MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1, 14 (1976)

ANALIZA JEDNOWYMIAROWYCH FAL UDERZENIOWYCH I PRZYSPIESZENIA W OŚRODKU NIESPRĘŻYSTYM

WITOLD KOSIŃSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Liczne badania eksperymentalne wykazują, że prawie wszystkie materiały konstrukcyjne przejawiają w mniejszym lub większym stopniu własności lepkie i plastyczne — ogólnie własności niesprężyste. Obok materiałów czysto konstrukcyjnych istnieje szereg materiałów wykorzystywanych do celów technologicznych we współczesnym przemyśle i charakteryzujących się również własnościami niesprężystymi. Uzyskanie danych o zachowaniu się tego typu materiałów pod wpływem obciążeń dynamicznych ma — oprócz charakteru poznawczego i teoretycznego — olbrzymie znaczenie w różnorodnych zastosowaniach praktycznych we współczesnej technice.

Jedną z dróg teoretycznej analizy i weryfikacji proponowanych matematycznych opisów zachowania się realnych materialnych ośrodków odkształcalnych jest badanie fal.

W ośrodkach niesprężystych, podobnie jak i w sprężystych, pod wpływem obciążeń dynamicznych rozprzestrzeniają się ze skończoną prędkością zaburzenia mechaniczne, tj. fale.

Badania eksperymentalne i teoretyczne dotyczące sformułowania i analizy równań konstytutywnych (związków fizycznych) mają najbogatszą literaturę dla zagadnień jednowymiarowych[1].

Teoretyczne studia nad problematyką falową odgrywają tutaj główną rolę dzięki możliwościom otrzymania potrzebnych i użytecznych informacji zarówno dla teoretyków, jak i konstruktorów.

Model jednowymiarowego niesprężystego (dysypatywnego) ośrodka ciągłego przyjęty w pracy jest opisywany odkształceniem i wektorem dodatkowych zmiennych, zwanych parametrami wewnętrznymi (albo wewnętrznymi zmiennymi stanu). Ewolucją tych dodatkowych zmiennych rządzi równanie różniczkowe pierwszego rzędu.

Model ośrodka przedstawiony w pracy może być użyty — po odpowiedniej specyfikacji parametrów wewnętrznych — do opisu szeregu znanych materiałów, poczynając od sprężystych, poprzez lepkosprężyste do sprężysto-lepkoplastycznych.

W teorii jednowymiarowej ośrodka materialnego dla opisu zjawiska rozprzestrzeniania się fal wprowadza się założenie o istnieniu krzywej w płaszczyźnie zmiennych X i t, na której wielkości kinematyczne lub ich pochodne doznają skokowej nieciągłości. Rząd

[1] Por. [13] i literaturę tam cytowaną.

najniższej pochodnej czasowej funkcji ruchu, nieciągłej na takiej krzywej, decyduje o rzędzie i nazwie fali. I tak, jeśli druga pochodna ruchu χ lub przemieszczenia u jest nieciągła, to mówimy, że mamy do czynienia z falą przyspieszenia (falą drugiego rzędu).[2] Występowanie fali pierwszego rzędu łączy się z nieciągłością pierwszej pochodnej przemieszczenia. Mówimy wtedy o fali prędkości. Ponieważ w takim przypadku gęstość masy ośrodka, która wyraża się przez pierwsze pochodne ruchu, jest też nieciągła, więc falę pierwszego rzędu nazywa się często falą uderzeniową (udarową).

W pracy zajmiemy się tymi dwoma rodzajami fal w zakresie teorii mechanicznej. W przyszłości rozszerzymy badania na efekty termiczne.

Zastosowana w pracy metoda badawcza opiera się na tzw. koncepcji powierzchni (krzywych) osobliwych. Dzięki niej było możliwe zbadanie zachowania się fal dla szerokiej klasy materiałów i wykazanie, że istotne i konkretne rezultaty mogą być uzyskane bez uciekania się do jakichkolwiek jawnych reprezentacji związków konstytutywnych. Stąd uzyskane wyniki są wspólne dla wszystkich materiałów opisywanych za pomocą przyjętego modelu ośrodka z parametrami wewnętrznymi.

Słuszności rezultatów otrzymanych w niniejszym opracowaniu nie ograniczają żadne założenia «małości» odkształceń czy liniowości związków.

W pracy wykazano ponadto, że choć założenia o ośrodku materialnym mają istotny wpływ na rozprzestrzenianie się w nim fal, to jednak jest możliwe, że fale propagujące się w różnych materiałach mogą zachowywać się w ten sam sposób. W szczególności pokazano, że zachowanie się fal przyspieszenia w nieliniowych ciałach sprężystych, lepkosprężystych, starzejących się sprężystych, a nawet sprężysto-lepkoplastycznych może być w pewnych sytuacjach jakościowo takie samo.

Literatura zagadnień falowych w materiałach opisywanych modelem z parametrami wewnętrznymi jest niewielka. Powodem tego jest fakt, że właściwy rozwój teorii z parametrami wewnętrznymi nastąpił pod koniec lat sześćdziesiątych dzięki jednoczesnym pracom Colemana i Gurtina [9] oraz Valanisa [42]. Natomiast pierwsza praca o falach przyspieszenia w cieczy była autorstwa Bürgera [6], po nich ukazała się praca Colemana i Gurtina [10]. Następne dotyczyły też fal przyspieszenia [2, 14, 16, 20]. Falę uderzeniową w cieczy z parametrami wewnętrznymi rozpatrzyli Chen i Gurtin [8], Bowen i Chen [5].

Analiza fal przyspieszenia i fal uderzeniowych dla ciał stałych została przedstawiona w pracach [2, 14 - 20, 22, 23].

Po raz pierwszy koncepcja parametrów wewnętrznych została wykorzystana do opisu materiałów plastycznych wrażliwych na prędkość odkształcenia w pracy Perzyny i Wojny [39]. Dopiero po niej pojawiły się inne teorie ośrodków niesprężystych[3] w ramach tej koncepcji[4].

Układ niniejszej pracy jest następujący: po zaznajomieniu czytelnika z podstawowymi oznaczeniami, opisano koncepcję krzywych osobliwych, tzn. fal przyspieszenia i fal pręd-

[2] Przyspieszenie jest drugą pochodną czasową przemieszczenia.

[3] W mechanice kontinuum koncepcję parametrów wewnętrznych jako jeden z pierwszych zastosował Biot [3]. Valanis wprowadził ją do opisu materiałów lepkosprężystych [42].

[4] Por. [4, 25, 26, 31 - 35, 37, 43].

kości (uderzeniowych). Rozdział 3 wprowadza koncepcję parametrów wewnętrznych jako wielkości niezbędnych do opisu zachowania się ośrodków niesprężystych (z dysypacją). Rozdział 4 poświęcony jest analizie fal przyspieszenia, a rozdział 5 porusza problem propagacji i zachowania się fal uderzeniowych. Opracowanie kończą dwa przykłady: fali przyspieszenia w nieliniowym materiale lepkosprężystym i fali uderzeniowej w ośrodku sprężysto-lepkoplastycznym.

2. Krzywe osobliwe

2.1. Kinematyka jednowymiarowych ruchów i prawa zachowania. Ograniczenie rozważań niniejszej pracy do jednowymiarowych ruchów ośrodków odkształcalnych powoduje, że wszystkie wielkości fizyczne, występujące w rozważaniach, są funkcjami tylko dwóch zmiennych niezależnych: cząstki X i czasu t. Zarówno X, jak i czas t, przyjmując wartości rzeczywiste, przebiegają pewne odcinki osi liczbowej $\mathbf{R}$. Przyjmujemy, że zakresem zmienności X jest przedział $\mathscr{B} \subset \mathbf{R}$, natomiast czasu — przedział $[0, L)$, gdzie L może być skończoną liczbą lub nieskończonością.

Jak zwykle w takich przypadkach, ciało (ośrodek materialny) identyfikujemy z przedziałem $\mathscr{B}$, gdyż tak go dobieramy, aby był obrazem ośrodka materialnego w pewnej ustalonej, jednorodnej konfiguracji odniesienia $\varkappa$ o gęstości masy ϱ_0[5].

Ruch ciała opisuje funkcja χ, której wartość $x = \chi(X, t)$ określa miejsce cząstki X w chwili t. Funkcja ruchu χ jednoznacznie wyznacza funkcję przemieszczenia u przepisem

$$u(X, t) = \chi(X, t) - X. \tag{2.1}$$

Pochodne funkcji ruchu χ, o ile istnieją, oznaczamy następująco:

$$\begin{aligned} F(X, t) &= \frac{\partial}{\partial X}\chi(X, t), & v(X, t) &= \frac{\partial}{\partial t}\chi(X, t), \\ \partial_X F(X, t) &= \frac{\partial^2}{\partial X^2}\chi(X, t), & \dot{F}(X, t) &= \frac{\partial^2}{\partial t\,\partial X}\chi(X, t), \\ \dot{v}(X, t) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}\chi(X, t). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Wartości funkcji $F(X, t)$, $v(X, t)$, $\dot{v}(X, t)$ nazywamy odpowiednio *gradientem deformacji*, *prędkością* i *przyspieszeniem* cząstki X w czasie t. Pochodne funkcji przemieszczenia (2.1) są wyrażone przez pochodne χ, jak następuje:

$$\begin{aligned} E(X, t) &= \frac{\partial}{\partial X}u(X, t) = F(X, t) - 1, & \dot{u}(X, t) &= v(X, t), \\ \partial_X E(X, t) &= \partial_X F(X, t), & \dot{E}(X, t) &= \dot{F}(X, t), \\ \ddot{u}(X, t) &= \dot{v}(X, t). \end{aligned} \tag{2.3}$$

[5] Założenie jednorodności konfiguracji odniesienia powoduje, że gęstość masy ϱ_0 jest stała.

Funkcję $E(X, t)$ nazwiemy *odkształceniem*. Jest to podstawowa wielkość występująca w opisie efektów mechanicznych dla ciał odkształcalnych[6].

Obok odkształcenia, jako wielkości kinematycznej, *naprężenie* T reprezentuje wielkość dynamiczną i jest drugą podstawową zmienną w teoriach mechanicznych kontinuum odkształcalnego.

Jeśli siły masowe $b(X, t)$ są dane, to parę $(E(X, t), T(X, t))$ dla $(X, t) \in \mathscr{B} \times [0, L)$ nazwiemy procesem dynamicznym dla ciała $\mathscr{B}$ w ruchu χ, jeśli prawo zachowania masy

$$\frac{\varrho_0}{\varrho(X, t)} = F(X, t) \quad \text{lub} \quad \varrho(X, t) = \varrho_0[E(X, t)+1]^{-1} \tag{2.4}$$

i prawo ruchu

$$\frac{\partial}{\partial X} T(X, t)+\varrho_0 b(X, t) = \varrho_0 \dot{v}(X, t) \tag{2.5}$$

dla każdego $(X, t) \in \mathscr{B} \times [0, L)$ są spełnione.

Należy zwrócić uwagę, że lokalna postać prawa ruchu (2.5) jest konsekwencją całkowego prawa bilansu pędu. Prawo to żąda, by dla każdych dwóch cząstek $X_1, X_2 \in \mathscr{B}$ i każdej chwili czasu $t \in [0, L)$ zachodziła równość[7]

$$\frac{d}{dt} \int_{X_1}^{X_2} \varrho_0 v(X, t) dX = \int_{X_1}^{X_2} \varrho_0 b(X, t) dX + T(X_2, t) - T(X_1, t). \tag{2.6}$$

2.2. Fala przyspieszenia. Możemy teraz wprowadzić pojęcie fali przyspieszenia.

Definicja 1. Powiemy, że w procesie dynamicznym $[E(X, t), T(X, t)]$, dla ciała $\mathscr{B}$ występuje *fala przyspieszenia*, jeśli istnieje ciągle różniczkowalna funkcja czasu $Y: [0, L) \to \mathscr{B}$ z nigdzie nie znikającą pochodną, taka że ruch χ (albo równoważnie—przemieszczenie u) jest dwukrotnie ciągle różniczkowalnym polem z wyjątkiem krzywej Σ określonej równaniem $X = Y(t)$, na której drugie pochodne χ i u posiadają nieciągłość skokową. Oznacza to, że wszystkie trzy drugie pochodne funkcji χ są ciągłe po obu stronach krzywej Σ i posiadają obustronne granice dla każdego (X, t) dążącego do $[Y(t), t]$. Granice te nie muszą być jednak równe, przy czym sama funkcja i jej pierwsze pochodne są ciągłe.

Jeśli $G(X, t)$ oznacza którąkolwiek drugą pochodną funkcji χ, to dla każdego $[Y(t), t]$ granice

$$\lim_{X \to Y(t)^-} G(X, t) = G\big(Y(t)^-, t\big) \equiv G^-(t), \quad \lim_{X \to Y(t)^+} G(X, t) = G\big(Y(t)^+, t\big) \equiv G^+(t) \tag{2.7}$$

istnieją, zaś ich różnica

$$G^-(t) - G^+(t) \equiv [\![G]\!](t) \tag{2.8}$$

nie musi znikać, tzn. $[\![G]\!] \neq 0$. Pochodną funkcji $Y(t)$

$$\frac{d}{dt} Y(t) = U(t) \tag{2.9}$$

---

[6] W pracy nie wprowadzamy żadnych ograniczeń odnośnie małości E.

[7] Z postaci równań (2.5) i (2.6) widać, że naprężenie T w niniejszej teorii odgrywa tę samą rolę, jak pierwszy tensor Pioli-Kirchhoffa w teorii trójwymiarowej.

nazywamy *prędkością wewnętrzną fali*; U mierzy prędkość rozprzestrzeniania się fali względem materiału, tj. w konfiguracji odniesienia $\varkappa$.

Dla dalszych rozważań potrzebny jest jeszcze jeden związek. Niech $f(X, t)$ będzie ciągłą i ciągle różniczkowalną funkcją swych zmiennych wszędzie z wyjątkiem Σ, gdzie może doznawać skoku. Wtedy $[\![f]\!]$ jest funkcją tylko czasu t. Różniczkując ją względem t, pamiętając o (2.9) otrzymamy[8] tzw. *kinematyczny warunek zgodności* [7, 11, 41]

$$\frac{d}{dt}[\![f]\!] = U\left[\!\!\left[\frac{\partial f}{\partial X}\right]\!\!\right]+[\![\dot{f}]\!]. \tag{2.10}$$

Pochodna d/dt w (2.10) mierzy szybkość zmian dowolnej wielkości zdefiniowanej na fali[9]. Przez pochodne cząstkowe $\frac{\partial}{\partial X}$ i $\frac{\partial}{\partial t}$ wyraża się następująco

$$\frac{d}{dt} = U\frac{\partial}{\partial X}+\frac{\partial}{\partial t}. \tag{2.11}$$

Zauważmy, że jeśli sama funkcja f jest ciągła, to $[\![f]\!] = 0$ i (2.10) implikuje tzw. twierdzenie Maxwella [41]

$$[\![\dot{f}]\!] = -U[\![\partial_X f]\!], \tag{2.12}$$

gdzie dla skrótu pochodną $\partial/\partial X$ będziemy oznaczać przez ∂_X. Ostatni związek jest bardzo pomocny przy wyprowadzeniu następujących związków między drugimi pochodnymi funkcji ruchu χ w przypadku istnienia fali przyspieszenia (zauważmy, że wtedy pierwsze pochodne są ciągłe)

$$[\![\dot{v}]\!] = -U[\![\dot{E}]\!] = U^2[\![\partial_X E]\!]. \tag{2.13}$$

Wielkość skoku przyspieszenia jest często nazywana [7, 11] *amplitudą* $\mathrm{a}(t)$ *fali przyspieszenia.*

Wykorzystajmy (2.10), wstawiając kolejno zamiast f przyspieszenie $\dot{v}$ i prędkość odkształcenia $\dot{E}$; wówczas amplituda fali przyspieszenia spełnia równanie różniczkowe [7, 11]

$$2\sqrt{U}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathrm{a}}{\sqrt{U}}\right) = [\![\ddot{v}]\!]-U^2[\![\partial_X\dot{E}]\!], \tag{2.14}$$

które może być zapisane w równoważnej postaci

$$2\frac{d\mathrm{a}}{dt}-\frac{\mathrm{a}}{U}\frac{dU}{dt} = [\![\ddot{v}]\!]-U^2[\![\partial_X\dot{E}]\!]. \tag{2.15}$$

Zauważmy, że równania te są czysto kinematyczne. Do ich wyprowadzenia nie wykorzystano ani równań ruchu, ani równań konstytutywnych (praw fizycznych) ośrodka.

---

[8] Pochodna d/dt nazywana jest pochodną Thomasa albo pochodną przemieszczeniową [7, 41].

[9] W wielu wypadkach ogół zjawisk zachodzących na krzywej osobliwej (nieciągłości) Σ nazywa się falą.

Spełnienie prawa Cauchy'ego w procesie dynamicznym z falą przyspieszenia jest równoważne zachowaniu związku

$$\partial_X T + \varrho_0 b = \varrho_0 \dot{v} \tag{2.16}$$

po obu stronach krzywej Σ (fali) oraz równości

$$[\![\partial_X T]\!] = \varrho_0 [\![\dot{v}]\!] \tag{2.17}$$

na fali (na krzywej Σ).

Załóżmy, że siły b występujące w (2.16) są ciągle różniczkowalne względem czasu. Różniczkując (2.16) otrzymamy odpowiednio

$$\partial_X \dot{T} + \varrho_0 \dot{b} = \varrho_0 \ddot{v} \quad \text{i} \quad [\![\partial_X \dot{T}]\!] = \varrho_0 [\![\ddot{v}]\!]. \tag{2.18}$$

Zastąpmy pochodną $\ddot{v}$ w równaniu amplitudy (2.14) pochodną mieszaną naprężenia $\partial_X \dot{T}$. Otrzymamy wtedy

$$2\sqrt{U}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathrm{a}}{U}\right) = \frac{1}{\varrho_0}[\![\partial_X \dot{T}]\!] - U^2 [\![\partial_X \dot{E}]\!]. \tag{2.19}$$

Analiza zachowania się fali przyspieszenia przeprowadzona w następnych punktach opiera się na równaniu (2.19).

W procesie dynamicznym żądamy spełnienia dwóch praw zachowania. Prawo zachowania pędu zostało już zanalizowane. Jak wygląda prawo zachowania masy w procesach z falami przyspieszenia?

Ze względu na ciągłość deformacji na krzywej Σ równanie (2.4) implikuje $[\![\varrho]\!] = 0$. Zróżniczkujmy (2.4) względem czasu

$$\frac{-\varrho_0 \dot{\varrho}}{\varrho^2} = \dot{E}.$$

Stąd na fali, po wykorzystaniu związku (2.13), otrzymamy

$$[\![\dot{\varrho}]\!] = \frac{\varrho^2}{\varrho_0 U}\,\mathrm{a}. \tag{2.20}$$

2.3. Fala uderzenia. Fala drugiego rzędu obejmuje przypadek nieciągłości przyspieszenia w procesie dynamicznym.

Istnieją problemy początkowo-brzegowe, w których nie tylko pochodne rozwiązań doznają skoku, lecz same rozwiązania są nieciągłe wzdłuż pewnych krzywych. Przypadek taki wiąże się z występowaniem i rozprzestrzenianiem się fal prędkości, fal uderzeniowych (pierwszego rzędu). Jeśli w materiale pojawi się taka fala, to nieciągłości doznaje prędkość cząstki i jej deformacja. Omówimy teraz pokrótce ten przypadek.

Definicja 2. Powiemy, że w procesie dynamicznym $(E(X, t), T(X, t))$, gdzie $(X, t) \in \in \mathscr{B} \times [0, L)$, dla ciała $\mathscr{B}$ występuje *fala uderzeniowa*, jeśli istnieje ciągle różniczkowalna funkcja czasu $Z: [0, L) \to \mathscr{B}$ z nigdzie nie znikającą pochodną, taka że ruch χ (albo równoważnie — przemieszczenie u) jest ciągle różniczkowalnym polem, z wyjątkiem krzywej Ω określonej równaniem $X = Z(t)$, na której pierwsze pochodne posiadają nieciągłość skokową.

Zazwyczaj zakładamy, w przypadku fal uderzeniowych, dwukrotnie ciągłą różniczkowalność χ poza Ω.

Zdefiniujemy prędkość (wewnętrzną) fali $V(t)$[10] uderzeniowej jako pochodną funkcji Z

(2.21) $$V(t) = \frac{d}{dt} Z(t).$$

Wtedy prędkość falowa $w(t)$, mierzona w konfiguracji aktualnej, będzie pochodną

(2.22) $$w(t) = \frac{d}{dt} \chi(Z(t), t).$$

Zastosujemy prawo różniczkowania złożonego do równania (2.22); wykorzystując (2.21), otrzymamy

(2.23) $$\frac{d}{dt} \chi(Z(t), t) = \frac{\partial}{\partial X} \chi(X,t)\bigg|_{X=Z(t)\pm} \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \chi(X, t)\bigg|_{X=Z(t)\pm},$$

stąd

(2.24) $$w = F^+V+v^+ = F^-V+v^-.$$

Ostatnia równość pozwala napisać warunek

(2.25) $$V[\![E]\!] = -[\![v]\!],$$

gdzie oczywiście z definicji skoku mamy $[\![E]\!] = [\![F]\!]$.

Relacja (2.25) jest warunkiem zgodności dla fali uderzeniowej. Może być otrzymana też w inny sposób, przez bezpośrednie wykorzystanie ogólnego kinematycznego warunku zgodności (2.10), słusznego dla każdego rodzaju fali. Jedyną zmianą, jakiej należy dokonać w (2.10), jest zastąpienie symbolu U przez V.

Korzystając dalej z (2.10) i wstawiając kolejno w miejsce f prędkość v i odkształcenie E, otrzymamy

(2.26) $$\frac{[\![d[v]]\!]}{dt} = V[\![\dot{E}]\!]+[\![\dot{v}]\!], \quad \frac{d[\![E]\!]}{dt} = V[\![\partial_X E]\!]+[\![\dot{E}]\!].$$

Nazwijmy wielkość skoku odkształcenia $[\![E]\!]$ *amplitudą fali uderzeniowej*[11]. Dla niej to związki (2.26) pozwalają wyprowadzić następujące równanie różniczkowe

(2.27) $$2V\frac{d[\![E]\!]}{dt}+[\![E]\!]\frac{dV}{dt} = V^2[\![\partial_X E]\!]-[\![\dot{v}]\!],$$

które może być zapisane w bardziej zwartej postaci

(2.28) $$2V\frac{d}{dt}(\sqrt{V}[\![E]\!]) = V^2[\![\partial_X E]\!]-[\![\dot{v}]\!].$$

Przejdźmy teraz do analizy równania ruchu (2.6). Zapiszmy je w postaci

(2.29) $$T(X_2, t)-T(X_1, t) =$$
$$= \frac{d}{dt}\left(\int_{X_1}^{Z(t)} \varrho_0 \dot{v}(X, t)dX+ \int_{Z(t)}^{X_2} \varrho_0 \dot{v}(X, t)dX\right) - \int_{X_1}^{X_2} \varrho_0 b(X, t)dX$$

[10] Jest to prędkość mierzona w konfiguracji odniesienia.

[11] Por. [7, 11].

przy założeniu, że $X_1 < Z(t) < X_2$. Dokonajmy przejścia granicznego $X_1 \to Z(t)^-$ i $X_2 \to Z(t)^+$, wykorzystując równanie na prędkość fali (2.21), ciągłość sił masowych $b(X, t)$, a także twierdzenie o wartości średniej dla całek. Otrzymamy wtedy następujące wyrażenie na skok naprężenia $[\![T]\!]$

$$[\![T]\!] = -\varrho_0 V[\![v]\!]. \tag{2.30}$$

Po wykorzystaniu (2.25) równanie na prędkość fali uderzeniowej w dowolnym ośrodku materialnym przyjmie postać

$$\varrho_0 V^2 = \frac{[\![T]\!]}{[\![E]\!]}. \tag{2.31}$$

Załóżmy, że naprężenia, podobnie jak prędkość v, są różniczkowalnymi funkcjami po obu stronach krzywej Ω. Wtedy słuszne są lokalne sformułowania prawa ruchu

$$\partial_X T + \varrho_0 b = \varrho_0 \dot{v} \tag{2.32}$$

po obu stronach fali uderzeniowej. Natomiast wzdłuż krzywej Ω zachodzi

$$[\![\partial_X T]\!] = \varrho_0 [\![\dot{v}]\!]. \tag{2.33}$$

Ostatni związek zastosowany do (2.28) daje następujący związek:

$$2\sqrt{V}\frac{d}{dt}\left(\sqrt{V}[\![E]\!]\right) = V^2[\![\partial_X E]\!] - \frac{1}{\varrho_0}[\![\partial_X T]\!]. \tag{2.34}$$

Na końcu tego punktu zatrzymajmy się na chwilę przy prawie zachowania masy (2.4). Ze względu na nieciągłość deformacji prawo to na krzywej Ω przyjmie postać

$$\left[\!\!\left[\frac{\varrho_0}{\varrho}\right]\!\!\right] = [\![E]\!].$$

Po przekształceniach stwierdzamy, że na fali uderzeniowej prawo zachowania masy ma postać

$$[\![\varrho]\!] = \frac{-\varrho^- \varrho^+}{\varrho_0}[\![E]\!]. \tag{2.35}$$

Stąd w zastosowaniach jednowymiarowej teorii do ruchów podłużnych, dla których prędkości są dodatnie, $V > 0$, przyjęło się nazywać falę uderzeniową ściskającą (sprężającą), jeśli

$$[\![E]\!] < 0, \tag{2.36}$$

oraz rozciągającą (rozprężającą), jeśli

$$[\![E]\!] > 0. \tag{2.37}$$

Po przejściu fali sprężającej gęstość masy rośnie, tzn. ϱ^- jest większe od ϱ^+, a tym samym $[\![\varrho]\!] > 0$ oraz $[\![E]\!] < 0$, natomiast po przejściu fali rozprężającej gęstość masy maleje, tzn. $\varrho^- < \varrho^+$ i $[\![\varrho]\!] < 0$ oraz $[\![E]\!] > 0$.

3. Materiał z parametrami wewnętrznymi

Celem niniejszej pracy jest analiza zachowania się fal uderzeniowych i przyspieszenia dla szerokiej klasy materiałów niesprężystych. Przez materiał niesprężysty rozumiemy ośrodek ciągły, który oprócz zachowania sprężystego wykazuje własności reologiczne, niesprężyste, takie jak: lepkość, relaksacja, możliwość podlegania odkształceniom trwałym (nieodwracalnym). Należy zaznaczyć, że ośrodek taki nie musi być koniecznie ciałem stałym.

Istnieje niewątpliwie wiele matematycznych modeli materiałów niesprężystych. Jeden z nich zasługuje na szczególną uwagę, a to dzięki swej jednoczesnej uniwersalności i prostocie. Mamy tu na myśli model z parametrami wewnętrznymi (z wewnętrznymi zmiennymi stanu).

Wymieńmy pokrótce podstawowe zalety tego modelu:

— łatwe przejście do modelu sprężystego czy hipersprężystego,

— możliwość opisu materiałów lepkosprężystych [3, 42],

— równoważność, przy pewnych założeniach, z modelem materiału prostego z pamięcią [24, 27, 42],

— możliwość opisu materiałów sprężysto-lepkoplastycznych [33, 39, 43],

— równoważność, przy pewnych założeniach, z modelem prędkościowym [34],

— możliwość opisu cieczy z reakcjami chemicznymi lub gazów z wibracyjną relaksacją [2, 4–6, 8–10].

Ogólny materiał z parametrami wewnętrznymi jest ponadto dogodnym — co jest niebagatelne dla niniejszych rozważań — modelem do analizy zjawisk falowych. Należy zaznaczyć, że równania rządzące problemem początkowo-brzegowym dla tego modelu tworzą układ quasi-liniowy hiperboliczny pierwszego rzędu względem niewiadomych: prędkości ruchu cząstki, deformacji i wektora parametrów wewnętrznych (w przypadku ciała stałego).

Model z parametrami wewnętrznymi otrzymuje się przez wzbogacenie opisu modelu sprężystego o dodatkowe zmienne stanu, tzw. parametry wewnętrzne (lub wewnętrzne zmienne stanu), dla których postuluje się pewne równania kinetyczne. Te dodatkowe równania są najczęściej zwyczajnymi — przy ustalonej cząstce ciała — równaniami różniczkowymi pierwszego rzędu. Noszą one nazwę równań ewolucji.

Potrzebę wprowadzenia parametrów wewnętrznych tłumaczy się koniecznością opisu dodatkowych, poza sprężystymi, własności ośrodka. Często mówi się w takich wypadkach o wzbogaceniu informacji o ośrodku materialnym zawartej w jego stanie odkształcenia przez podanie sposobu (drogi), w jaki ośrodek doszedł do tego stanu. Jest to tzw. metoda przygotowania [21, 33, 34, 38]. Trzeba od razu zaznaczyć, że są różne realizacje metody przygotowania.

Użycie w opisie reakcji materiału pełnej przeszłej historii deformacji prowadzi do modelu materiału z pamięcią. Użycie chwilowych prędkości deformacji jako dodatkowej informacji umożliwia opis klasy materiałów lepkosprężystych (np. model Maxwella) z tak zwaną lepkością dyskretną. Ten ostatni przypadek jest modelem różniczkowym.

Bardziej wyszukana zależność reakcji materiału od niepełnej historii deformacji (tj. historii z pewnego skończonego przedziału czasowego) występuje w modelu prędkościowym. Nie ma w nim skończonych związków konstytutywnych między bodźcami a reakcją. Zamiast nich postuluje się równanie różniczkowe na prędkość naprężenia, w którym prawa strona zawiera deformację i jej prędkość[12].

Przejdźmy teraz do modelu nas interesującego.

Równanie konstytutywne materiału z parametrami wewnętrznymi ma ogólną postać

$$T(X, t) = \mathcal{T}\big(E(X, t), \alpha(X, t)\big). \tag{3.1}$$

Układ parametrów wewnętrznych potrzebnych do opisu niesprężystego zachowania się materiału reprezentuje wektor α. Tak jak powiedzieliśmy, zmianą parametrów α w procesie rządzi równanie różniczkowe

$$\dot{\alpha}(X, t) = \mathbf{A}\big(E(X, t), \alpha(X, t)\big) \tag{3.2}$$

z wartością początkową $\alpha(X, 0) = \alpha_0(X)$.

Wymiar przestrzeni wartości parametrów (ogólnie będzie to pewna przestrzeń liniowa $\mathcal{V}^n$) zależy od konkretnej interpretacji geometrycznej poszczególnych składowych wektora α.

W przypadku opisu modelu lepkosprężystego parametry α będą miały za zadanie opisać zjawisko tarcia wewnętrznego w materiale. Odpowiednia teoria fizyczna tego zjawiska daje rozstrzygnięcie nie tylko kwestii wielkości liczby n, lecz także postaci funkcji $\mathbf{A}$ (por. np. [31]).

W tym miejscu należy zrobić uwagę natury ogólnej: nie ma i nie może być żadnej uniwersalnej postaci równania ewolucji (3.2) na parametry wewnętrzne (może tylko z wyjątkiem teorii liniowej, w której postuluje się, że związek konstytutywny (3.1) i równanie (3.2) mają być liniowe względem zmiennych E i α).

Konkretna potrzeba użycia modelu z parametrami wewnętrznymi do opisu zachowania się wybranego materiału decyduje o formie związku (3.2). Odwołanie się do fizycznej strony zagadnienia, do fizycznych mechanizmów wywołujących niesprężystą reakcję materiału, jest najczęstszą i najlepszą drogą wyprowadzenia zależności na przyrost parametrów wewnętrznych. Ta właśnie fizyczna interpretacja parametrów z jednoczesną analizą mechanizmów dysypatywnych (które z termodynamicznego punktu widzenia są odpowiedzialne za niesprężyste zachowanie się ośrodka) jest niezbędnym etapem przy budowaniu każdej fizykalnej teorii z parametrami wewnętrznymi.

Za przykład takiej fizykalnej teorii niech posłużą prace Perzyny [32 - 35, 37] o lepkoplastyczności. Przyjmowane w nich parametry wewnętrzne $\alpha = (\mathbf{P}, k, \mathbf{\Gamma}^{(i)})$ są następujące: $\mathbf{P}$ — miara deformacji nieodwracalnych, k — parametr wzmocnienia, $\mathbf{\Gamma}^{(i)}$ — układ tensorów rozkładu gęstości dyslokacji. Wyprowadzenie dla tych zmiennych wewnętrznych równań ewolucji oparto na fizycznej teorii dyslokacji, analizie mechanizmów płynięcia w materiałach plastycznych i wynikach eksperymentalnych.

Dla innych materiałów niesprężystych (reologicznych) przykłady odpowiednich teorii mogą dostarczyć pozycje [25, 26, 28, 31, 42, 43] bibliografii.

---

[12] Przykładem takiego modelu jest materiał hiposprężysty [29, 34].

4. Fale przyspieszenia

Ten rozdział poświęcamy w całości analizie fal przyspieszenia w ogólnym materiale opisywanym modelem z parametrami wewnętrznymi.

Po wyprowadzeniu równania na prędkość fali przyspieszenia przejdziemy do badania zachowania się amplitudy fali w czasie. Równanie różniczkowe (2.14) rządzi zmianą (ewolucją) amplitudy $a(t)$ wzdłuż krzywej[13] osobliwej Σ. Jest ono podstawowe przy analizie zachowania się funkcji $a(t)$. Po zastosowaniu związku konstytutywnego do wyznaczenia drugiej pochodnej naprężenia w (2.19) okaże się, że ewolucja amplitudy odbywa się zgodnie z równaniem Bernoulliego.

Analiza samego równania amplitudy, jak i jego rozwiązania, zostanie przeprowadzona w dwóch etapach. Pierwszy będzie dotyczył sformułowania warunków odnośnie lokalnego (w czasie) zachowania się rozwiązania pełnego równania amplitudy. W drugim etapie, przez przyjęcie dodatkowych założeń dotyczących obszaru przed frontem fali, ustalą się współczynniki występujące w równaniu. Umożliwi to sformułowanie ścisłych kryteriów globalnego (w czasie) zachowania się amplitudy fali.

Okaże się, że równanie amplitudy dopuszcza malenie do zera amplitudy $a(t)$ w nieskończenie długim czasie lub też jej nieograniczony wzrost w skończonym czasie i to w zależności od znaku współczynników równania oraz znaku i wielkości początkowej amplitudy $a(0)$. Taki typ zachowania jest konsekwencją nieliniowości związku konstytutywnego.

Analizę fal przyspieszenia zakończy sformułowanie kryteriów formowania się fal uderzeniowych.

4.1. Gładkość parametrów wewnętrznych. Rozpatrywany materiał ciała stałego $\mathscr{B}$ jest opisywany[14] modelem z parametrami wewnętrznymi. Zgodnie z poprzednim rozdziałem 3 jest to ośrodek ciągły charakteryzujący się związkiem konstytutywnym (3.1) i równaniem ewolucji dla parametrów wewnętrznych (3.2).

Postacie funkcji konstytutywnej $\mathscr{T}$ oraz funkcji przygotowania[15] $\mathbf{A}$ zależą ogólnie od wyboru konfiguracji odniesienia, a także — w przypadku materiału niejednorodnego — od cząstki X.

Przyjmujemy następujące założenia gładkości dla $\mathscr{T}$ i $\mathbf{A}$: funkcja konstytutywna $\mathscr{T}$ jest dwukrotnie ciągle różniczkowalna w E i α, zaś funkcja przygotowania $\mathbf{A}$ jest ciągła i różniczkowalna w E i α oraz spełnia warunek Lipschitza względem α.

Różniczkowalność funkcji $\mathscr{T}$ i $\mathbf{A}$ względem ich argumentów E i α nie pociąga za sobą ich różniczkowalności względem cząstek i czasu. Potrzebna jest jeszcze różniczkowalność odkształcenia i parametrów wewnętrznych jako funkcji dwóch zmiennych X i t.

---

[13] W teorii równań hiperbolicznych związki tego typu noszą nazwę równań transportu.

[14] Jeśli $\mathscr{B}$ będzie cieczą lub gazem, to zmienne (E, T) zostaną zastąpione objętością właściwą i ciśnieniem.

[15] Uwzględnienie w równaniu (3.2) zależności od naprężenia nie wyprowadza poza omawiany model. Wystarczy wtedy skorzystać z równania (3.1), by sprowadzić związek do postaci (3.2). Wprowadzenie natomiast do (3.2) jako dodatkowej zmiennej prędkości odkształcenia $\dot{E}$ oznaczałoby wyjście poza klasyczne sformułowanie teorii z parametrami wewnętrznymi. Większość rezultatów niniejszej pracy przestałaby być słuszna dla tak zmienionej postaci równania ewolucji.

Gładkość odkształcenia $E(X, t)$ jest ograniczona warunkami występowania fali przyspieszenia (por. definicję 1).

Odmiennie sprawa wygląda z wektorową funkcją parametrów wewnętrznych $\alpha(\cdot, \cdot)$. Skoro w procesie dynamicznym parametry wewnętrzne są określone poprzez rozwiązanie równania ewolucji (3.2), to ich ciągłość i gładkość jest ciągłością i gładkością rozwiązania.

Zauważmy, że przy ustalonej cząstce X równanie ewolucji (3.2) jest zwyczajnym równaniem różniczkowym pierwszego rzędu. Stosując znane twierdzenie z teorii takich równań oraz fakt, że w procesie dynamicznym z falą przyspieszenia odkształcenie jest ciągłą funkcją czasu (a także i cząstki), możemy sformułować następujące spostrzeżenie[16]: w procesach dynamicznych z falami przyspieszenia funkcja parametrów $\alpha(X, t)$ jest ciągle różniczkowalną funkcją X i t.

Używając oznaczeń dla skoków, wynik ten można zapisać w postaci

$$[\![\alpha]\!] = [\![\dot{\alpha}]\!] = \mathbf{0}. \tag{4.1}$$

Spostrzeżenie powyższe jest dla dyskusji fal przyspieszenia w materiale opisywanym za pomocą parametrów wewnętrznych twierdzeniem podstawowym. Rozwiązuje kwestię ewentualnego skoku pochodnej parametrów wewnętrznych i problem gładkości funkcji parametrów wewnętrznych.

4.2. Równanie amplitudy. Rozpatrzmy związek konstytutywny (3.1). Ciągłość odkształcenia i parametrów wewnętrznych w procesie dynamicznym z falą przyspieszenia wraz z ciągłością funkcji konstytutywnej implikuje[17]

$$[\![T]\!] = 0.$$

Ponadto różniczkowalność E, α i funkcji konstytutywnych daje następujący związek dla pochodnej naprężenia na fali

$$[\![\partial_X T]\!] = \partial_E \mathscr{T}(E, \alpha)[\![\partial_X E]\!] + \partial_\alpha \mathscr{T}(E, \alpha)[\![\partial_X \alpha]\!]. \tag{4.2}$$

Zastosujemy twierdzenie Maxwella (2.12) do funkcji $\alpha(X, t)$. Otrzymamy

$$[\![\dot{\alpha}]\!] = -U[\![\partial_X \alpha]\!]. \tag{4.3}$$

Na mocy (4.1) związek (4.3) dowodzi zerowania się skoku gradientu $\partial_X \alpha$, tj.

$$[\![\partial_X \alpha]\!] = \mathbf{0}; \tag{4.4}$$

co w konsekwencji upraszcza (4.2) do relacji

$$[\![\partial_X T]\!] = \partial_E \mathscr{T}(E, \alpha)[\![\partial_X E]\!]. \tag{4.5}$$

Posiadając wyrażenie na skok pochodnej naprężenia oraz równanie ruchu (2.17), jesteśmy w stanie udowodnić następujące spostrzeżenie: prędkość fali przyspieszenia w materiale z parametrami wewnętrznymi[18] dana jest zależnością

$$\varrho_0 U^2(t) = \partial_E \mathscr{T}\big(E(Y(t), t), \alpha(Y(t), t)\big). \tag{4.6}$$

Dla większości znanych modeli ośrodków ciągłych równanie na prędkość fali przyspieszenia jest takie samo (por. [7, 11, 13, 40]).

---

[16] Dla homotermicznych fal przyspieszenia ten sam rezultat otrzymano w [20].

[17] Por. punkt 2.2.

[18] Dla skrótu materiał opisywany modelem z parametrami wewnętrznymi będziemy nazywali materiałem z parametrami wewnętrznymi. Por. rozdział 3.

Jak wspomnieliśmy w rozdziale 3, równanie różniczkowe (2.14), rządzące zmianą amplitudy na czole fali, odgrywa podstawową rolę przy analizie zachowania się fali przyspieszenia. W niniejszym punkcie skorzystamy z postaci (2.19).

Drugą pochodną mieszaną naprężenia $\partial_X \dot{T}$ występującą w (2.19) wyliczamy, wykorzystując równanie konstytutywne (3.1). Ze względu na (4.1) i (4.4) na fali będziemy mieli

$$(4.7)\qquad [\![\partial_X \dot{T}]\!] = \partial_E^2 \mathscr{T}(E, \alpha)[\![\dot{E}\partial_X E]\!] + \partial_E \mathscr{T}(E, \alpha)[\![\partial_X \dot{E}]\!] + \\ + \partial_E \partial_\alpha \mathscr{T}(E, \alpha)(\partial_X \alpha [\![\dot{E}]\!] + \dot{\alpha}[\![\partial_X E]\!]) + \partial_\alpha \mathscr{T}(E, \alpha)[\![\partial_X \dot{\alpha}]\!].$$

Pochodna czasowa parametrów wewnętrznych spełnia równanie ewolucji (3.2). Jeśli tak, to druga pochodna mieszana $\partial_X \dot{\alpha}$ dana jest związkiem, poza Σ,

$$\partial_X \dot{\alpha} = \partial_E \mathrm{A}(E, \alpha)\partial_X E + \partial_\alpha \mathrm{A}(E, \alpha)\partial_X \alpha.$$

Stąd na fali mamy

$$(4.8)\qquad [\![\partial_X \alpha]\!] = \partial_E \mathrm{A}(E, \alpha)[\![\partial_X E]\!].$$

Skorzystajmy z warunków zgodności, dostaniemy wtedy

$$(4.9)\qquad [\![\partial_X \dot{T}]\!] = \partial_E^2 \mathscr{T}(E, \alpha)[\![\dot{E}\partial_X E]\!] + \partial_E \mathscr{T}(E, \alpha)[\![\partial_X \dot{E}]\!] + \\ + \frac{1}{U^2}\{\partial_E \partial_\alpha \mathscr{T}(E, \alpha)(\dot{\alpha} - U\partial_X \alpha) + \partial_\alpha \mathscr{T}(E, \alpha)\partial_E \mathrm{A}(E, \alpha)\}\,\mathrm{a}.$$

Wstawiając (4.9) do (2.19) i wykorzystując równanie na prędkość fali (4.6), dostajemy

$$(4.10)\qquad 2\sqrt{U(t)}\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathrm{a}(t)}{\sqrt{U(t)}}\right) = \frac{1}{\varrho_0}\partial_E^2 \mathscr{T}(E, \alpha)[\![\dot{E}\partial_X E]\!](t) + \\ + \frac{\mathrm{a}(t)}{\varrho_0 U^2(t)}\{\partial_E \partial_\alpha \mathscr{T}(E, \alpha)(\dot{\alpha} - U(t)\partial_X \alpha) + \partial_\alpha \mathscr{T}(E, \alpha)\partial_E \mathrm{A}(E, \alpha)\}.$$

Wystarczy teraz skorzystać z ogólnie prawdziwej równości dla skoku iloczynu funkcji f i h

$$(4.11)\qquad [\![fh]\!] = [\![f]\!][\![h]\!] + f^+[\![h]\!] + h^+[\![f]\!],$$

by posiadając równanie (4.10) stwierdzić, że amplituda $\mathrm{a}(t)$ fali spełnia równanie [14 - 16]

$$(4.12)\qquad \frac{d\mathrm{a}(t)}{dt} = -\mu(t)\mathrm{a}(t) + \beta(t)\mathrm{a}^2(t),$$

gdzie współczynniki $\mu(t)$ i $\beta(t)$ dane są zależnościami

$$(4.13)^{19)}\qquad \mu(t) = -\frac{1}{2\varrho_0 U(t)}\left\{\varrho_0 \frac{dU(t)}{dt} + \frac{1}{U(t)}\partial_E^2 \mathscr{T}(E, \alpha)\dot{E}^+ - \right. \\ - \partial_E^2 \mathscr{T}(E, \alpha)(\partial_X E)^+ + \frac{1}{U(t)}\partial_E \mathrm{A}(E, \alpha)\partial_\alpha \mathscr{T}(E, \alpha) + \\ + \frac{1}{U(t)}\partial_E \partial_\alpha \mathscr{T}(E, \alpha)(\dot{\alpha} - U(t)\partial_X \alpha),$$

$$\beta(t) = -\frac{\partial_E^2 \mathscr{T}(E, \alpha)}{2U(t)\partial_E \mathscr{T}(E, \alpha)}.$$

[19)] W pracy [14] w równaniu (3.10) na współczynnik $\mu(t)$ zamiast minusa przed pochodną $\dfrac{dU(t)}{dt}$ powinien być nawias klamrowy.

W równaniu na współczynnik $\mu(t)$ występuje pochodna prędkości dU/dt. Przez dodatkowe obliczenia może być ona wyznaczona związkiem[20]

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{2\varrho_0 U}\left(\partial_E^2\mathcal{T}(E,\alpha)\dot{E}^+ + \partial_\alpha\partial_E\mathcal{T}(E,\alpha)\dot{\alpha}\right) + \frac{1}{2\varrho_0}\left(\partial_E^2\mathcal{T}(E,\alpha)(\partial_X E)^+ + \partial_\alpha\partial_E\mathcal{T}(E,\alpha)\partial_X\alpha\right). \tag{4.14}$$

Dzięki temu możemy sformułować podstawowy rezultat tego punktu w postaci twierdzenia [14 - 16]:

Twierdzenie 1. Amplituda $\mathrm{a}(t)$ fali przyspieszenia w materiale z parametrami spełnia równanie (4.12) z $\mu(t)$ określonym przez

$$\mu(t) = -\frac{1}{2\varrho_0 U(t)}\left\{\frac{3}{2U(t)}\left(\partial_E^2\mathcal{T}(E,\alpha)\dot{E}^+ + \partial_\alpha\partial_E\mathcal{T}(E,\alpha)\dot{\alpha}\right) + \frac{1}{U(t)}\partial_\alpha\mathcal{T}(E,\alpha)\partial_E\mathrm{A}(E,\alpha) - \frac{1}{2}\left(\partial_E^2\mathcal{T}(E,\alpha)(\partial_X E)^+ + \partial_\alpha\partial_E\mathcal{T}(E,\alpha)\partial_X\alpha\right)\right. \tag{4.15}$$

i ze współczynnikiem $\beta(t)$ określonym przez (4.13). Prędkość fali $U(t)$ spełnia natomiast równania (4.6) i (4.14). Pochodne $\partial_E^2\mathcal{T}$, $\partial_\alpha\mathcal{T}$, $\partial_\alpha\partial_E\mathcal{T}$ i $\partial_E\mathrm{A}$ są wzięte w $\left(E(Y(t),t),\ \alpha(Y(t),t)\right)$, zaś $\dot{\alpha}$ i $\partial_X\alpha$ w $(Y(t),t)$.

Zauważmy, że w równaniu amplitudy (4.12) współczynnik $\mu(t)$ zależy od reologicznych własności materiału (tzn. sprężystych i niesprężystych), a także od wartości prędkości i gradientów odkształcenia oraz parametrów wewnętrznych przed falą. Natomiast współczynnik $\beta(t)$ zależy tylko od nieliniowych sprężystych własności materiału.

Jest rzeczą interesującą, że ogólne równanie amplitudy fali przyspieszenia (4.12) dla materiału z parametrami wewnętrznymi, będąc równaniem typu Bernoulliego, jest takie samo, jak dla innych znanych modeli materiałów. Równania amplitudy w materiale z zanikającą pamięcią [11] w nieliniowym i niejednorodnym materiale sprężystym [7] też są w postaci (4.12). Różnią się one między sobą wyrażeniami na współczynniki $\mu(t)$ oraz $\beta(t)$.

Nie znając konkretnej postaci związku konstytutywnego (3.1) i równania ewolucji (3.2), jesteśmy w stanie przeprowadzić analizę lokalnego i globalnego w czasie zachowania się amplitudy $\mathrm{a}(t)$ na czole fali. Analiza taka opiera się na badaniu rozwiązania równania Bernoulliego. I tak stwierdzamy, że jeśli w danej chwili czasu t albo $\beta(t) > 0$ i $\mathrm{a}(t) < \lambda(t)$, albo $\beta(t) < 0$ i $\mathrm{a}(t) > \lambda(t)$ to $\dfrac{d|\mathrm{a}(t)|}{dt} < 0$; jeśli w danej chwili czasu t albo $\beta(t) > 0$ i $\mathrm{a}(t) > \lambda(t)$ albo $\beta(t) < 0$ i $\mathrm{a}(t) < \lambda(t)$, to $\dfrac{d|\mathrm{a}(t)|}{dt} > 0$; natomiast $\mathrm{a}(t) = \lambda(t)$, wtedy i tylko wtedy, gdy $\dfrac{d\mathrm{a}(t)}{dt} = 0$, gdzie oznaczyliśmy iloraz $\dfrac{\mu(t)}{\beta(t)}$ przez $\lambda(t)$.

[20] Zauważymy, że w powyższym związku wzięcie wartości z obszaru „—" jest tak samo możliwe, ponieważ odkształcenie jest ciągłą funkcją przy przejściu przez krzywą Σ. Ogólnie prawdziwy jest bowiem związek [por. (2.12)]

$$\dot{f}^+ + U(\partial_X f)^+ = \dot{f}^- + U(\partial_X f)^- \quad \text{o ile} \quad [\![f]\!] = 0.$$

Zauważmy, że własności wyżej sformułowane są prawdziwe przy założeniu, że współczynnik $\beta(t)$ jest różny od zera dla wszystkich t. Będzie to spełnione, o ile funkcja naprężenia $\mathscr{T}$ pozostanie cały czas na fali nieliniowa względem odkształcenia. Innymi słowy, kiedy sprężyste własności materiału będą nieliniowe.

W ogólnym przypadku współczynniki równania amplitudy (4.12) są funkcjami czasu, tzn. nie są stałe. Sytuacja taka powoduje, że dyskusja zachowania się rozwiązania równania (4.12) jest bardziej złożona od dyskusji w przypadku ustalonych μ_0 i β_0. Dlatego też przeprowadzona przy ogólnych założeniach [zmiennych $\mu(t)$ i $\beta(t)$] przez BAILEYA i CHENA [1] analiza równania Bernoulliego nie będzie tutaj powtarzana.

Dla przypadku fali w materiale z parametrami wewnętrznymi zaadaptowane wyniki BAILEYA i CHENA wraz z nowymi rezultatami można znaleźć w pracy [15].

Z tego względu pełną dyskusję zachowania się rozwiązania ograniczymy do przypadku ustalonych współczynników μ_0 i β_0. Sytuacja taka występuje przy rozprzestrzenianiu się fali przyspieszenia w materiale będącym w jednorodnym stanie równowagi. Załóżmy ponadto, że fala propaguje się w kierunku wzrastających X. Wtedy prędkość fali (wewnętrzna) $U(t) = \dfrac{d}{dt} Y(t)$ będzie dodatnia[21].

Powiemy, że fala rozprzestrzenia się w jednorodnym stanie równowagi, jeśli odkształcenie i wektor parametrów wewnętrznych w obszarze przed falą (tj. w obszarze „+") mają wartość stałą, tzn.

$$
(4.16)\qquad
\begin{aligned}
&E(X,t) = E_0, \quad \boldsymbol{\alpha}(X,t) = \boldsymbol{\alpha}_0 \quad \text{dla} \quad X \geqslant Y(t),\ t \geqslant 0,\\
&\partial_X E_0 = 0, \quad \partial_X \boldsymbol{\alpha}_0 = \mathbf{0}, \quad \dot{E}_0 = 0, \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}}_0 = \mathbf{0}.
\end{aligned}
$$

Znikanie pochodnej czasowej parametrów wewnętrznych oznacza, ze względu na (3.2), zerowanie się prawej strony równania ewolucji w $(E_0, \boldsymbol{\alpha}_0)$, tzn. $\mathbf{A}(E_0, \boldsymbol{\alpha}_0) = \mathbf{0}$.

Ciągłość odkształcenia i parametrów wewnętrznych na fali pociąga dla obecnego przypadku

$$
(4.17)\qquad E(Y(t), t) = E_0, \quad \boldsymbol{\alpha}(Y(t), t) = \boldsymbol{\alpha}_0,
$$

co oznacza, że prędkość fali przyspieszenia propagującej się w jednorodnym stanie równowagi jest stała.

Związki (4.16) dla pochodnych E i $\boldsymbol{\alpha}$ dają, dzięki (4.15) i ciągłości $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ [por. (4.1) i (4.3)] na fali, następujące wyrażenie na stały w tej sytuacji współczynnik

$$
(4.18)\qquad \mu_0 = -\frac{\partial_{\alpha}\mathscr{T}(E_0, \boldsymbol{\alpha}_0)\,\partial_E \mathbf{A}(E_0, \boldsymbol{\alpha}_0)}{2\partial_E \mathscr{T}(E_0, \boldsymbol{\alpha}_0)}.
$$

Podobnie, zamiast $\beta(t)$ otrzymamy β_0 wyrażone przez

$$
(4.19)\qquad \beta_0 = -\frac{\partial_E^2 \mathscr{T}(E_0, \boldsymbol{\alpha}_0)}{2U\partial_E \mathscr{T}(E_0, \boldsymbol{\alpha}_0)},
$$

[21] Zauważmy, że wtedy obszar przed falą będzie obszarem „+", natomiast za falą będzie obszarem „−".

a to oznacza, że równanie amplitudy fali przyspieszenia propagującej się w jednorodnym stanie równowagi jest typu Bernoulliego

$$\frac{d\mathrm{a}(t)}{dt} = -\mu_0 \mathrm{a}(t) + \beta_0 \mathrm{a}^2(t) \tag{4.20}$$

o stałych współczynnikach.

Zwróćmy na chwilę uwagę na równanie na prędkość fali (4.6). Jeśli fala ma istnieć, czyli prędkość ma być rzeczywista i nie znikająca, to koniecznie musi zachodzić nierówność

$$\partial_E \mathscr{T}(E_0, \alpha_0) > 0. \tag{4.21}$$

Dodatniość pochodnej funkcji naprężenia względem odkształcenia w stanie równowagi (E_0, α_0) gwarantuje rozprzestrzenianie się fali w materiale. Jeśli zmienimy wartość przed frontem fali na (E_1, α_1), to gwarancją nie znikającej i rzeczywistej prędkości fali przyspieszenia będzie dodatniość pochodnej $\partial_E \mathscr{T}(E_1, \alpha_1)$, czyli warunkiem propagacji fali przyspieszenia w dowolnym stanie materiału (niekoniecznie równowagi) jest dodatniość pochodnej cząstkowej $\partial_E \mathscr{T}$ jako funkcji odkształcenia i wektora parametrów wewnętrznych.

4.3. Rozwiązania równania amplitudy. Dyskusję zachowania się rozwiązania równania (4.20) rozdzielimy na przypadki.

P r z y p a d e k 1. $\beta_0 = 0$. Sytuacja taka może wystąpić tylko wtedy, gdy druga pochodna funkcji naprężenia względem odkształcenia znika w stanie równowagi (E_0, α_0), bądź materiał jest liniowy względem odkształcenia. Amplituda fali, spełniając równanie

$$\frac{d\mathrm{a}}{dt} = -\mu_0 \mathrm{a} \tag{4.22}$$

dana jest w takim przypadku następującą zależnością od czasu

$$\mathrm{a}(t) = \mathrm{a}(0)\exp - \mu_0 t \quad \text{lub} \quad \mathrm{a}(t) = \mathrm{a}(0)\exp\left\{\frac{\partial_\alpha \mathscr{T}(E_0, \alpha_0)\partial_E \mathbf{A}(E_0, \alpha_0)}{2\partial_E \mathscr{T}(E_0, \alpha_0)}\right\}, \tag{4.23}$$

gdzie $\mathrm{a}(0)$ jest początkową wartością a. Ze względu na różny znak μ_0 może być

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{a}(t) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } \partial_\alpha \mathscr{T}(E_0, \alpha_0)\partial_E \mathbf{A}(E_0, \alpha_0) < 0, \\ \operatorname{sgn} \mathrm{a}(0)\, \infty & \text{jeśli } \partial_\alpha \mathscr{T}(E_0, \alpha_0)\partial_E \mathbf{A}(E_0, \alpha_0) > 0. \end{cases}$$

Do powyższego przypadku należy dołączyć znikające μ_0, tj. $\partial_\alpha \mathscr{T}(E_0, \alpha_0)\, \partial_E \mathbf{A}(E_0, \alpha_0) = 0$. Wtedy amplituda fali jest stała w czasie

$$\frac{d\mathrm{a}}{dt} = 0, \quad \text{tzn.} \quad \mathrm{a}(t) = \mathrm{a}(0). \tag{4.24}$$

P r z y p a d e k 2. $\mu_0 = 0$. Znikanie współczynnika μ_0 może mieć miejsce wtedy, gdy którakolwiek z pochodnych $\partial_\alpha \mathscr{T}$ albo $\partial_E \mathbf{A}$ znika lub gdy materiał jest czysto sprężysty (nieliniowo, tzn. $\partial_E^2 \mathscr{T} \neq 0$ i $\mathbf{A} \equiv 0$), bądź materiał jest sprężysty (nieliniowo) starzejący się[22], tzn. $\partial_E^2 \mathcal{T} \neq 0$, $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ i $\partial_E \mathbf{A} \equiv \mathbf{0}$. Amplituda fali przyspieszenia spełnia wtedy równanie

$$\frac{d\mathrm{a}}{dt} = \beta_0 \mathrm{a}^2, \tag{4.25}$$

którego rozwiązanie dane jest przez

$$\mathrm{a}(t) = \frac{\mathrm{a}(0)}{1-\beta_0 \mathrm{a}(0)t} \quad \text{lub} \quad \mathrm{a}(t) = \frac{\mathrm{a}(0)}{1+\dfrac{\partial_E^2 \mathcal{T}(E_0, \alpha_0)}{2U\partial_E \mathcal{T}(E_0, \alpha_0)}\mathrm{a}(0)t} \tag{4.26}$$

z $\mathrm{a}(0)$ jako wartością początkową.

Zauważmy, że w wyrażeniu stojącym po prawej stronie (4.26) może wystąpić osobliwość w postaci znikania mianownika. Ze względu na kryterium propagacji (4.21) może mieć to miejsce wtedy, gdy

$$\operatorname{sgn} \mathrm{a}(0) = -\operatorname{sgn} \partial_E^2 \mathcal{T}(E_0, \alpha_0). \tag{4.27}$$

W przeciwnym wypadku, tj. gdy $\operatorname{sgn} \mathrm{a}(0) = \operatorname{sgn} \partial_E^2 \mathcal{T}(E_0, \alpha_0)$, mianownik jest zawsze dodatni i rosnący, a zatem $\lim_{t\to\infty} \mathrm{a}(t) = 0$.

Wróćmy do sytuacji scharakteryzowanej przez (4.27). Proste obliczenia pozwalają wyznaczyć czas t_c, zwany *czasem krytycznym*, w którym mianownik w (4.26) zeruje się. Czas ten jest funkcją początkowej wartości amplitudy i współczynnika β_0

$$t_c = \frac{1}{\beta_0 \mathrm{a}(0)} \quad \text{lub} \quad t_c = -\frac{2U\partial_E \mathcal{T}(E_0, \alpha_0)}{\partial_E^2 \mathcal{T}(E_0, \alpha_0)\mathrm{a}(0)}, \tag{4.28}$$

przy czym $\lim_{t\to\infty} \mathrm{a}(t) = +\infty$, jeśli $\mathrm{a}(0) > 0$, zaś $\lim_{t\to\infty} \mathrm{a}(t) = -\infty$, gdy $\mathrm{a}(0) < 0$.

Podsumowując dyskusję powtórzmy, że wyprowadzone równanie amplitudy (4.20) opisuje, w przypadku zerowania się μ_0, propagację fali przyspieszenia w nieliniowym materiale sprężystym, w przypadku zaś znikania obu współczynników μ_0 i β_0 — falę w liniowym materiale sprężystym. Ostatnia sytuacja została opisana równaniem (4.24).

P r z y p a d e k 3. Globalna analiza pełnego równania amplitudy. Mamy teraz do czynienia z pełnym równaniem amplitudy

$$\frac{d\mathrm{a}}{dt} = -\mu_0 \mathrm{a} + \beta_0 \mathrm{a}^2. \tag{4.29}$$

Łatwo zauważyć, że jeśli początkowa amplituda $\mathrm{a}(0)$ zeruje się, to rozwiązaniem powyższego równania będzie $\mathrm{a}(t) \equiv 0$ dla wszystkich t.

Poszukajmy nietrywialnych rozwiązań. Wprowadźmy nową zmienną oraz nowy współczynnik

$$\mathrm{h}(t) \equiv \frac{1}{\mathrm{a}(t)}, \quad \lambda_0 = \frac{\mu_0}{\beta_0}. \tag{4.30}$$

[22] Ewolucję parametrów wewnętrznych w czasie bez wpływu odkształcenia i naprężenia (tzn. warunek $\partial_E A = 0$ i $A \neq 0$) należy interpretować jako efekt czasowy nie wywołany zmianą odkształcenia czy naprężenia. Może to być tłumaczone zjawiskiem starzenia się materiału.

Wtedy równanie (4.29) w nowej zmiennej przyjmie postać

$$\frac{d\mathrm{h}(t)}{dt} = \mu_0 \mathrm{h}(t) - \beta_0.$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja

$$\mathrm{h}(t) = e^{\mu_0 t}(\mathrm{h}(0) - \lambda_0) + \lambda_0,$$

gdzie h(0) jest początkową wartością h. Ze względu na podstawienie (4.30) rozwiązanie równania (4.29) może być już bezpośrednio podane następującą funkcją czasu

$$\mathrm{a}(t) = \frac{\lambda_0}{\left(\frac{\lambda_0}{\mathrm{a}(0)} - 1\right)e^{\mu_0 t} + 1} \quad \text{gdzie} \quad \lambda_0 = \frac{\mu_0}{\beta_0}; \tag{4.31}$$

przy czym należy pamiętać, że czas w tym związku jest parametrem krzywej osobliwej Σ, na której przyspieszenie doznaje skoku.

Mając ogólną postać rozwiązania równania amplitudy, możemy przejść do dyskusji jego zachowania w czasie.

Zwróćmy uwagę, że podobnie jak dla przypadku 2, prawa strona w (4.31) dopuszcza przy pewnym układzie wielkości λ_0, a(0) i czasu t zerowanie się mianownika. Pociągnie to nieskończoną wartość amplitudy a(t). Z drugiej strony, przy odpowiednim doborze a(0), a ściślej, wtedy gdy a(0) pokryje się z λ_0, mianownik dla każdego czasu t utrzyma stałą jednostkową wartość, co da w efekcie stałe rozwiązanie $\mathrm{a}(t) \equiv \lambda_0$.

Uporządkujmy te spostrzeżenia w postaci twierdzenia [16].

Twierdzenie 2. W materiale z parametrami wewnętrznymi fala przyspieszenia propagująca się w jednorodnym stanie równowagi (E_0, α_0) z dodatnią prędkością U podlega ewolucji czasowej rządzonej równaniem amplitudy (4.29). Rozwiązaniem tego równania jest funkcja a(t) dana zależnością (4.31) przy warunku $\mathrm{a}(0)\mu_0\beta_0 \neq 0$. Globalne zachowanie się w czasie amplitudy a(t) jest scharakteryzowane następująco:

1. Jeśli $\partial_\alpha \mathscr{T}(E_0, \alpha_0)\partial_E \mathbf{A}(E_0, \alpha_0) < 0$, to istnieją trzy możliwości:

a) jeśli albo $|\mathrm{a}(0)| < |\lambda_0|$, albo $\operatorname{sgn} \mathrm{a}(0) = \operatorname{sgn} \partial_E^2 \mathscr{T}(E_0, \alpha_0)$, to $\lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{a}(t) = 0$ (w sposób monotoniczny);

b) jeśli $\mathrm{a}(0) = \lambda_0$, to wtedy $\mathrm{a}(t) \equiv \mathrm{a}(0)$ dla $t > 0$, tzn. amplituda jest stała w czasie;

c) jeśli $|\mathrm{a}(0)| > |\lambda_0|$ i $\operatorname{sgn} \mathrm{a}(0) = -\operatorname{sgn} \partial_E^2 \mathscr{T}(E_0, \alpha_0)$, to istnieje skończony czas $t_k > 0$,

$$t_k = -\frac{1}{\mu_0}\ln\left(1 - \frac{\lambda_0}{\mathrm{a}(0)}\right) = \tag{4.32}$$

$$= \frac{2\partial_E \mathscr{T}(E_0, \alpha_0)}{\partial_\alpha \mathscr{T}(E_0, \alpha_0)\partial_E \mathbf{A}(E_0, \alpha_0)} \ln\left(1 - \frac{U\partial_\alpha \mathscr{T}(E_0, \alpha_0)\partial_E \mathbf{A}(E_0, \alpha_0)}{\partial_E^2 \mathscr{T}(E_0, \alpha_0)\mathrm{a}(0)}\right)$$

taki, że $\lim\limits_{t\to t_k} |\mathrm{a}(t)| = \infty$.

2. Jeśli $\partial_\alpha \mathscr{T}(E_0, \alpha_0)\partial_E \mathbf{A}(E_0, \alpha_0) > 0$, to istnieją także trzy możliwości:

a) jeśli $\mathrm{a}(0) = \lambda_0$, to $\mathrm{a}(t) \equiv \mathrm{a}(0)$, $t > 0$;

b) jeśli $\operatorname{sgn} \mathrm{a}(0) = -\operatorname{sgn} \partial_E^2 \mathscr{T}(E_0, \alpha_0)$, to istnieje czas krytyczny t_k dany związkiem (4.32), taki, że $\lim\limits_{t\to t_k} |\mathrm{a}(t)| = \infty$,

c) jeśli $\operatorname{sgn} a(0) = \operatorname{sgn} \partial_E^2 \mathcal{T}(E_0, \alpha_0)$ i $a(0) \neq \lambda_0$, to

$$\lim_{t\to\infty} a(t) = \lambda_0 \equiv \frac{U\partial_\alpha \mathcal{T}(E_0, \alpha_0)\partial_E A(E_0, \alpha_0)}{\partial_E^2 \mathcal{T}(E_0, \alpha_0)}. \tag{4.33}$$

Dowód twierdzenia jest prosty i polega na analizie rozwiązania (4.31), ponieważ jest uciążliwy więc nie będziemy go przytaczać.

Jest oczywiste, że twierdzenie 2 wymaga kilku słów komentarza.

Po pierwsze, fakty w nim zawarte (punkt 1) są podobne do wyprowadzonych przez COLEMANA i GURTINA [11, II] dla materiału prostego z zanikającą pamięcią. Bogatszą literaturę na ten temat można znaleźć w artykule CHENA [7].

W znanych materiałach opisywanych modelem z parametrami wewnętrznymi[23]) warunek punktu 1 $\partial_\alpha \mathcal{T}(E_0, \alpha_0)\partial_E A(E_0, \alpha_0) < 0$ jest spełniony. Odpowiada to w teorii COLEMANA i GURTINA [11] dodatniości początkowego nachylenia funkcji relaksacji naprężenia ($G'(0) > 0$).

Ze sformułowań punktu 1 wnioskujemy, że moduł współczynnika λ_0, tj. $|\lambda_0|$ gra rolę pewnej wielkości granicznej (krytycznej). Przy odpowiednim doborze znaków współczynników równania (4.31) i wielkości początkowej amplitudy fali w stosunku do $|\lambda_0|$ rozwiązanie równania jest ograniczone na całej półosi rzeczywistej bądź rośnie nieograniczenie w skończonym czasie. To spostrzeżenie pozwala nazwać wielkość $|\lambda_0|$ *krytyczną amplitudą początkową*[24]).

I tak punkt 1 mówi, że jeśli początkowa amplituda fali jest mniejsza w wartości bezwzględnej od amplitudy krytycznej albo jeśli początkowa amplituda ma ten sam znak, co druga pochodna funkcji naprężenia względem odkształcenia, to amplituda fali [czyli rozwiązanie równania (4.31)] stanie się dowolnie mała w odpowiednio długim czasie. Jeśli natomiast początkowa amplituda jest większa, co do wartości bezwzględnej, od amplitudy krytycznej i ma znak przeciwny do znaku drugiej pochodnej funkcji naprężenia, to fala będzie miała też nieskończoną amplitudą w skończonym czasie.

To ostatnie stwierdzenie sugeruje, że w materiale powstanie fala uderzeniowa. W związku z tym czas krytyczny t_k podany zależnością (4.32) można uważać za czas formowania się fali uderzeniowej na czole fali przyspieszenia, albo — inaczej mówiąc — za czas[25]) przejścia fali przyspieszenia w falę uderzeniową (por. [12, 18]).

Zauważmy, że podobny rezultat, o istnieniu czasu krytycznego, uzyskaliśmy dla przypadku 2, gdzie tylko współczynnik μ_0 zerował się, natomiast β_0 było różne od zera.

Współczynnik β_0 jest — w pewnym sensie — miarą nieliniowości rozpatrywanych związków konstytutywnych. Oznacza to, że warunkiem istnienia (koniecznym, a nie wystarczającym) występowania czasu krytycznego przy propagacji fali przyspieszenia w materiałach, ogólnie, dysypatywnych-niesprężystych jest nieliniowość funkcji naprężenia w odkształceniu.

4.4. Kryteria formowania się fal uderzeniowych. Przejdźmy do warunku wystarczającego dla występowania czasu krytycznego. Podpunkt 1c oprócz żądania przekroczenia amplitudy

[23]) Np. materiały lepkoplastyczne, lepkosprężyste czy asprężyste.

[24]) Por. [1, 6, 7, 10, 11, 14 - 16].

[25]) Prace [2, 6] zawierają pierwsze wyliczenia i dyskusję czasów krytycznych przy propagacji fal przyspieszenia w gazach z termodynamiczną relaksacją.

krytycznej przez amplitudę początkową wymagał, by znak początkowej amplitudy był przeciwny do znaku drugiej pochodnej funkcji naprężenia względem odkształcenia.

Załóżmy na chwilę, że $\operatorname{sgn} \partial_E^2 \mathcal{T}(E_0, \alpha_0) = +1$. Oznacza to, ze względu na nierówność $\partial_E \mathcal{T}(E_0, \alpha_0) > 0$ w kryterium propagacji (4.21), że przy ustalonym parametrze α_0, krzywa[26] $T = \mathcal{T}(E, \alpha_0)$ jest wypukłością skierowana do dołu. Aby warunek $\operatorname{sgn} \mathrm{a}(0) = \operatorname{sgn} \partial_E^2 \mathcal{T}(E_0, \alpha_0)$ był spełniony, znak początkowej amplitudy fali musi być dodatni.

Przypomnijmy w tym miejscu postać prawa zachowania masy na fali przyspieszenia. Zgodnie z równaniem (2.20) mieliśmy

$$[\![\dot{\varrho}]\!] = \frac{\varrho^2}{\varrho_0 U} \mathrm{a}.$$

Widać, że jeśli $\mathrm{a} < 0$ to i $[\![\dot{\varrho}]\!] < 0$, ze względu na dodatniość współczynników prawej strony, a że znak amplitudy fali jest stały, więc jeśli tylko $\mathrm{a}(0)$ jest mniejsze od zera, to i skok pochodnej gęstości też będzie mniejszy od zera. Ten ostatni fakt wskazuje, że fala przyspieszenia będzie rozprężająca (rozciągająca).

Na odwrót, jeśli założymy na moment, że $\operatorname{sgn} \partial_E^2 \mathcal{T}(E_0, \alpha_0) = -1$, czyli krzywa $T = \mathcal{T}(E, \alpha_0)$ jest wypukłością skierowana do dołu[27], to wtedy warunek podpunktu 1c wymaga, by $\operatorname{sgn} \mathrm{a}(0) = +1$, a w konsekwencji $[\![\dot{\varrho}]\!] > 0$. Oznacza to dla tego przypadku, że fala musi być sprężająca (ściskająca).

Powyższe spostrzeżenia można traktować jako kryterium formowania się fal uderzeniowych w materiałach z parametrami wewnętrznymi. Należy tylko podkreślić, że dodatkowo wymaga się dla tych materiałów spełnienia nierówności

$$\partial_\alpha \mathcal{T}(E_0, \alpha_0) \partial_E \mathrm{A}(E_0, \alpha_0) < 0. \tag{4.34}$$

Podobnie, choć może mniej wymagająco, wyglądają warunki formowania się fali uderzeniowej, tzn. istnienia czasów krytycznych przy propagacji fali przyspieszenia, w materiałach o przeciwnej nierówności do (4.34).

Punkt 2 twierdzenia 2 dotyczy właśnie takich materiałów. Dla nich żądamy

$$\partial_\alpha \mathcal{T}(E_0, \alpha_0) \partial_E \mathrm{A}(E_0, \alpha_0) > 0. \tag{4.35}$$

Zauważmy, że według podpunktu 2b warunkiem występowania czasu krytycznego jest tylko niezgodność znaków amplitudy i pochodnej naprężenia. Nie nakłada się żadnych ograniczeń na wielkość $\mathrm{a}(0)$ (z wyjątkiem jej nieznikania).

Zwróćmy uwagę, że w obu przypadkach, tj. dla materiałów spełniających nierówność (4.34) czy (4.35), wymagamy tylko lokalnej wypukłości lub lokalnej wklęsłości krzywej $T = \mathcal{T}(E, \alpha_0)$. Lokalność ta jest rozumiana ze względu na odkształcenie E_0.

Kończąc rozważania tego punktu chcemy zwrócić uwagę na możliwość sformułowania warunków formowania się fal uderzeniowych (tj. występowania krytycznych czasów w analizie fal przyspieszenia) dla obu przypadków nierówności (4.34), (4.35) i równości

[26] Krzywa ta jest przecięciem powierzchni $T - \mathcal{T}(E, \alpha) = 0$ płaszczyzną $\alpha = \alpha_0$.

[27] Tzn. w stanie równowagi (E_0, α_0) przed falą pochodną $\partial_E^2 \mathcal{T}(E_0, \alpha_0)$ jest ujemna.

$\partial_\alpha \mathscr{T}(E_0, \alpha_0)\partial_E \mathrm{A}(E_0, \alpha_0) = 0$. W tym celu wystarczy określić początkową[28] amplitudę krytyczną $|\lambda_0|$ jako

$$(4.36) \qquad |\lambda_0| = \frac{\mu_0}{\beta_0} \quad \text{dla} \quad \mu_0 > 0 \quad \text{i} \quad \lambda_0 = 0 \quad \text{dla} \quad \mu_0 \leqslant 0.$$

5. Fale uderzeniowe

5.1. Ciągłość parametrów wewnętrznych. Nieciągłość odkształcenia w procesie dynamicznym z falą uderzeniową (por. definicję 2) wymaga zajęcia się równaniem ewolucji dla parametrów wewnętrznych (3.2). Aby móc je zanalizować, trzeba rozszerzyć pojęcie rozwiązania do funkcji odcinkami gładkiej.

Zastąpmy równanie ewolucji (3.2) równoważnym równaniem całkowym (wektorowym)

$$(5.1) \qquad \alpha(\tau) = \alpha(0) + \int_0^\tau \mathrm{A}\big(E(s), \alpha(s)\big)ds.$$

Istnienie i jednoznaczność ciągłego rozwiązania równania (5.1) wynikają z twierdzeń teorii równań całkowych. Rozwiązanie $\alpha(\tau)$, jako całka, jest bezwzględnie ciągłe na $[0, L)$. Jego pochodna istnieje prawie wszędzie i ma jednostronne granice w każdej chwili $\tau \in [0, L)$, ponieważ posiada je funkcja $\mathrm{A}\big(E(s), \alpha(s)\big)$. Punkty nieciągłości funkcji $\dot{\alpha}$ są takie same jak odkształcenia E.

Jeśli $E(\tau)$ ma nieciągłość skokową w $\tau = t$, tzn. $E^-(t) \neq E^+(t)$, wtedy skok w pochodnej $\dot{\alpha}$ jest dany przez

$$(5.2) \qquad \dot{\alpha}^-(t) - \dot{\alpha}^+(t) = \mathrm{A}\big(E^-(t), \alpha(t)\big) - \mathrm{A}\big(E^+(t), \alpha(t)\big).$$

Powyższe rozumowanie pozwala stwierdzić, że w procesach dynamicznych z falami uderzeniowymi wektor parametrów wewnętrznych jest ciągłą funkcją, natomiast jego pochodna czasowa istnieje i jest ciągła wszędzie z wyjątkiem krzywej Ω (tj. fali), na której posiada nieciągłość skokową.

W pracy [18] podano dowód tego faktu opierając się na analizie ogólnego problemu początkowego materiału z parametrami wewnętrznymi. Jest to problem dla układu równań hiperbolicznych[29] quasi-liniowych. Układ ten można sprowadzić do postaci uogólnionego prawa zachowania. Dla takich to praw sformułowano teorię słabych rozwiązań. Teoria ta ma szczególne zastosowanie w przypadku występowania fal uderzeniowych. Warunki jakie słabe rozwiązania muszą spełniać na falach uderzeniowych, zwane *uogólnionymi związkami* Rankine–Hugoniota [12], są niczym innym, jak warunkami na nieciągłości skokowe funkcji występujących w układzie równań.

---

[28] Ten fakt jest oczywisty z punktu widzenia analizy ogólnego równania amplitudy (4.12) ze zmiennymi w czasie współczynnikami $\mu(t)$ i $\beta(t)$. Zależność (4.36) będzie odpowiadała związkowi (3.13) w [15]. Por. też [1].

[29] Hiperboliczność problemu początkowego dla materiału z parametrami wewnętrznymi zapewnia warunek propagacji fal przyspieszenia (por. punkt 4.2 i [18]).

Związki Rankine-Hugoniota dla problemu początkowego w materiale z parametrami wewnętrznymi przyjmują postać [18]:

$$\begin{aligned}\varrho_0 V[\![v]\!] &= -[\![T]\!],\\ V[\![E]\!] &= -[\![v]\!],\\ [\![\alpha]\!] &= \mathbf{0}.\end{aligned}\tag{5.3}$$

Równania $(5.3)_3$ są identyczne z wcześniej wyprowadzanymi warunkami (2.25) i (2.30).

Ze względu na (5.3) warunek zgodności kinematycznej (2.14) pozwala napisać

$$V[\![\partial_X \alpha]\!] = -[\![\dot{\alpha}]\!].\tag{5.4}$$

5.2. Równanie amplitudy. W tym punkcie wyprowadzimy ogólne i jawne wyrażenie na zmianę w czasie amplitudy fali uderzeniowej, rozprzestrzeniającej się w ogólnym, jednorodnym materiale z parametrami wewnętrznymi. Wyprowadzenie to przeprowadzimy przy pewnych założeniach poczynionych o obszarze przed frontem fali.

Przy analizie fali przyspieszenia wprowadziliśmy już pojęcie jednorodnego stanu równowagi [por. (4.16)].

Powiemy, że para funkcji $(E(X,t), \alpha(X,t))$, $(X,t) \in \mathscr{B} \times [0, L)$ formuje jednorodny stan nierównowagi [25], jeśli istnieją takie stałe $E_0 \in (-1, \infty)$, $v_0 \geqslant 0$, $\alpha_0 \in \mathscr{V}^n$, że

$$\begin{aligned}&E(X,t) = E_0 + v_0 t, \quad \dot{E}(X,t) = v_0, \quad \partial_X E(X,t) = 0, \quad \partial_X \alpha(X,t) = \mathbf{0},\\ &\dot{\alpha}(X,t) = \mathbf{A}(E_0 + v_0 t, \alpha(X,t)), \quad \alpha(X,0) = \alpha_0.\end{aligned}\tag{5.5}$$

W pracy [15] wykazano, że (5.5) jest jednoznacznym rozwiązaniem problemu początkowego dla naszego materiału przy warunkach początkowych[30)]

$$E(X,0) = E_0, \quad v(X,t) = v_0 X, \quad \alpha(X,0) = \alpha_0,$$

Spróbujmy teraz, wykorzystując równanie (2.34), wyprowadzić wyrażenie na zmianę amplitudy.

Jesteśmy w stanie policzyć pochodną $\partial_X T$ i wyrazić jej skok na Ω. Wstawiając ją do (2.34) otrzymamy

$$2\sqrt{V}\frac{d}{dt}(\sqrt{V}[\![E]\!]) = V^2[\![\partial_X E]\!] - \frac{1}{\varrho_0}\{[\![\partial_E \mathscr{T}(E,\alpha)\partial_X E]\!] + [\![\partial_\alpha \mathscr{T}(E,\alpha)\partial_X \alpha]\!]\}.\tag{5.6}$$

Widzimy, że po lewej stronie występuje pochodna przemieszczeniowa prędkości fali, tj. dV/dt. Pewne dodatkowe obliczenia prowadzą do stwierdzenia, że prędkość fali uderzeniowej rozprzestrzeniającej się w jednorodnym stanie nierównowagi spełnia równanie [18]

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2\varrho_0 V[\![E]\!]}\left\{(\partial_E \mathscr{T}(E^-, \alpha) - \varrho_0 V^2)\frac{d[\![E]\!]}{dt} + [\![\partial_E \mathscr{T}(E,\alpha)]\!]\dot{E}^+ + [\![\partial_\alpha \mathscr{T}(E,\alpha)]\!]\dot{\alpha}^+\right\}.\tag{5.7}$$

Natomiast jeśli obszar przed falą jest w jednorodnym stanie równowagi (E_0, α_0), to

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial_E \mathscr{T}(E^-, \alpha_0) - \varrho_0 V^2}{2\varrho_0 V[\![E]\!]}\frac{d[\![E]\!]}{dt}.\tag{5.8}$$

[30)] Zauważmy, że jeśli w (5.5) założymy, że $v_0 = 0$, to otrzymamy jednorodny stan równowagi, o ile $\mathbf{A}(E_0\, \alpha_0) = \mathbf{0}$.

Zauważmy, że prędkość fali uderzeniowej propagującej się nawet w jednorodnym stanie równowagi nie jest ogólnie stała, jak to miało miejsce dla fali przyspieszenia. Jedynie tylko przy znikaniu prawej strony (5.8), tzn., gdy

$$\varrho_0 V^2 = \partial_E \mathcal{T}(E^-, \alpha_0) \quad \text{lub} \quad \frac{[\![dE]\!]}{dt} = 0 \tag{5.9}$$

mamy $dV/dt = 0$ i stąd $V = \text{const}$. Ze związku (5.9) widać, że może to mieć miejsce tylko przy stałej wartości pochodnej $\partial_E \mathcal{T}$ w (E^-, α_0). W dalszych wyprowadzeniach zakładamy, że $\varrho_0 V^2 \neq \partial_E \mathcal{T}(E^-, \alpha_0)$.

Twierdzenie 3. Amplituda $[E]$ fali uderzeniowej propagującej się w jednorodnym stanie ogólnego materiału z parametrami wewnętrznymi spełnia równanie [16 - 18]

$$\frac{d}{dt}[\![E]\!] = \frac{2V}{4\varrho_0 V^2/\mathrm{r} - 1}\left((\partial_X E)^- - \omega\right), \tag{5.10}$$

gdzie V jest prędkością fali daną przez (2.31) i (5.7), (5.8), natomiast współczynniki r i ω są funkcjami zdefiniowanymi na Ω następująco:

$$\omega \equiv \frac{1}{\mathrm{r}}\left\{\frac{1}{2V}\left([\![\partial_E \mathcal{T}(E, \alpha)]\!]\dot{E}^+ + [\![\partial_\alpha \mathcal{T}(E, \alpha)]\!]\dot{\alpha}^+\right) + \partial_\alpha \mathcal{T}(E^-, \alpha)\,(\partial_X \alpha)^-\right\} \tag{5.11}$$

w przypadku stanu nierównowagi oraz

$$\omega \equiv -\frac{1}{\mathrm{r}V}\partial_\alpha \mathcal{T}(E^-, \alpha_0)\mathrm{A}(E^-, \alpha_0) \tag{5.12}$$

w przypadku stanu równowagi (E_0, α_0), zaś

$$\mathrm{r} \equiv \varrho_0 V^2 - \partial_E \mathcal{T}(E^-, \alpha_0) \tag{5.13}$$

dla obu przypadków.

Otrzymane równanie w porównaniu z równaniem amplitudy fali przyspieszenia (4.12) jest bardzo złożone; jego współczynniki zależą od poszukiwanej funkcji $[\![E]\!]$, a ponadto do równania wchodzi nieznana wartość gradientu odkształcenia $(\partial_X E)^-$ za czołem fali.

Najbliższe dwa punkty poświęcimy dyskusji zachowania się amplitudy na czole fali. Jako pierwszą rozpatrzymy ściskającą falę uderzeniową.

Na mocy prawa zachowania masy dla takiej fali mamy[31)]

$$[\![E]\!] < 0 \quad \text{i} \quad E^+ \leqslant 0. \tag{5.14}$$

Przyjmijmy dodatkowo, że dla każdej wartości parametru α związek $T = \mathcal{T}(E, \alpha)$ w zakresie naprężeń i odkształceń ściskających jest skierowany wypukłością do góry, tzn.

$$\partial_E^2 \mathcal{T}(E, \alpha) < 0 \quad \text{dla} \quad E \leqslant 0 \text{ i każdego } \alpha. \tag{5.15}$$

Pamiętajmy, że w dalszym ciągu obowiązuje kryterium propagacji fal przyspieszenia w tym materiale

$$\partial_E \mathcal{T}(E, \alpha) > 0 \quad \text{dla każdego} \quad (E, \alpha), \tag{5.16}$$

które zabezpiecza hiperboliczność problemu początkowego dla rozpatrywanego materiału.

[31)] Warunek $E^+ < 0$ mówi, że materiał przed frontem fali jest ściśnięty.

Zauważmy, że nierówność (5.16) jest jednocześnie warunkiem koniecznym istnienia rzeczywistej prędkości fali uderzeniowej, a to ze względu na związek

$$(5.17)^{32)} \qquad \varrho V^2 = \frac{\mathcal{T}(E^-, \alpha) - \mathcal{T}(E^+, \alpha)}{E^- - E^+},$$

w którym prawa strona musi być dodatnia.

Nierówność (5.15) ma wpływ na znak współczynnika r w równaniu (5.10), albowiem przy tych założeniach otrzymamy

$$(5.18) \qquad \mathrm{r} = \varrho_0 V^2 - \partial_E \mathcal{T}(E^-, \alpha) < 0.$$

Nierówność (5.18) oznacza, że prędkość fali uderzeniowej jest poddźwiękowa[33] względem obszaru za frontem fali.

Zauważmy, że przy propagacji ściskającej fali uderzeniowej obserwuje się następujące zachowanie amplitudy w każdej chwili czasu [5, 9, 16, 18]:

$$(5.19) \qquad \begin{aligned} (\partial_X E)^- > \omega &\Leftrightarrow \frac{d}{dt} |[\![E]\!]| > 0, \\ (\partial_X E)^- < \omega &\Leftrightarrow \frac{d}{dt} |[\![E]\!]| < 0, \\ (\partial_X E)^- = \omega &\Leftrightarrow \frac{d}{dt} |[\![E]\!]| = 0. \end{aligned}$$

Wróćmy jeszcze raz do nierówności (5.15). Wypukłość (5.15) krzywej odkształcenie–naprężenie przy ustalonym α dla fal ściskających odpowiada kryterium występowania czasów krytycznych (i nieograniczonego wzrostu amplitudy ściskającej fali przyspieszenia[34]).

Podobne spostrzeżenia można sformułować dla fali rozciągającej, dla której żądamy spełnienia warunków

$$(5.20) \qquad [\![E]\!] > 0 \quad \text{i} \quad E^+ \geqslant 0$$

oraz wypukłości od dołu (tzn. wklęsłości) krzywej $T = \mathcal{T}(E, \alpha)$, dla każdego α

$$(5.21) \qquad \partial_E^2 \mathcal{T}(E, \alpha) > 0 \quad \text{dla każdego } E \text{ i każdego } \alpha.$$

Z warunków lokalnego zachowania się amplitudy fali wnioskujemy, że dla obu typów fal wielkość ω gra rolę krytycznego gradientu odkształcenia, podobnie jak $|\lambda_0|$ w poprzedniej analizie.

Podane własności fali są prawdziwe przy założeniu, że materiał przed falą jest w jednorodnym stanie równowagi bądź nierównowagi. W przypadku równowagi podobne własności mogą być sformułowane dla prędkości fali [16].

W pracy [16] może czytelnik znaleźć analizę infinitezymalnych fal uderzeniowych.

Ponadto w [16] wykazano, że graniczna wartość krytycznego gradientu odkształcenia ω fali uderzeniowej, przy amplitudzie zmierzającej do zera, równa się podwojonej kry-

---

32) Równanie to mówi, że prędkość fali uderzeniowej jest proporcjonalna do kąta nachylenia siecznej łączącej punkty o rzędnych E^+ i E^- leżące na krzywej $T = \mathcal{T}(E, \alpha)$, przy α ustalonym.

33) Jest to znany fakt z dynamiki gazów [12].

34) Por. rozdział 4.

tycznej początkowej amplitudzie $|\lambda_0|$ fali przyspieszenia. Taką samą własność zaobserwowano dla innych typów materiałów [7, 8, 11, 40].

5.3. Fala prędkości w materiale o liniowej reakcji sprężystej. Wyprowadzając równanie amplitudy (5.10) w ogólnym materiale odrzuciliśmy przypadek zerowania się współczynnika r [por. (5.13)]. W tym punkcie rozpatrzymy ten szczególny wypadek.

Zaniedbajmy ogólny związek konstytutywny (3.1) na korzyść szczególnego, liniowego względem odkształcenia, prawa fizycznego [17, 19]

$$\mathscr{T}(E, \alpha) = \mathrm{b}(\alpha)E + \mathrm{c}(\alpha). \tag{5.22}$$

Materiał o takim prawie fizycznym charakteryzuje się liniową reakcją sprężystą. Funkcję $\mathrm{b}(\alpha)$ można traktować jako uogólniony moduł Younga, który podlega zmianie w trakcie procesów ze zmieniającymi się parametrami wewnętrznymi[35].

Wstawiając (5.22) do równania na prędkość fali uderzeniowej (5.17) otrzymamy spełnienie pierwszej równości (5.9), a tym samym zerowanie się r w (5.13).

Amplituda fali $[\![E]\!]$ uderzeniowej propagującej się w takim materiale będzie spełniać równanie [17, 19]

$$\frac{[\![dE]\!]}{dt} = -\frac{1}{2\varrho_0 V}\left\{[\![\partial_\alpha \mathscr{T}(E, \alpha)\partial_X \alpha]\!] + \frac{1}{2V}\partial_\alpha \partial_E \mathscr{T}(E^+, \alpha)\frac{d\alpha^+}{dt}[\![E]\!]\right\}, \tag{5.23}$$

które po wykorzystaniu (5.22) może być zapisane w postaci

$$\frac{[\![dE]\!]}{dt} = -\frac{1}{2\varrho_0 V}\left\{(\mathrm{b}'(\alpha)E^- + \mathrm{c}'(\alpha))[\![\partial_X \alpha]\!] + [\![E]\!]\mathrm{b}'(\alpha)\left(\frac{3}{2}(\partial_X \alpha)^+ + \frac{\dot{\alpha}^+}{2V}\right)\right\}. \tag{5.24}$$

Prędkość fali jest dźwiękowa

$$V = \sqrt{\mathrm{b}(\alpha)/\varrho_0}\,.$$

Załóżmy, że przed falą materiał znajdował się w jednorodnym stanie równowagi (E_0, α_0), wtedy mamy

$$\frac{dE^-}{dt} = \frac{1}{2\varrho_0 V^2}(\mathrm{b}'(\alpha_0)E^- + \mathrm{c}'(\alpha_0))\mathbf{A}(E^-, \alpha_0), \tag{5.25}$$

gdzie skorzystaliśmy z równości

$$[\![E]\!] = E^- - E_0, \quad \frac{dE_0}{dt} = 0.$$

Widzimy z tego nawet prostego równania, że dyskusja zachowania się amplitudy fali uderzeniowej $[\![E]\!]$ (czy E^-) jest możliwa tylko wtedy, gdy znana jest postać funkcji **A**, tzn. prawa strona równania ewolucji.

Nawet w przypadku liniowego związku konstytutywnego nie jesteśmy w stanie przewidzieć zachowania się amplitudy fali uderzeniowej. Inaczej ta sprawa wygląda w przypadku fali przyspieszenia, gdzie nawet dla ogólnie nieliniowych związków byliśmy w stanie podać postać rozwiązania równania amplitudy.

---

[35] Jeśli użyjemy (5.22) i parametrów wewnętrznych do opisu materiału lepkoplastycznego i utożsamimy jeden z nich z nieodwracalną deformacją (lepkoplastyczną), to funkcja $\mathrm{b}(\alpha)$ reprezentuje zmianę modułu Younga w wyniku nieodwracalnych deformacji ośrodka.

Kończąc ogólną teorię jednowymiarowych fal uderzeniowych chcę zwrócić uwagę czytelnikowi na fakt, że w przypadku istotnie nieliniowych związków konstytutywnych (tzn. gdy $\partial_E^2\mathcal{T}(E, \alpha) \neq 0$) jest możliwe rozprzestrzenianie się i powstawanie[36] fal uderzeniowych nawet przy dowolnie razy ciągle różniczkowalnych warunkach początkowych. Fale uderzeniowe mogą się generować w takich materiałach (nawet dysypatywnych) (por. punkt o formowaniu się fal uderzeniowych).

Inaczej sprawa wygląda dla przypadków związków liniowych (tzn. gdy $\partial_E^2\mathcal{T} \equiv 0$) postaci (5.22). Tutaj fala uderzeniowa nigdy nie powstanie w ośrodku. Musi być wywołana przez zewnętrzny impuls, przez nieciągłe warunki początkowe. Ponadto w przeciwieństwie do materiałów nieliniowych, gdzie prędkość fali uderzeniowej jest całkiem inna od prędkości fali przyspieszenia (dźwiękowej) [por. (5.18)], w materiale o liniowej reakcji sprężystej prędkości fali uderzeniowej (prędkości) i przyspieszenia pokrywają się[37].

6. Przykłady

Przedstawioną dotąd teorię jednowymiarowych fal w ośrodkach niesprężystych zilustrujemy przykładami.

6.1. Fala przyspieszenia w nieliniowym materiale lepkosprężystym. Rozpatrzmy funkcję konstytutywną $\mathcal{T}$ i funkcję przygotowania **A** [14, 15] taką, że równania konstytutywne i ewolucji będą miały postać

$$T = b_1 E + b_2\alpha + b_3 E^2 + b_0, \qquad \dot{\alpha} = c_1 E + c_2\alpha + c_0. \tag{6.1}$$

Jest to materiał lepkosprężysty, o nieliniowej reakcji sprężystej. Zauważmy, że układ (6.1) jest równoważny następującemu związkowi funkcjonalnemu dla naprężenia

$$T(t) = b_1 E(t) + b_3 E^2(t) + b_2 e^{c_2 t}\left\{\alpha(0) - \frac{c_0}{c_2}(e^{-c_2 t} - 1) + \int_0^t c_1 e^{-c_2\tau} E(\tau)d\tau\right\}. \tag{6.2}$$

Policzmy potrzebne pochodne

$$\begin{aligned} &\partial_E\mathcal{T}(E, \alpha) = b_1 + 2b_3 E, \qquad &&\partial_\alpha\mathcal{T}(E, \alpha) = b_2, \\ &\partial_E^2\mathcal{T}(E, \alpha) = 2b_3, &&\partial_E A(E, \alpha) = c_1. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Warunek propagacji wymaga, by (por. (4.21))

$$\partial_E\mathcal{T}(E, \alpha) > 0 \quad \text{tzn.} \quad b_1 + 2b_3 E > 0 \quad \text{dla każdego } E. \tag{6.4}$$

Wiemy, że odkształcenie E może przyjmować wartości z przedziału $(-1, \infty)$. Stąd, aby utrzymać nierówność (6.4) potrzeba i wystarczy, by

$$b_1 > 2b_3 \geqslant 0. \tag{6.5}$$

Interesuje nas ośrodek nieliniowy, więc nie znikające b_3: $b_3 > 0$. Stąd mamy $\partial_E^2\mathcal{T}(E, \alpha) > 0$, czyli przecięcie powierzchni $\mathcal{T}(E, \alpha) - T = 0$ płaszczyzną $\alpha = \text{const}$ przedstawia krzywą wklęsłą.

[36] Fakt znany z nieliniowych równań hiperbolicznych [12].

[37] Matematycznie oznacza to, że charakterystyki układu liniowego (które są krzywymi Σ, tzn. falami przyspieszenia) są jednocześnie krzywymi nieciągłości rozwiązania (tzn. falami prędkości Ω).

Niech (E_0, α_0) będzie jednorodnym stanem równowagi, tzn. takim, że

$$A(E_0, \alpha_0) = 0 \quad \text{czyli} \quad c_1 E_0 + c_2 \alpha_0 + c_0 = 0.$$

W tym stanie współczynniki μ_0, β_0 i λ_0 [por. (4.18), (4.19) $(4.30)_2$] przyjmują postać

$$\mu_0 = -\frac{b_2 c_1}{2(b_1+2b_3E_0)}, \quad \beta_0 = \frac{-b_3\sqrt{\varrho_0}}{(b_1+2b_3E_0)^{3/2}}, \quad \lambda_0 = \frac{b_2c_1}{2b_3}\sqrt{\frac{b_1+2b_3E_0}{\varrho_0}}, \tag{6.6}$$

gdzie prędkość fali przyspieszenia dana jest przez

$$U = \sqrt{\frac{\partial_E \mathcal{T}(E_0, \alpha_0)}{\varrho_0}} = \sqrt{\frac{b_1+2b_3E_0}{\varrho_0}}. \tag{6.7}$$

Sformułujemy warunki ewolucji amplitudy $\mathfrak{a}(t)$ fali w tym materiale. Zgodnie z ogólnym twierdzeniem 2 mamy [15]:

P r z y p a d e k 1. Niech $b_2c_1 < 0$. Wtedy $\lambda_0 < 0$ i

a) jeśli $\mathfrak{a}(0) = \lambda_0$, to $\mathfrak{a}(t) \equiv \mathfrak{a}(0)$;

b) jeśli albo $|\mathfrak{a}(0)| < |\lambda_0|$ albo $\mathfrak{a}(0) > 0$, to $\lim\limits_{t\to\infty} \mathfrak{a}(t) = 0$;

c) jeśli $|\mathfrak{a}(0)| > |\lambda_0|$ i $\mathfrak{a}(0) < 0$, to $\lim\limits_{t\to t_k} \mathfrak{a}(t) = -\infty$,

gdzie

$$t_k \equiv -\frac{1}{\mu_0}\ln\left(1-\frac{\lambda_0}{\mathfrak{a}(0)}\right) = \frac{2(b_1+2b_3E_0)}{b_2c_1}\ln\left(1-\frac{b_2c_1}{2\mathfrak{a}(0)b_3}\sqrt{\frac{b_1+2b_3E_0}{\varrho_0}}\right). \tag{6.8}$$

P r z y p a d e k 2. Niech $b_2c_1 > 0$, wtedy $\lambda_0 > 0$ i

a) jeśli $\mathfrak{a}(0) = \lambda_0$, to $\mathfrak{a}(t) \equiv \mathfrak{a}(0)$;

b) jeśli $\mathfrak{a}(0) < 0$, to $\lim\limits_{t\to t_k} \mathfrak{a}(t) = -\infty$, gdzie t_k dane jest przez (6.8);

c) jeśli $\mathfrak{a}(0) > 0$ i $\mathfrak{a}(0) \neq \lambda_0$, to

$$\lim_{t\to\infty} \mathfrak{a}(t) = \lambda_0 \equiv \frac{b_2c_1}{2b_3}\sqrt{\frac{b_1+2b_3E_0}{\varrho_0}}.$$

Widzimy wyraźnie, że ze względu na wklęsłość krzywej naprężenie-odkształcenie występowanie krytycznych czasów propagacji t_k jest możliwe tylko dla rozciągających fal przyspieszenia.

6.2. Fala naprężenia w materiale sprężysto-lepkoplastycznym[38], przy dużej prędkości odkształcenia. Rozpatrywany tutaj ośrodek niesprężysty charakteryzuje się następującym zachowaniem: jest liniowo sprężysty do pewnej wartości naprężenia k_1, powyżej której zachowuje się w sposób nieodwracalny, wykazując mocne własności lepkie. W zakresie trwałych deformacji (tzn. dla $|T| > k_1$) jego własności lepkie są tak zróżnicowane, że można wyróżnić trzy obszary zależności prędkości odkształcenia plastycznego od naprężenia[39]. Ponie-

---

[38] Fale naprężenia w takich ośrodkach rozpatrywano w [13, 30, 36, 37].

[39] Z fizykalnego punktu widzenia za istnienie różnych obszarów są odpowiedzialne różne mechanizmy płynięcia lepkoplastycznego, np. termicznie aktywowane procesy, stłumiony ruch dyslokacji na skutek lepkości fononowej czy rozpraszania fononów. Por. [22, 28, 35, 37].

waż naszym celem jest analiza fal, zainteresowanych fizyczną stroną tego zagadnienia odsyłam do prac PERZYNY [35, 37] i cytowanej tam bogatej literatury.

Zanim podamy pełny układ założeń konstytutywnych wprowadzonego materiału, przyjmijmy następujące oznaczenia:

k_1 granica plastyczności (przy prostym ścinaniu),
k_2 granica pierwszego obszaru, $k_2 > k_1$,
k_3 granica drugiego obszaru, $k_3 > k_2$,
j moduł Younga materiału,
γ_1 współczynnik lepkości dla pierwszego obszaru,
γ_2 współczynnik lepkości dla drugiego obszaru,
γ_3 sprowadzona do ruchu dyslokacji prędkość dźwięku[40].

Przyjmując jeden parametr wewnętrzny α i utożsamiając go z odkształceniem trwałym (lepkoplastycznym) postulujemy następujący związek konstytutywny i równanie ewolucji (por. [22, 23])

$$T = (E-\alpha)j, \tag{6.9}$$

$$\dot{\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{dla } |T| < k_1, \\ \gamma_1\left(\dfrac{|T|}{k_1}-1\right)^n \dfrac{T}{|T|} & \text{dla } k_1 \leqslant |T| \leqslant k_2, \\ \gamma_2\left(\dfrac{|T|}{k_2}-1\right)\dfrac{T}{|T|}+\gamma_1\left(\dfrac{k_2}{k_1}-1\right)^n \dfrac{T}{|T|} & \text{dla } k_2 < |T| \leqslant k_3, \\ \gamma_3(1-\exp)\left(-\dfrac{|T|}{B}\right)\dfrac{T}{|T|} & \text{dla } |T| > k_3, \end{cases} \tag{6.10}$$

gdzie

$$B \equiv -k_3\left\{\ln\left(1-\frac{\gamma_2}{\gamma_3}\right)\left(\frac{k_3}{k_2}-1\right)-\frac{\gamma_1}{\gamma_3}\left(\frac{k_2}{k_1}-1\right)^n\right\}^{-1}.$$

Dodajmy, że graniczna wartość k_3 odpowiada prędkości odkształcenia rzędu $10^4\ \mathrm{s}^{-1}$, natomiast γ_3 jest rzędu $10^5-10^6\ \mathrm{s}^{-1}$.

Rozpatrzmy falę (prędkości) uderzeniową propagującą się w tym ośrodku w stanie niezaburzonym (równowagi). Liniowość związku (6.9) sprawia, że należy skorzystać z równania amplitudy w postaci (5.23). Równanie na prędkość V daje

$$V = \sqrt{\frac{j}{\varrho_0}}. \tag{6.11}$$

Równanie zaś amplitudy, po wykorzystaniu (5.25), przyjmie prostą postać

$$\frac{dE^-}{dt} = -\frac{1}{2}A(E^-, \alpha_0). \tag{6.12}$$

---

[40] Zgodnie z [28] $\gamma_3 = \dfrac{\varrho_m bc}{\sqrt{3}}$, gdzie ϱ_m — gęstość ruchomych dyslokacji, b — wektor Burgersa, c — prędkość dźwięku w materiale.

Zwróćmy uwagę, że równanie ewolucji (6.10) zostało podane w postaci zależności od naprężenia. Skłania nas to do zastąpienia zmiennej poszukiwanej E^- w (6.12) naprężeniem T^-.

Dzięki (6.9), (6.10) i (6.12) mamy[41]

$$(6.13)\qquad \frac{d|T^-|}{dt} = \begin{cases} 0 & \text{dla } |T^-| < k_1, \\ \dfrac{-j\gamma_1}{2}\left(\dfrac{|T^-|}{k_1} - 1\right)^n & \text{dla } k_1 \leqslant |T^-| \leqslant k_2, \\ \dfrac{-j\gamma_2}{2}\left(\dfrac{|T^-|}{k_2} - 1\right) - \dfrac{j\gamma_1}{2}\left(\dfrac{k_2}{k_1} - 1\right)^n & \text{dla } k_2 < |T|^- \leqslant k_3, \\ \dfrac{-j\gamma_3}{2}\left(1 - \exp\left(-\dfrac{|T^-|}{B}\right)\right) & \text{dla } |T^-| > k_3. \end{cases}$$

Jasne jest, że jeśli chcemy znać wpływ wszystkich obszarów na czole fali uderzeniowej, początkowy impuls $|T^-(0)|$ musi być większy od k_3.

Rozwiązując równanie (6.13) dla obszaru trzeciego otrzymamy

$$(6.14)\qquad |T^-(t)| = -B \ln \frac{\exp\left(\dfrac{j\gamma_3}{2B}t + \overline{w}\right)}{1 + \exp\left(\dfrac{j\gamma_2}{2B}t + \overline{w}\right)}, \qquad \overline{w} = \ln \frac{\exp\left(\dfrac{-|T^-(0)|}{\mathrm{B}}\right)}{1 - \exp\left(\dfrac{-|T^-(0)|}{B}\right)}.$$

Naprężenie $|T^-(t)|$ maleje, więc istnieje skończony czas t_0 taki, że zostanie osiągnięta graniczna wartość k_3

$$|T^-(t_0)| = k_3.$$

Można ten czas wyznaczyć

$$(6.15)\qquad t_0 = \frac{2B}{j\gamma_3} \ln \frac{\exp\left(-\dfrac{k_3}{B}\right)\left[1 - \exp\left(\dfrac{-|T^-(0)|}{B}\right)\right]}{\left[1 - \exp\left(\dfrac{-k_3}{B}\right)\right]\exp\left(\dfrac{-|T^-(0)|}{B}\right)}.$$

W drugim obszarze stosujemy tę samą procedurę wyznaczając $|T^-(t)|$ oraz czas przejścia t_1 granicy obszaru k_2. W efekcie otrzymamy następujące rozwiązanie (6.13) na wartość naprężenia $|T^-|$ na czole fali:

$$(6.16)\qquad |T^-(t)| = \begin{cases} B\left[\ln(1+\exp)\left(\dfrac{j\gamma_3}{2B}t + \overline{w}\right) - \dfrac{j\gamma_3}{2B}t - w\right], & 0 \leqslant t < t_0, \\ k_3 + \left[k_3 - k_2 + \dfrac{k_2\gamma_1}{\gamma_2}\left(\dfrac{k_2}{k_1} - 1\right)^n\right]\left(\exp\dfrac{j\gamma_2}{2k_2}(t_0 - t) - 1\right), & t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \\ k_1 + k_1\left\{\left(\dfrac{k_2}{k_1} - 1\right)^{1-n} + \dfrac{j\gamma_1}{2k_1}(t - t_1)(n-1)\right\}^{\frac{1}{1-n}}, & t > t_1. \end{cases}$$

[41] Użyliśmy wartości bezwzględnej naprężenia, gdyż chcemy w ten sposób jednocześnie rozpatrzyć rozciągające i ściskające naprężenia.

Zauważmy, że $\lim_{t\to\infty} |T^-(t)| = k_1$, co oznacza, że w nieskończenie długim czasie osiągniemy statyczną granicę plastyczności k_1 na czole fali.

Interesujące jest podanie szacunkowych wartości czasów przejścia poszczególnych obszarów. W [23] podano obliczenia dla próbki aluminiowej. Przyjmując początkowy impuls o wielkości $|T^-(0)| = 19{,}62 \cdot 10^8$ dyn/cm^2 otrzymano

$$t_0 = 1{,}03 \times 10^{-7}\ \mathrm{s}, \qquad t_1 = 3{,}70 \times 10^{-7}\ \mathrm{s}.$$

Literatura cytowana w tekście

1. P. B. Bailey, P. J. Chen, *On local and global behaviour of acceleration waves*, Arch. Rat. Mech. Anal., **41** (1971), 121 - 131.
2. E. Becker, H. Schmitt, *Die Entschung von eben, zylinder und kugelsymmetrischen Verdichtungsstößen in relaxierenden Gasen*, Ing. Arch., **36** (1968), 335 - 347.
3. M. A. Biot, *Theory of stress-strain relations in anisotropic viscoelasticity and relaxation phenomena*, J. App. Phys., **25** (1954), 1385 - 1391.
4. R. M. Bowen, *Thermochemistry of reacting materials*, J. Chem. Phys., **49** (1968), 1625 - 1637, Erratum, ibid., **50** (1969), 4601.
5. R. M. Bowen, P. J. Chen, *A note on shock waves in fluids with internal state variables*, Arch. Mech., **25** (1973), 702 - 708.
6. W. Bürger, *Zur Entschung von Verdichtungsstößen in Gasen mit thermodynamischer Relaxation*, Z. Angew. Math. Mech., **46** (1966), 149 - 151, T 187 - 189.
7. P. J. Chen, *Growth and decay of waves in solids*, Handbuch der Physik, VI a/3, Springer Verlag, 1973, 303 - 402.
8. P. J. Chen, M. E. Gurtin, *Growth of one-dimensional shock waves in fluids with internal state variables*, Phys. Fluids, **14** (1971), 1091 - 1094.
9. B. D. Coleman, M. E. Gurtin, *Thermodynamisc with internal state variables*, J. Chem. Phys., **47** (1967), 597 - 613.
10. B. D. Coleman, M. E. Gurtin, *Growth and decay of discontinuities in fluids with internal state variables*, Phys. Fluids, **10** (1967), 1454 - 1458.
11. B. D. Coleman, M. E. Gurtin, I. Herrera, R. C. Truesdell, *Wave propagation in dissipative materials*, Springer Verlag, 1965.
12. A. Jeffrey, T. Taniuti, *Non-linear wave propagation*, Academic Press, 1964.
13. J. Klepaczko, *Doświadczalne badania sprężysto-plastycznych procesów falowych w metalach*, Prace IPPT, 61/1970.
14. W. Kosiński, *Acceleration waves in a material with internal variables*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn., **22** (1974), 423 [655].
15. W. Kosiński, *On the global behaviour of one-dimensional acceleration waves in a material with internal variables*, Arch. Mech., **27** (1975), 231 - 243.
16. W. Kosiński, *Behaviour of the acceleration and shock waves in materials with internal state variables*, Int. J. Non-Linear Mech., **9** (1974), 481 - 499.
17. W. Kosiński, *Shock wave propagation in materials with internal variables. I. Basic theorem and amplitude equation in a material with linear elastic response*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn., **22** (1974), 507 [839].
18. W. Kosiński, *One-dimensional shock waves in solids with internal state variables*, Arch. Mech., **27** (1975), 445 - 458.
19. W. Kosiński, *On shock wave propagation in a material with internal variables*, Proc. Vibr. Probl., **15** (1974), 206 - 215.
20. W. Kosiński, P. Perzyna, *Analysis of acceleration waves in materials with internal parameters*, Arch. Mech., **24** (1972), 629 - 643; także Prace IPPT 59/1971.

21. W. KOSIŃSKI, P. PERZYNA, *The unique material structures*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn. **21** (1973), 655 [1025].
22. W. KOSIŃSKI, K. SZMIT, *Stress wave in an elastic viscoplastic body at high strain rates*, J. Tech. Phys. (dawn. Proc. Vibr. Probl.), **16** (1975) 43 - 56.
23. W. KOSIŃSKI, K. SZMIT, *Shock wave propagation in materials with internal variables. II. Stress wave in one dimensional elastic viscoplastic body*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn., **23** (1975), 57 [111].
24. W. KOSIŃSKI, W. WOJNO, *Remarks on internal variable and history descriptions of material*, Arch. Mech., **25** (1973), 709 - 715.
25. J. KRATOCHVÍL, D. W. DILLON, *Thermodynamics of elastic-plastic material as a theory with internal state variables*, J. Appl. Phys., **40** (1969), 3207 - 3218.
26. J. KRATOCHVÍL, *Finite-strain theory of inelastic behaviour of crystalline solids, Foundations of Plasticity*, (Warsaw 1972), ed. A. SAWCZUK, Noordhoff International Publishing, Leyden 1973, 401 - 415.
27. P. MAZILU, W. KOSIŃSKI, *On materials with parametrical memory*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn. **21** (1973), 379 [561].
28. F. R. N. NABARRO, *Theory of crystal dislocations*, Oxford Univ. Press, London 1967.
29. W. NOLL, *A new mathematical theory of simple materials*, Arch. Rat. Mech. Anal., **48** (1972), 1 - 50.
30. W. K. NOWACKI, *Zagadnienia falowe w teorii plastyczności*, PWN 1974.
31. A. S. NOWICK, B. S. BERRY, *Anelastic relaxation in crystalline solids*, Academic Press, 1972.
32. P. PERZYNA, *Thermodynamics of rheological materials with internal changes*, Jour. Méc., **10** (1971), 391 - 408.
33. P. PERZYNA, *Internal variable description of plasticity, Problems of Plasticity*, (Warsaw 1972), ed. A. SAWCZUK, Noordhoff International Publishing, Leyden 1974, 145 - 170.
34. P. PERZYNA, *On material isomorphism in description of dynamic plasticity*, Arch. Mech., **27** (1975), 473 - 484.
35. P. PERZYNA, *The constitutive equations describing thermomechanical behaviour of materials at high rates of strain*, Proc. Conf. Behav. Materials at High Rates of Strain, Oxford, Institute of Physics Conf. Ser. **21**, (1974), 138 - 153.
36. P. PERZYNA, J. BEJDA, *The propagation of stress waves in a rate sensitive and work-hardening plastic medium*, Arch. Mech. Stos., **16** (1964), 1215 - 1244.
37. P. PERZYNA, J. KLEPACZKO, J. BEJDA, W. K. NOWACKI, T. WIERZBICKI, *Zastosowania lepkoplastyczności*, Ossolineum, 1971.
38. P. PERZYNA, W. KOSIŃSKI, *A mathematical theory of materials*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn., **21** (1973), 647 [1017].
39. P. PERZYNA, W. WOJNO, *Thermodynamics of rate sensitive plastic material*, Arch. Mech. Stos., **20** (1968) 499 - 511.
40. K. W. SCHULER, J. NUNZIATO, E. K. WALSH, *Recent results in non-linear viscoelastic wave propagation*, Int. J. Solids Struct., **9** (1973), 1237 - 1281.
41. C. TRUESDELL, R. A. TOUPIN, *The classical field theories*, Handbuch der Physik III/1, Springer Verlag, 1960, 226 - 793.
42. K. C. VALANIS, *Unified theory of thermomechanical behaviour of viscoelastic materials*, Symp. Mech. Behav. Mater. Dyn. Loads (1967), Springer Verlag, 1968, 343 - 364.
43. K. C. VALANIS, *A theory of viscoplasticity without a yield surface*, Arch. Mech., **23** (1971), 517 - 551.

Резюме

АНАЛИЗ ОДНОМЕРНЫХ УДАРНЫХ ВОЛН И ВОЛН УСКОРЕНИЯ В НЕУПРУГОЙ СРЕДЕ

В работе использована модель неупругой (диссипативной) среды, которая описывается через деформацию и конечное число дополнительных величин, называемых внутренними переменными состояния (или внутренними параметрами). Путем соответствующего подбора внутренних параметров можно успешно применить эту модель к описанию стареющих вязко-упругих или упруго-вязко-пластичных материалов. Под волнами в работе подразумеваются некоторые кривые в фазовом пространстве X—t, на которых имеют место разрывы величин, описывающих состояние среды (или разрывы производных этих величин). Получены дифференциальные уравнения, описывающие изменение по времени амплитуд ударных волн и волн ускорения. Обнаружено существование «критических» амплитуд. Сформулированы выводы, касающиеся локального и глобального по времени поведения амплитуд. Предлагаемый метод анализа применен к исследованию распространения волн в нелинейном вязко-упругом и упруго-вязко-пластичном материалах.

Summary

ANALYSIS OF ONE-DIMENSIONAL SHOCK AND ACCELERATION WAVES IN INELASTIC MEDIUM

The model of the inelastic (dissipative) continuous media assumed in the paper is described by the strain and by the finite set of additional variables, called the internal state variables or internal parameters. After appropriate specification of internal variables the model may be used to describtion viscoelastic, ageing or elastic-viscoplastic materials. In the paper the waves are understood as some special curves in the phase space X-t, on which the variables describing the behaviour of the medium, or their derivatives, suffer jump discontinuities. The explicit expressions for the change in the amplitudes of acceleration and shock waves are derived. These expressions established the existence of «critical» amplitudes. The propositions on the local and global (in time) behaviour of the amplitudes are formulated. The above analysis is applied to the wave propagation in non-linear viscoelastic and elastic-viscoplastic materials.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 marca 1975 r.