają wartości ekstremalne. Nie wystąpi jednak z tego tytułu żadne zniekształcenie wyników dla  $\alpha = 45^\circ$ , gdzie zaobserwowano największe odchylenie od stowarzyszonego prawa płynięcia. Oznacza to, że odchylenie wyników doświadczalnych od stowarzyszonego prawa płynięcia nie jest spowodowane czynnikiem ubocznym, jakim mogłoby być zniekształcenie osiowego stanu naprężenia.

## 5. Wnioski

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że opis plastycznego płynięcia anizotropowych blach wykonanych ze stopów aluminium PA2 i PA4 może być przeprowadzony przy zastosowaniu niestowarzyszonego prawa płynięcia. W przypadku badanych materiałów zaobserwowane odchylenie od stowarzyszonego prawa płynięcia nie jest spowodowane zakłóceniami osiowego rozciągania próbek, wywołanymi powstawaniem plastycznych odkształceń postaciowych.



## Literatura cytowana w tekście

1. R. HILL, *A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals*, Proc. Roy. Soc. A193 (1948), 281 - 297.
2. A. LITEWKA, *Nieprawidłowości plastycznego pływnięcia anizotropowego stopu aluminium PA4*, VII Sympozjum Badań Dośw. w Mech. Ciała Stałego, Warszawa 1976, 322 - 332.
3. W. OLSZAK, W. URBANOWSKI, *The plastic potential and the generalized distortion energy in the theory of non-homogenous anisotropic elastic-plastic bodies*, Arch. Mech. Stos., 4, 8 (1956), 671 - 694.
4. T. OTA, A. SHINDO, H. FUKUOKA, *A consideration on anisotropic yield criterion*, Proc. 9th Jap. Nat. Congr. Appl. Mech., 1959, 117 - 120.

## Резюме

## НЕАССОЦИИРОВАННЫЙ ЗАКОН ТЕЧЕНИЯ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ АЛЮМИНИЕВЫХ СПЛАВОВ

В работе рассмотрено применение неассоциированного закона течения для пластического течения анизотропных алюминиевых сплавов PA2 и PA4. В качестве пластического потенциала использовано анизотропное условие течения, предложенное Отой, Шиндо и Фукуокой. В работе описывается способ вычисления постоянных, для которых получается наилучшее совпадение результатов вычислений с опытом.

## Summary

## NON-ASSOCIATED FLOW LAW FOR PLASTICALLY ANISOTROPIC ALUMINIUM ALLOYS

The application of non-associated flow rule for plastic flow of anisotropic aluminium alloys sheets PA2 and PA4 is presented. The anisotropic yield criterion proposed by Ota, Shindo and Fukuoka was used as a plastic potential. The method of calculation of constants to obtain the best fit with experimental results of plastic strain increment ratios is described.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 7 lutego 1977 r.*

---