

STEROWANA DYSKRETYZACJA PŁYT I POWŁOK

WIESŁAW KUFEL (WARSZAWA)

Przedmiotem rozważań są płyty i powłoki poddane dyskretyzacji rozumianej jako umowne narzucanie na ich ruch więzów szczególnego typu, niezależnie od sił masowych, powierzchniowych czy od rozkładu masy [1]. Wprowadzając w zbiorze dyskretyzacji płyt i powłok relację równoważności oraz wykorzystując powstające w wyniku działania więzów siły reakcji, uzyskuje się możliwość oceny, która z przeprowadzonych dyskretyzacji jest lepsza, tj. przy której dyskretyzacji otrzymane rozwiązanie zagadnienia brzegowego jest dokładniejsze w stosunku do nieznanego rozwiązania «wzorcowego». Wybieranie lepszych z punktu widzenia tego rozwiązania dyskretyzacji ciała nazywamy *sterowaniem dyskretyzacją*.

W pracy opisuje się sposób sterowania dyskretyzacją płyt i powłok, podaje kryterium szacujące wiarygodność otrzymanego rozwiązania oraz formułuje zagadnienie sterowania optymalnego.

Wykaz oznaczeń

W pierwszej części wykazu umieszczono oznaczenia znanych pojęć matematycznych, ich objaśnienie można znaleźć np. w [7].

- ∂A brzeg zbioru A , np. $\partial \Pi$,
 $A \subset B$ A jest podzbiorem B , A jest zawarte w B ,
 $A \times B$ iloczyn kartezjański zbiorów A i B ,
 \bar{A} domknięcie zbioru A , np. \bar{B}_R ,
 $\{a\}$ zbiór jednopunktowy, np. $\{t_0\}$,
 \emptyset zbiór pusty,
 $\bigcup_{c=1}^I A_c$ suma zbiorów $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_I$, piszemy także $\bigcup_c A_c$, jeżeli wiadomo, jaki zbiór indeksów przebiega c , np. $\bigcup_c \Pi_c$.

- $A = \{y; W(y)\}$ zbiór tych y , które mają własność W , np. $\Omega_0 = \{Z; Z \in \bigcup_u L_u \cup \bigcup_i Z_i\}$
 zbiór tych punktów powierzchni środkowej, które należą do sumy linii i punktów podziału,
 h, g homeomorfizmy,

- g^{-1} homeomorfizm odwrotny do g ,
 $\Omega_1 \approx \Omega_2$ relacja równoważności,
 $||\Omega||$ klasa abstrakcji relacji równoważności,
 $||(\mathbf{r}, \mathbf{s})||$ norma w przestrzeni funkcyjnej (\mathbf{r}, \mathbf{s}) ,
 $\mathbf{f}_A = \mathbf{f}|_A$ obcięcie funkcji \mathbf{f} do zbioru A ,
 E^k przestrzeń euklidesowa k -wymiarowa.

W drugiej części znajdują się objaśnienia pojęć mechaniki ośrodków ciągłych z więzami oraz dyskretyzowanych powłok sprężystych:

- B_R obszar w przestrzeni fizycznej z układem współrzędnych (X^k) , $k = 1, 2, 3$, do którego należą punkty X — konfiguracja odniesienia powłoki — powłoka,
 Π rzut ortogonalny B_R na płaszczyznę OX^1X^2 , do którego należą punkty Z — powierzchnia środkowa powłoki B_R ,
 F przedział otwarty $(-h, h)$ w zbiorze liczb rzeczywistych, do którego należą punkty y ,
 I przedział czasu,
 $2h$ grubość powłoki w konfiguracji odniesienia,
 ∇ gradient w B_R ,
 $\overset{*}{\nabla}$ gradient w Π ,
 div dywergencja w B_R ,
 \mathbf{n} wektor zewnętrznie normalny do ∂B_R ,
 $\overset{*}{\mathbf{n}}$ wektor wewnętrznie normalny do $\partial \Pi$,
 χ funkcja deformacji,
 $\mathbf{H}, \mathbf{h}; \mathbf{H}_i, \mathbf{h}_i$ uogólnione siły wewnętrzne zależne odpowiednio od Z, t, ψ oraz t, \mathbf{q} ,
 $\mathbf{f}; \mathbf{f}_i, \mathbf{F}_i$ uogólnione siły zewnętrzne zależne odpowiednio od Z, t, ψ oraz t, \mathbf{q} ,
 \mathbf{b}_R siła masowa zależna od X, t ,
 \mathbf{p}_R obciążenia powierzchniowe zależne od $X \in \partial B_R, t$,
 k energia kinetyczna,
 σ energia sprężysta,
 ε uogólniona energia sprężysta,
 ρ_R gęstość masy odniesienia do konfiguracji początkowej,
 λ mnożniki Lagrange'a określone w zbiorze $\Pi \times I$,
 μ mnożniki Lagrange'a określone w zbiorze $\partial \Pi \times I$,
 ψ współrzędne uogólnione zależne od Z, t ,
 \mathbf{q} współrzędne uogólnione zależne od t ,
 Φ więzy nałożone na deformację — znana funkcja argumentów Z, t, Ψ ,
 Ξ więzy wtórne — znana funkcja t, \mathbf{q} ,
 \mathbf{r}, \mathbf{r}_0 masowe siły reakcji zależne odpowiednio od X, t i Z, t ,
 $\mathbf{s}_R, \mathbf{s}_R$ powierzchniowe siły reakcji zależne odpowiednio od X, t oraz Z, t ,
 \mathbf{u}_R siły reakcji podpór,
 \mathbf{s}_{cd} kontaktowe siły reakcji zależne od Z, t ,
 Π_c płaskie elementy skończone powłoki B_R ,
 B_c elementy skończone,
 L_a linie podziału powierzchni środkowej na płaskie elementy skończone Π_c ,
 $\{Z_i\}$ punkty podziału powierzchni środkowej,
 D podzbiór Ω_0 punktów łączących elementy skończone — zbiór punktów węzłowych,
 Ω_0, Ω siatki podziału powierzchni środkowej,
 Θ dziedzina sterowania — zbiór siatek podziału Ω ,
 $\tilde{\Theta}$ dopuszczalny zbiór sterowań,
 V funkcjonal celu zależny od wektora współrzędnych \mathbf{q} oraz siatek Ω .

1. Wstęp

Teorią płyt i powłok nazywamy zwykle mechanikę cienkiej płytowej lub powłokowej formy konstrukcyjnej, wyrażoną w kategoriach odniesionych do pewnej powierzchni, tzw. powierzchni środkowej. Powierzchniowe teorie płyt i powłok mają długą historię; w literaturze przedmiotu znaleźć można wiele ich sformułowań [2].

Przedmiotem rozważań w tej pracy będzie płyta lub powłoka traktowana jako trójwymiarowe ciało z wewnętrznymi więzami. Przedstawimy pokrótce podstawowe założenia i równania takiej teorii.

Niech będzie dana forma powłokowa, która da się w dany sposób odwzorować w obszar przestrzeni fizycznej zawarty pomiędzy płaszczyznami $X^3 = \pm h$ oraz ograniczony powierzchnią walcową normalną do płaszczyzny OX^1X^2 . Obszar ten oznaczymy przez B_R , jego rzut ortogonalny na płaszczyznę OX^1X^2 oznaczymy przez Π , a dowolny punkt na Π oznaczymy przez $Z = (X^1, X^2)$. Oznaczenia stosowane w pracy wzorowane są na monografii [8]. W dalszym ciągu używać będziemy wyłącznie określenia «powłoka», traktując płytę jako szczególny przypadek powłoki.

Niech dalej ruch powłoki $\chi(\mathbf{X}, t)$, $\mathbf{X} = (Z, X^3)$, $Z \in \Pi$, $X^3 \in (-h, h)$, $t \in I$ będzie ograniczony w dany z góry sposób. Ograniczenia te nazwiemy więzami. Rozpatrywać będziemy tylko więzy narzucone na ruch ciała (na jego funkcję deformacji). Zgodnie z [3] rozważać będziemy dwa rodzaje więzów:

1. Więzy graniczne (brzegowe) sprowadzające się zwykle do dobrze znanych w teorii sprężystości warunków początkowych oraz do tzw. przemieszczeniowych warunków brzegowych w postaci:

$$(1.1) \quad \alpha_\varrho[Z, t, \psi(Z, t)] = 0, \quad Z \in \partial\Pi, \quad t \in I, \\ \varrho = 1, 2, \dots, s.$$

2. Więzy wewnętrzne, wyrażające pewne przyjęte *a priori* hipotezy kinematyczne, których celem jest uproszczenie kinematyki, a w konsekwencji i całej dynamiki rozważanej powłoki

$$(1.2) \quad \chi(\mathbf{X}, t) = \Phi[Z, X^3, t, \psi(Z, t)], \\ \beta_\nu(Z, t, \psi(Z, t), \dot{\psi}(Z, t)) = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, r, \quad Z \in \Pi.$$

Wektor ψ jest wektorem współrzędnych uogólnionych. Funkcje α_ϱ , Φ i β_ν są funkcjami znanymi. Więzy (1.2)₁ sprowadzają kinematykę całej powłoki, jako przestrzennej formy konstrukcyjnej, do pewnego dwuwymiarowego kontinuum punktów $Z \in \Pi$. Warunki (1.2)₂ stanowią dodatkowe ograniczenia dla funkcji wektorowej ψ . W szczególności, gdy współrzędne uogólnione są niezależne, związki te nie wystąpią.

Podstawowy układ równań dla wektora współrzędnych uogólnionych otrzymuje się z zasady prac wirtualnych, którą zapisać można w postaci

$$\int_{B_R} [\varrho_R(\ddot{\chi} - \mathbf{b}_R) - \text{div} \mathbf{T}_R] \delta \chi \, dv_R + \int_{\partial B_R} (\mathbf{p}_R - \mathbf{T}_R \mathbf{n}_R) \delta \chi \, d\sigma_R = 0.$$

Podstawiając (1.1)₁ do ostatniej równości oraz stosując twierdzenie o mnożnikach Lagrange'a otrzymujemy następujące równania ruchu i równania konstytucyjne, które powinny być spełnione dla każdego $(Z, t) \in \Pi \times I$, [3]:

$$\text{Div}^* \mathbf{H} + \mathbf{h} + \mathbf{f} = \frac{d}{dt} \frac{\partial k}{\partial \dot{\Psi}} - \frac{\partial k}{\partial \Psi},$$

$$(1.3) \quad \mathbf{H} = \frac{\partial(\varepsilon - \lambda^v \beta_v)}{\partial \nabla^* \Psi}, \quad \mathbf{h} = - \frac{\partial(\varepsilon - \lambda^v \beta_v)}{\partial \Psi},$$

gdzie

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(Z, t, \Psi) = \int_{-h}^h \varrho_R \mathbf{b}_R \frac{\partial \Phi}{\partial \Psi} dX^3 + \left[\mathbf{p}_R \frac{\partial \Phi}{\partial \Psi} \right]_{X^3 = \pm h},$$

$$(1.4) \quad k = k(Z, t, \Psi, \dot{\Psi}) = \frac{1}{2} \int_{-h}^h \varrho_R |\dot{\Phi}|^2 dX^3,$$

$$\varepsilon = \varepsilon(Z, t, \Psi, \nabla^* \Psi) = \int_{-h}^h \varrho_R \sigma(\nabla \Phi) dX^3.$$

Równania (1.3)₁ nazwiemy równaniami ruchu, a równania (1.3)₂ równaniami konstytutywnymi dla wektora współrzędnych Ψ .

Na $\partial \Pi \times I$ powinny być ponadto spełnione geometryczne warunki brzegowe, które zapiszemy

$$(1.5) \quad \mathbf{H} \mathbf{n}_R^* = \mathbf{t}_R + \mathbf{u}_R,$$

gdzie

$$(1.6) \quad \mathbf{t}_R = \int_{-h}^h \mathbf{p}_R \frac{\partial \Phi}{\partial \Psi} dX^3, \quad \mathbf{u}_R = \mu^e \frac{\partial \alpha_e}{\partial \Psi}.$$

Wielkości μ^e są «brzegowymi» mnożnikami Lagrange'a, tj. określonymi na zbiorze $\partial \Pi \times I$. Występująca w (1.6) funkcja \mathbf{t}_R jest znana, bowiem może być obliczona przez całkowanie funkcji $\mathbf{p}_R \frac{\partial \Phi}{\partial \Psi}$.

Z kolei na $\Pi \times \{t_0\}$ powinny być spełnione warunki początkowe

$$(1.7) \quad \Psi = \dot{\Psi}(Z), \quad \dot{\Psi} = \Psi^{(c)}(Z).$$

Równania (1.2)₂, (1.3), (1.5), (1.7) opisują każdą dwuwymiarową teorię powłok jako teorię ciała z wewnętrznymi więzami.

2. Powłoki dyskretyzowane

Rozpatrzmy pewien dany rozkład powierzchni środkowej Π na rozłączne obszary Π_c , $c = 1, 2, \dots, l$ takie, by $\bar{\Pi} = \bigcup_{c=1}^l \bar{\Pi}_c$. Rozkład regularnego obszaru Π na regularne podobszary Π_c , tj. płyty ograniczone skończoną liczbą łuków, spowodowany może być róż-

nymi względami, np. własnościami budowy powłoki, ale także potrzebami przyjętej teorii, w ramach której badane jest ciało. Niech każdy płat Π_c ograniczony jest $n = n(c)$ łukami L_c^k , gdzie $k = 1, 2, \dots, k_0$, które nazwiemy liniami podziału powierzchni Π . Oznaczmy przez Z_c^l punkty $\bar{L}_c^k \cap \bar{L}_c^l$, $k < l$ i $r = 1, 2, \dots, r_0$, gdzie $r_0 \leq \frac{k_0(k_0-1)}{2}$ będące punktami podziału Π .

Iloczynny kartezyjskie $B_c = \Pi_c \times F$ oraz Π_c nazwiemy odpowiednio elementami skończonymi i płaskimi elementami skończonymi powłoki B_R .

Wprowadźmy dla wygody rachunkowej (w szczególności obliczeń numerycznych) globalną numerację wszystkich linii i punktów podziału. I tak L_a , $a = 1, 2, \dots, A$ oznaczają wszystkie linie, a Z_i , $i = 1, 2, \dots, I$ wszystkie punkty podziału powierzchni Π . Spełnione są oczywiście związki $L_a \cap L_b = \emptyset$, $a \neq b$ oraz $\{Z_i\} \cap \{Z_j\} = \emptyset$, $i \neq j$. Linie L_a i punkty Z_i podziału charakteryzują element skończony B_c powłoki B_R .

Zbiór Ω_0 określony w następujący sposób

$$(2.1) \quad \Omega_0 = \{Z; Z \in \bigcup_a L_a \cup \bigcup_i Z_i\}$$

nazwiemy siatką podziału powierzchni środkowej Π , a tym samym całą powłoki B_R .

W kontinuum materialnym rzeczywista liczba punktów łączących elementy skończone jest nieograniczona. W wielu teoriach czy metodach obliczeń numerycznych (np. metodzie elementów skończonych) przyjmuje się, że elementy B_c połączone są ze sobą w skończonej liczbie punktów węzłowych, w których zakłada się istnienie sił skupionych reprezentujących naprężenia rzeczywiste działające kontynualnie na granicach elementów. Analityczny opis połączeń elementów skończonych sprowadza się, w przypadku więzów narzuconych na deformację, do żądania ciągłości lub także gładkości funkcji deformacji w odpowiednim zbiorze punktów należących do siatki podziału ciała. W pozostałych punktach siatki może wystąpić nie tylko nieciągłość pierwszych pochodnych funkcji deformacji, lecz także nieciągłość samych deformacji; nie mamy wtedy do czynienia z ośrodkiem ciągłym. Traktujemy więc poszczególne elementy skończone jako oddzielne ciała z więzami (1.2).

W przypadku powłoki wprowadzamy więzy wtórne, nakładające ograniczenia na współrzędne uogólnione $\Psi(Z, t)$ w postaci

$$(2.2) \quad \Psi(Z, t) = \Xi_c(Z, t, \mathbf{q}(t)), \quad Z \in \bar{\Pi}_c, \quad t \in I,$$

gdzie $\mathbf{q}(t)$ jest wektorem nowych współrzędnych uogólnionych (już niezależnych od $Z \in \Pi$). Więzy (2.2) powinny być zgodne z warunkami brzegowymi (1.1) oraz z zależnościami (1.2)₂ między współrzędnymi uogólnionymi $\Psi(Z, t)$.

Podstawiając prawe strony (2.2) do (1.2)₁ otrzymamy

$$(2.3) \quad \chi(\mathbf{X}, t) = \Phi[Z, X^3, t, \Xi_c(Z, t, \mathbf{q}(t))], \quad X^3 \in F, \quad t \in I, \quad Z \in \bar{\Pi}_c.$$

Oznaczając przez $D \subset \Omega_0$ zbiór punktów łączących elementy skończone Π_c założymy, że równania więzów (2.3) powinny ponadto spełniać związki

$$(2.4) \quad \Xi_c[Z, t, \mathbf{q}(t)] = \Xi_d[Z, t, \mathbf{q}(t)], \quad Z \in \bar{\Pi}_c \cap \bar{\Pi}_d \cap D,$$

które uzależnione są od siatki podziału Ω_0 .

Przyjęcie więzów postaci (2.3), (2.4), a tym samym określenie siatki podziału Ω_0 i jej podzbioru D nazywamy dyskretyzacją powłoki, a powłokę z więzami (2.3) i (2.4) nazywamy powłoką dyskretyzowaną. W definicji dyskretyzacji ciała tkwi więc określenie podzbioru D siatki podziału Ω_0 oraz ustalenie więzów (2.3).

W metodzie elementów skończonych przyjmuje się zwykle za funkcje Φ wielomiany ustalonego stopnia, a za D dyskretny zbiór punktów.

Niech h jest homeomorfizmem $h: \bar{\Pi} \rightarrow \bar{\Pi}$. Określmy teraz homeomorfizmy g w następujący sposób:

$$(2.5) \quad g: \Omega_0 \rightarrow \Omega \subset \bar{\Pi} \wedge g(Z) = h(Z), \quad Z \in \Omega_0.$$

Homeomorfizm g jest więc obcięciem homeomorfizmu h do siatki Ω_0 . Zbiór Ω jest także siatką podziału powłoki B_R , która ma tę samą liczbę łuków i punktów podziału co siatka Ω_0 . Wynika to natychmiast z własności homeomorfizmów. Także odwrotnie, każda siatka Ω opisująca dyskretyzację powłoki B_R tą samą liczbą łuków i punktów (a tym samym tą samą liczbą elementów skończonych) jest obrazem siatki Ω_0 , tzn. istnieje homeomorfizm g taki, że $g^{-1}(\Omega) = \Omega_0$. Jest oczywiście, że $\bigcup_g g(\Omega_0) = B_R$.

Dla wielu zagadnień brzegowych zbiór D przyjmuje się jako dyskretny zbiór punktów Z_i , $i = 1, 2, \dots, I$, tym samym powiązanie elementów skończonych w tym zbiorze zapewnia wystarczającą aproksymację ruchu rzeczywistego. W istocie, w takim przypadku (dyskretyzacji określonej na zbiorze punktów — dyskretyzacji punktowej) mamy do czynienia nie z jednym podziałem ciała, ale z całą klasą podziałów, które okazują się klasą abstrakcji następującej relacji równoważności:

$$(2.6) \quad (\Omega_1 \approx \Omega_2) \Leftrightarrow [g_1(Z_i) = g_2(Z_i) \wedge g_1(\Omega_0) = \Omega_1, g_2(\Omega_0) = \Omega_2].$$

Relacja (2.6) jest zwrotna, symetryczna i przechodnia jest więc relacją równoważności.

Dla klasy abstrakcji $\|\Omega\|$ relacji równoważności (2.6) wygodne jest dokonanie wyboru reprezentanta Ω w następujący sposób: niech $\Omega = g(\Omega_0)$ i obrazy łuków L_a są odcinkami. W szczególności, gdy dyskretyzacja $\hat{\Omega}$ jest triangulacją powierzchni środkowej, tj. podziałem na trójkątne płaskie elementy skończone, reprezentantem $\|\Omega\|$ mogą być wprost $\hat{\Omega}$.

W przypadku dyskretyzacji punktowej równania więzów (2.2) przepiszemy w postaci

$$(2.7) \quad \psi(Z, t) = \Xi_c(Z, t, \mathbf{q}(t)), \quad Z \in \bar{\Pi}, \quad t \in I,$$

gdzie za współrzędne uogólnione $\mathbf{q}(t)$ przyjęto wartości funkcji $\psi(Z, t)$ w punktach zbioru $\{Z_i\}$;

$$(2.8) \quad \mathbf{q}(t) = \{\psi(Z_1, t), \dots, \psi(Z_I, t), \overset{\star}{\nabla} \psi(Z_1, t), \dots, \overset{\star}{\nabla} \psi(Z_I, t)\}.$$

Korzystając z (2.8), równania ruchu [równania na funkcje $\mathbf{q}(t)$] napiszemy w postaci:

$$(2.9) \quad \mathbf{h}_i + \mathbf{f}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial k}{\partial \dot{\chi}_i} - \frac{\partial k}{\partial \chi_i},$$

$$\mathbf{H}_i + \mathbf{F}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial k}{\partial \dot{\Gamma}_i} - \frac{\partial k}{\partial \Gamma_i}, \quad i = 1, 2, \dots, I,$$

gdzie oznaczono $\chi_i = \chi(Z_i, X^3, t)$, $\Gamma_i = \overset{\star}{\nabla} \chi_i(Z_i, X^3, t)$.

Równania konstytutywne sprowadzą się teraz do

$$(2.10) \quad \mathbf{h}_i = - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \boldsymbol{\chi}_i}, \quad \mathbf{H}_i = - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \boldsymbol{\Gamma}_i},$$

gdzie funkcja energii odkształcenia jest określona przez (1.4)₃, a współrzędne uogólnione $\mathbf{q}(t)$ są niezależne. Energia kinetyczna k jest zdefiniowana przez (1.4)₂, a obciążenia \mathbf{f}_i i \mathbf{F}_i zgodnie z (1.4)₁ będą

$$(2.11) \quad \mathbf{f}_i = \sum_c \left(\int_{B_c} \varrho_R \mathbf{b}_R \frac{\partial \Phi_c}{\partial \boldsymbol{\chi}_i} dv_R + \int_{\partial B_R \cap \partial B_c} \mathbf{p}_R \frac{\partial \Phi_c}{\partial \boldsymbol{\chi}_i} d\sigma_R \right),$$

$$\mathbf{F}_i = \sum_c \left(\int_{B_c} \varrho_R \mathbf{b}_R \frac{\partial \Phi_c}{\partial \boldsymbol{\Gamma}_i} dv_R + \int_{\partial B_R \cap \partial B_c} \mathbf{p}_R \frac{\partial \Phi_c}{\partial \boldsymbol{\Gamma}_i} d\sigma_R \right).$$

Funkcje podcałkowe w (2.11) są znanymi funkcjami argumentu $\mathbf{X} \in B_c$, gdyż postać funkcji Φ w równaniach więzów jest znana, tym samym odpowiednie całki po dowolnym elemencie skończonym mogą być obliczone.

Po rozwiązaniu zagadnienia początkowego dla układu równań (2.10), tj. po wyznaczeniu współrzędnych uogólnionych $\mathbf{q}(t)$ możemy otrzymać zarówno funkcję deformacji $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)$ całego ciała (lub spójnego zbioru ciał, gdy nie zachodzi warunek (2.4)), jak i wektor $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{Z}, t)$. Wynika to od razu z (2.2).

3. Ocena dokładności rozwiązań

Siły reakcji powstałe w wyniku działania założonych *a priori* więzów wewnętrznych (1.2)₁ są pewnymi «fikcyjnymi» obciążeniami, które należałoby dodatkowo przyłożyć do ciała, by odkształcało się zgodnie z więzami. Znaczy to, że po rozwiązaniu zagadnienia początkowego (1.3) dla niewiadomych $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{Z}, t)$, obliczeniu ze związków (1.2)₁ całego ruchu ciała, wyznaczeniu tensora ekstra naprężenia Pioli-Kirchhoffa $\mathbf{T}_R = \boldsymbol{\eta}_R(\mathbf{X}, \nabla \boldsymbol{\chi})$ (gdzie $\boldsymbol{\eta}_R$ jest funkcją konstytutywną materiału powłoki), siły reakcji możemy wyznaczyć z następujących związków [1]:

$$(3.1) \quad \varrho_R \mathbf{r} = \varrho_R \ddot{\boldsymbol{\chi}} - \operatorname{div} \mathbf{T}_R - \varrho_R \mathbf{b}_R, \quad \text{w } B_R \times I,$$

$$\mathbf{s}_R = \mathbf{T}_R \mathbf{n}_R - \mathbf{p}_R, \quad \text{na } \partial B_R \times I.$$

Powierzchniowe siły reakcji wywołane są zarówno więzami wewnętrznymi, jak i podparciem brzegu powłoki. Oznaczając te ostatnie przez \mathbf{u}_R i przyjmując, że potrafimy je niezależnie wyznaczyć (np. w zagadnieniach statycznie wyznaczalnych), otrzymamy siły reakcji \mathbf{r} , $\mathbf{s}_R - \mathbf{u}_R$ wywołane tylko więzami wewnętrznymi. Gdy więzy wewnętrzne wyrażają wyłącznie wprowadzone *a priori* hipotezy kinematyczne upraszczające matematyczny opis problemu (a nie np. własności materiałowe w rodzaju nieściśliwości), to ocenę bliskości otrzymanego rozwiązania «modelowego» i nieznanego rozwiązania ścisłego, tj. rozwiązania jakie uzyskano by w ramach teorii sprężystości, można przeprowadzić korzystając z następującego kryterium szacującego go

$$(3.2) \quad \|(\mathbf{r}, \mathbf{s}_R - \mathbf{u}_R)\| = \varepsilon(\mathbf{b}_R, \mathbf{p}_R + \mathbf{u}_R)\|,$$

gdzie $\|(\cdot, \cdot)\|$ oznacza normę w przestrzeni funkcyjnej, której elementami są pary utworzone z gęstości sił masowych i powierzchniowych działających na ciało oraz ε jest dodatnią liczbą małą wobec jedności. Występująca w (3.2) norma nie jest określona jednoznacznie, lecz sposób jej wprowadzenia zależy często od charakteru problemu brzegowego. Niektóre przykłady norm $\|(\cdot, \cdot)\|$ przedstawiono w [4].

Jeżeli warunek (3.2) nie jest spełniony, tj. gdy układ sił reakcji utrzymujących więzy (1.2)₁ nie jest pomijalnie mały wobec układu sił działających na ciało, to rozwiązanie «modelujące» nie stanowi rozwiązania problemu fizycznego.

Analiza tak postawionego problemu prowadzi do oceny, czy przyjęta (przez więzy (1.2)₁) teoria powłok może być stosowana do rozwiązywanego problemu fizycznego.

W dalszym ciągu będziemy się zajmować siłami reakcji spowodowanymi więzami (2.2), tj. spowodowanymi dyskretyzacją. Rozwiązaniem modelowym będzie więc tutaj rozwiązanie $q(t)$, a ścisłym albo wzorcowym $\Psi(Z, t)$, (wyżej rozwiązaniem modelowym było rozwiązanie $\Psi(Z, t)$, a ścisłym rozwiązanie jakie uzyskano by w ramach teorii sprężystości). Tak więc interesować nas będą siły reakcji powstałe wskutek dyskretyzacji powłoki (więzy (2.2)), a nie siły reakcji powstałe wskutek przyjęcia takiej czy innej teorii powłok (czyli więzów (1.2)₁).

Rozwiązując zagadnienie początkowe (2.9) dla niewiadomych $q(t)$ obliczymy ze związków (2.2) współrzędne uogólnione $\Psi(Z, t)$ i dalej ze związków (1.2)₁ ÷ (1.3)₂ funkcję deformacji $\chi(X, t)$ i uogólnione siły H i h . Siły reakcji spowodowane dyskretyzacją można wtedy obliczyć [por. (3.1)] ze związków

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \dot{r} &= -\operatorname{div}^* H - h - f + \frac{d}{dt} \frac{\partial k}{\partial \dot{\Psi}} - \frac{\partial k}{\partial \Psi}, \\ \dot{s}_R &= H n_R^* - t_R - u_R, \end{aligned}$$

w których występujące wielkości są określone wzorami (1.3)₂ ÷ (1.6). Siły reakcji (3.3) obliczone dla każdego elementu skończonego B_c oznaczymy przez \dot{r}_c , \dot{s}_c , a skok powierzchniowych sił reakcji na $\partial \Pi_c \cap \partial \Pi_d$, $c \neq d$ oznaczymy przez

$$(3.4) \quad \dot{s}_{cd} = H_c n_c^* + H_d n_d^*,$$

gdzie $n_d^* = -n_c^*$ i nazwiemy kontaktowymi siłami reakcji.

Wprowadźmy w przestrzenie sił masowych i powierzchniowych [zarówno $f_c = f|_{Z \in \Pi_c}$, $t_c = t_R|_{Z \in \Pi_c}$, jak i sił reakcji (3.3) i (3.4)], odpowiednio normy $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$. Uzyskané przy dyskretyzacji rozwiązanie możemy uznać za dostatecznie bliskie rozwiązaniu jakie otrzymalibyśmy dla ciała bez więzów (2.2) jeśli dla każdego c spełniony jest warunek

$$(3.5) \quad \|\dot{r}_c\|_1 + \|\dot{s}_c - u_c\|_2 + \left\| \sum_{d=1}^l \dot{s}_{cd} \right\|_2 = \varepsilon (\|f_c\|_1 + \|t_c + u_c\|_2),$$

gdzie $u_c = u_R|_{Z \in \Pi_c}$.

Warunek (3.5) mówi, że siły reakcji masowych i powierzchniowych powinny stanowić układ sił pomijalnie małych w porównaniu z układem uogólnionych sił zewnętrznych działających na ciało.

4. Dyskretyzacja sterowana

Spełnienie warunku (3.5) dla każdego c można otrzymać różnymi drogami. Można mianowicie albo dobierać przy ustalonym podziale powłoki B_R funkcję więzów (2.2) albo ustalając funkcję więzów Ξ zmieniać podział Π siatkami Ω zarówno zwiększając liczbę elementów, jak i zmieniając ich rozmieszczenie, wielkość czy kształt, albo wreszcie stosować te dwie drogi równocześnie,

Postępowanie takie nazywamy sterowaniem dyskretyzacją powłoki. W tym punkcie zajmiemy się sterowaniem dyskretyzacją przez zmianę liczby elementów skończonych przy ustalonych więzach.

Na początek ustalmy, że sterowania dyskretyzacją dokonamy przez \mathcal{A} -krotny podział ciała na elementy skończone punktami $\{Z_i\}$. Liczba \mathcal{A} choć dowolna zwykle uzależniona jest od możliwości numerycznych maszyny cyfrowej zastosowanej do rozwiązania problemu brzegowego.

Pierwszej dyskretyzacji dokonujemy siatką punktów $\{Z_i\}$, $i = 1, 2, \dots, I$ kierując się kształtem ciała i sposobem przyłożenia sił zewnętrznych (może to także być podział zupełnie przypadkowy). Po rozwiązaniu równań (2.9) i wyliczeniu sił reakcji (3.3) przeprowadzamy ocenę dokładności rozwiązań stosując kryterium szacujące (3.5), tj. dla każdego c_I (indeks I wskazuje, iż mamy do czynienia z pierwszą dyskretyzacją) określamy w nierówności (3.5) największą wartość ε_{c_I} .

Niech ε_0 będzie z góry przyjętą w związku (3.5) wartością ε określającą dopuszczalne odchylenie rozwiązania modelowego od rozwiązania ścisłego (można np. przyjąć $\varepsilon_0 = 0,05$, gdyż często z taką dokładnością określa się wielkość sił zewnętrznych). Może się zdarzyć, że po pierwszej dyskretyzacji spełniona jest nierówność $\varepsilon_0 \geq \varepsilon_{c_I}$ dla wszystkich $c_I = 1, 2, \dots, I_I$. Spełniona jest tym samym nierówność (3.5) i rozwiązanie modelowe uznajemy za wystarczająco dokładnie aproksymujące rozwiązanie ścisłe. Na ogół jednak znajdują się takie elementy skończone Π_{c_I} , dla których warunek (3.5) nie jest spełniony, tzn. będą istnieć indeksy c_I^0 , dla których $\varepsilon_{c_I^0} > \varepsilon_0$. Dokonujemy wtedy dyskretyzacji taką siatką punktów $\{Z_{II}\}$, $i_{II} = 1, 2, \dots, I_{II}$, które podzielą elementy $\Pi_{c_I^0}$ na mniejsze. Pozostawienie elementów skończonych, w których warunek (3.5) jest spełniony w niezmiennym kształcie (choć nie jest to konieczne) jest wygodne, gdyż pozwala obliczone dla tych elementów pewne wielkości (jak np. macierze sztywności) wykorzystać do następnych dyskretyzacji.

Takie postępowanie powinno przy dyskretyzacji punktami $\{Z_{II}\}$ doprowadzić do spełnienia warunku (3.5) we wszystkich elementach skończonych.

Przykład sterowania dyskretyzacją przez zwiększanie liczby elementów skończonych pryzmatycznej powłoki z prostokątnym otworem (traktowanej jednak jako powłoka gruba) rozpatrzono w [4].

5. Sterowanie optymalne

Przedstawiony w rozdziale 4 proces dyskretyzacji można kontynuować aż do spełnienia warunku (3.5) przy założonym z góry ε . Trzeba jednak zaznaczyć, że nie zawsze jest to możliwe. Nie dysponujemy bowiem maszynami matematycznymi, które rozwiązywałyby

układy równań o dostatecznie dużej liczbie niewiadomych. Trudność tę można ominąć na innej drodze. Można mianowicie sterować procesem dyskretyzacji tak, by przy ustalonej liczbie elementów skończonych uzyskać minimum normy sił reakcji.

Zauważmy w tym celu, że współrzędne uogólnione $\mathbf{q}(t)$ przy ustalonym t oraz ustalonej siatce podziału Ω należą zgodnie z (2.8) do przestrzeni euklidesowej E^{4I} . Nazywać je będziemy wektorami stanu a przestrzeń E^{4I} przestrzenią stanu.

Zbiór siatek Ω , gdzie $\Omega = g(\Omega_0)$ i g jest z pewnego zbioru homeomorfizmów (2.5) oznaczymy przez Θ i nazwiemy dziedziną sterowania.

Każdemu rozwiązaniu $\mathbf{q}(t)$ z odpowiednimi warunkami początkowymi $\mathbf{q}(t_0) = \hat{\mathbf{q}}$, $\dot{\mathbf{q}}(t_0) = \hat{\mathbf{q}}^{(1)}$ przypiszemy liczbę V w następujący sposób:

$$(5.1) \quad V = V(\mathbf{q}, \Omega) = \sum_{c=1}^I (\|\hat{\mathbf{r}}_c(\mathbf{q}, \Omega)\|_1 + \|\hat{\mathbf{s}}_c(\mathbf{q}, \Omega) - u_c(\mathbf{q}, \Omega)\|_2 + \|\sum_{d=1}^I \hat{\mathbf{s}}_{cd}(\mathbf{q}, \Omega)\|_2),$$

gdzie $\Omega \in \Theta$.

Powiadamy, że sterowanie lub siatka podziału Ω^* jest optymalna jeśli odpowiadające jej rozwiązanie $\mathbf{q}^*(t)$ równań stanu (2.9) spełnia dla $\Omega \in \Theta$ związek

$$(5.2) \quad V(\mathbf{q}^*, \Omega^*) \leq V(\mathbf{q}, \Omega).$$

Tak więc przez znalezienie optymalnej siatki podziału powłoki B_R będziemy rozumieć znalezienie takiego elementu zbioru Θ , dla którego funkcjonal (5.1), przyjmuje wartość najmniejszą.

W wielu przypadkach szczególnych siatki Ω będą należeć do pewnego podzbioru $\tilde{\Theta} \subset \Theta$ zwanego dopuszczalnym zbiorem sterowań. Specyfikacja tego podzbioru w zbiorze Θ zależy zarówno od warunków na homeomorfizmy g (np. by były przedziałami liniowe), jak i od dziedziny określoności. Nie zawsze bowiem konieczne jest sterowanie całą siatką, wystarczy sterowanie tylko jej częścią.

Niech teraz $\tilde{\Theta} \subset \Theta$, będzie zbiorem reprezentantów relacji równoważności (2.6). Elementy zbioru $\tilde{\Theta}$ można wzajemnie jednoznacznie przyporządkować pewnym podzbiорom w przestrzeni euklidesowej.

Skoro klasa abstrakcji $\|\Omega\|$ w sposób jednoznaczny wyznacza siatkę punktów $\{Z_i\}$, $i = 1, 2, \dots, I$ i odwrotnie, siatka punktów $\{Z_i\}$ zgodnie z (2.6) jednoznacznie określa $\|\Omega\|$, w takim razie $\|\Omega\|$ przyporządkujemy punkt $\mathbf{z} \in E^{2I}$, gdzie $\mathbf{z} = \{Z_1, \dots, Z_I\}$. Oczywiście dla ustalonego i , $Z_i \in \bar{I}$, tak więc punkt \mathbf{z} przestrzeni E^{2I} , któremu przyporządkowano pewien element Θ należy do I -krotnego iloczynu kartezjańskiego $S = \bar{I} \times \bar{I} \times \dots \times \bar{I}$, z którego usunięto zbiór M punktów $\mathbf{z} = (z^\sigma)$, $\sigma = 1, 2, \dots, 2I$, dla których istnieją σ_1, σ_2 , z $z^{\sigma_1} = z^{\sigma_2}$.

W wielu zagadnieniach brzegowych zakłada się, że homeomorfizmy g na $\partial\bar{I}$ są identycznościami. Niech $Z_t \in \partial\bar{I}$, $t = 1, 2, \dots, I_0$ i $I_0 \leq I$, wtedy wymiar dziedziny $S - M$ równy jest $2(I - I_0)$ oraz S jest zbiorem otwartym.

Niech teraz $\hat{\mathbf{r}}_c, \hat{\mathbf{s}}_c, \hat{\mathbf{s}}_{cd}$ będą siłami reakcji przy ustalonej siatce podziału $\Omega \in \Theta$ i ogólniej $\hat{\mathbf{r}}_c(\mathbf{z}), \hat{\mathbf{s}}_c(\mathbf{z}), \hat{\mathbf{s}}_{cd}(\mathbf{z})$ będą siłami reakcji dla każdej siatki podziału $\Omega \in \Theta$, czyli funkcjami

$z \in S - M$. Zgodnie z (5.1) funkcjonal celu będzie także funkcją $z \in S - M$. Widać stąd, że w przypadku kiedy zbiór dopuszczalnych sterowań jest zbiorem siatek równoważnych względem relacji (2.6), problem sterowania optymalnego może być sprowadzony do znacznie prostszego problemu szukania ekstremum funkcji wielu zmiennych.

6. Uwagi końcowe

Przyjęcie w mechanice odpowiedniego modelu kontinuum ma zasadnicze znaczenie, ponieważ determinuje zarówno stopień dokładności, jak i zakres stosowalności teorii. Najczęściej rozważanym modelem ciała materialnego jest model kontynualny. Jednak duże trudności w rozwiązywaniu podstawowego układu równań mechaniki ośrodków ciągłych sprawiły, że zaczęto wprowadzać do niej dodatkowe założenia upraszczające. Wystarczy wspomnieć teorię powłok KIRCHHOFFA czy teorię prętów BERNOULLIEGO.

Inne podejście pochodzące jeszcze od EULERA, opiera się na założeniu, że pewne skończone podobszary ciała mają skończoną liczbę stopni swobody. Tak podzielone ciało nazywamy ośrodkiem złożonym z elementów skończonych lub ośrodkiem dyskretyzowanym. Obecnie coraz częściej w zagadnieniach techniki wprowadzamy taki właśnie model ciał [5].

Przedmiotem rozważań w tej pracy jest dyskretyzowana płyta lub powłoka B_R poddana więzom wewnętrznym. Ruch takiego ośrodka opisany jest skończonym układem $\mathbf{q}(t) = (q^1(t), q^2(t), \dots, q^N(t))$ niewiadomych funkcji zależnych tylko od czasu, pozwalającym aproksymować rzeczywisty ruch ośrodka ciągłego ruchem układu o skończonej liczbie stopni swobody. Powyższe ograniczenia na ruch stanowią przypadek szczególny więzów wewnętrznych narzuconych tylko na ruch kontinuum, a nie np. na naprężenia.

Ogólne podstawy mechaniki ciał dyskretyzowanych obejmujące także znane dotychczas metody, oparte na mechanice ośrodków ciągłych z więzami, były przedstawione w pracach WOŹNIAKA (np. [1]).

Każde ciało poddać można dyskretyzacji na elementy B_e , jednak otrzymane wyniki opisują badany układ, w rzeczywistości bez więzów, z dokładnością do sił reakcji. O otrzymanym w metodzie elementów skończonych rozwiązaniu mówimy, że wystarczająco dokładnie aproksymuje rozwiązanie ścisłe, tj. rozwiązanie, jakie otrzymalibyśmy dla ośrodka ciągłego wtedy, kiedy zastosowany skończony ciąg dyskretyzacji (na coraz większą liczbę elementów) wykazuje odpowiednią zbieżność. W przypadku ciała dyskretyzowanego, traktowanego jako ośrodek ciągły z więzami, oceny dokładności rozwiązań dla każdej dyskretyzacji dokonać można przez porównanie wielkości sił reakcji (wywołanych więzami) z siłami zewnętrznymi.

Wprowadzając w przestrzeń par sił reakcji wewnętrznych i powierzchniowych normę, dla każdej dyskretyzacji możemy określić wielkość tych sił. Mając więc dwie dyskretyzacje tego samego ciała, możemy powiedzieć, która z nich jest lepsza (w sensie przyjętej normy), tj. która z nich daje rozwiązanie dokładniejsze w stosunku do nieznanego rozwiązania, które uzyskano by dla ciała bez więzów wewnętrznych.

Poszukiwanie w pewnym zbiorze dyskretyzacji takiej dyskretyzacji, dla której odpowiednio skonstruowany funkcjonal (zwany funkcjonalem celu) przyjmuje minimum, nazywamy sterowaniem optymalnym.

W pracy rozpatruje się dwa rodzaje dyskretyzacji. Jeden, pozwalający sterować dyskretyzacją przez zwiększenie liczby elementów skończonych tylko tam, gdzie siły reakcji są duże (w sensie przyjętej normy), oraz drugi, polegający na szukaniu sterowania optymalnego.

W rozdziale 4 formułuje się zagadnienie sterowania dyskretyzacją przez zwiększenie liczby elementów skończonych w tych obszarach, gdzie norma sił reakcji nie spełnia odpowiedniego warunku szacującego. Zagęszczanie bowiem elementów skończonych w całym ciele często nie jest potrzebne, bo prowadzi do powiększenia rzędu układu równań. Zagadnienie optymalnego sterowania formułuje się w rozdziale 5, wykorzystując pojęcie siatki podziału Ω ciała dyskretyzowanego B_R . Siatki Ω stanowią dziedzinę sterowania Θ . W wielu przypadkach szczególnych siatki Ω będą należeć do pewnego podzbioru $\tilde{\Theta} \subset \Theta$, zwanego dopuszczalną dziedziną sterowania. Specyfikacja tego podzbioru przeprowadzona jest także w rozdziale 5.

Opisany wyżej sposób dyskretyzacji płyt i powłok można zastosować także do zagadnień trójwymiarowych. Sterowanie dyskretyzacją trójwymiarowych ciał sprężystych omówione jest w pracy [6].

Literatura cytowana w tekście

1. Cz. WOŹNIAK, *Constrained continuous media*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Techn., 21 (1973), 109.
2. P. M. NAGHDI, *The Theory of Shells and Plates*, Handbuch der Physik, VIa/2, 1972.
3. Cz. WOŹNIAK, *Wstęp do elastokinytyki form konstrukcyjnych*, *Dzwigary powierzchniowe*, Ossolineum, Wrocław 1975.
4. W. KUFEL, *Dyskretyzowane ciała sprężyste jako kontinua ze sterowanymi więzami*, praca doktorska, Wydz. Mat. i Mech., Uniwersytet Warszawski, 1974.
5. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa, 1972.
6. W. KUFEL, *On the optimal control of discretization problem for elastic bodies*, Arch. of Mech. 1(1976) 3-11.
7. H. RASIOVA, *Wstęp do matematyki współczesnej*, wyd. IV, PWN, Warszawa 1972.
8. C. A. TRUESDELL, W. NOLL, *The non-linear field theories of mechanics*, Handbuch der Physik, III/3, 1965.

Резюме

УПРАВЛЯЕМАЯ ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

Рассматриваются пластины и оболочки подверженные дискретизации, рассматриваемой в качестве условного наложения на их движение связей специального вида, которые не зависят от массовых и поверхностных сил ни от распределения массы. Такие системы являются примерами тел с ограничивающими связями, механика которых была построена Ч. Вольняком.

Определение на множестве дискретизаций плит и оболочек соотношения эквивалентности и использование, возникающих вследствие воздействия связей, сил реакции приводит к возможности оценки: которая из проведенных дискретизаций лучше т. е. при которой из них полученное решение краевой задачи точнее по сравнению с неизвестным «образцовым» решением. Подбор лучших с точки зрения этого решения дискретизаций называем управлением дискретизацией.

В работе описывается метод управления дискретизацией пластин и оболочек, приводится критерий достоверности полученного решения а также формулируется задача оптимального управления.

S u m m a r y

CONTROLLED DISCRETIZATION OF PLATES AND SHELLS

The paper deals with plates and shells subject to discretization which is considered as a set of constraints of special type imposed on the structural motion. They are independent of body forces, surface tractions or mass distribution. The discretized plates and shells are examples of constrained bodies the mechanics of which has been formulated by Cz. Woźniak.

By introducing an equivalence relationship in the set of all discretizations and by evaluating the reactions occurring due to the constraints imposed it turns out to be possible to estimate each discretization. Selecting the better discretization is called the discretization control.

Paper describes the methods of controlling of discretization of plates and shells, presents criterions of estimation of the solution obtained and formulates the problem of optimal discretization control.

INSTYTUT MECHANIKI
UNIwersytetu warszawskiego

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 lutego 1975 r.
