MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
2, 14 (1976)

CAŁKA RÓWNANIA RÓŻNICZKOWEGO CZĄSTKOWEGO ROZWIĄZUJĄCEGO POWŁOKI WALCOWE

STANISŁAW BIELAK (GLIWICE)

1. Wstęp

W pracach autora [1, 2, 3, 4] rozwiązanie powłok prostokreślnych rozwijalnych zostało sprowadzone do jednego równania różniczkowego cząstkowego rzędu ósmego, ze względu na niewiadomą funkcję przemieszczeń promieniowych w^3. Przedstawione w tych pracach równanie różniczkowe rozwiązujące obejmuje dowolny sposób obciążenia i podparcia powłoki.

Przyjęty matematyczny model, opisujący pracę zgięciową powłoki, oparty został na liniowej teorii powłok odniesionej do ośrodka HOOKE'A.

Poszukiwane rozwiązanie będzie przedstawione w postaci sumy złożonej z całki ogólnej, rozwiązującej równanie różniczkowe jednorodne i całki szczególnej spełniającej równanie niejednorodne.

Całka szczególna może być w prosty sposób wyznaczona, gdyż jest ona rozwiązaniem stanu bezmomentowego, (por. pracę [1]).

Istotnym problemem przedstawionym w tej pracy będzie podanie rozwiązania części jednorodnej równania różniczkowego cząstkowego ósmego rzędu.

Równanie różniczkowe jednorodne opisuje pracę powłoki w stanie zgięciowym z dokładnością do wielkości małych wyższego rzędu — taką interpretację fizyczną można mu przypisać.

Wprowadzając pewne wielkości mające charakter tensorowy ze względu na sumowanie, mianowicie funkcje trygonometryczne, hiperboliczno-kołowe z odpowiednio dobranymi argumentami, całce ogólnej równania jednorodnego można nadać kształt szeregu hipertrygonometrycznego.

2. Ogólny układ równań

Opis geometryczny powłoki walcowej oraz związki geometryczne i fizyczne, podane są dla parametryzacji naturalnej w oparciu o pracę [1].

2.1. Opis geometryczny. Równanie wektorowe powierzchni środkowej powłoki walcowej

$$\vec{r} = a(\vec{i}\cos u^2 + \vec{j}\sin u^2) + u^1 k, \tag{2.1}$$

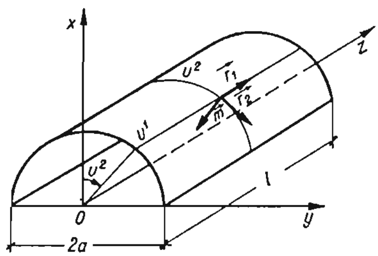
gdzie u^1, u^2 oznaczają współrzędne krzywoliniowe na powierzchni, (rys. 1), przy czym u^1 określa położenie punktu na tworzącej, u^2 wskazuje tworzącą, na której leży punkt.

Współczynniki pierwszej i drugiej formy różniczkowej, ich wyróżniki oraz ich krzywizny — gaussowska i średnia są następujące:

$$
\begin{aligned}
&g_{11} = 1, && b_{11} = 0,\\
&g_{12} = g_{21} = 0, && b_{12} = b_{21} = 0,\\
&g_{22} = g = a^2, && b_{22} = a,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
b = 0,\\
K = 0,\\
H = \frac{1}{2a}.
\end{gathered}
\tag{2.2}
$$

Symbole Christoffela drugiego rodzaju dla powierzchni walcowej są równe zeru.



Rys. 1

2.2. Związki geometryczne powłoki. Związek składowych przemieszczenia z tensorem odkształcenia błonowego przyjmuje postać

$$
\begin{aligned}
w^1_{,1} &= \gamma_{11},\\
a^2 w^2_{,1} + w^1_{,2} &= 2\gamma_{12},\\
a^2 w^2_{,2} - a w^3 &= \gamma_{22}.
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Przecinek użyty w wyrażeniach (2.3) oznacza odpowiednią pochodną względem zmiennej u^1 lub u^2.

2.3. Związki fizyczne. Związki fizyczne wiążące naprężenia z odkształceniami, dla wersji uproszczonej mają postać

$$
\begin{aligned}
N^{ij} &= \bar{N}^{ij} + 6H\hat{M}^{ij},\\
M^{ij} &= \hat{M}^{ij} + \xi h^2 H \bar{N}^{ij},
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

gdzie:

$$
\begin{aligned}
\bar{N}^{ij} &= \frac{2Eh}{1-\nu^2}\left[(1-\nu)\gamma^{ij} + \nu g^{ij} A\right],\\
\hat{M}^{ij} &= -\frac{4Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left[(1-\nu)\varrho^{ij} + \nu g^{ij} B\right],
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

gdzie ξ oznacza parametr stały.

Niezmienniki A i B występujące w (2.5) są sumami

$$
\begin{aligned}
A &= g^{ij}\gamma_{ij},\\
B &= g^{ij}\varrho_{ij},
\end{aligned}
$$

przy czym tensor odkształcenia błonowo-zgięciowego ϱ_{ij} można zastąpić zależnością

$$\varrho_{ij} = \frac{1}{2} w^3_{,ij}. \tag{2.6}$$

Dla powłoki walcowej związki (2.5) napiszemy w ujęciu dostosowanym do dalszego wykorzystania. Z pierwszego wyrażenia (2.5) wyznaczymy składowe tensora błonowego γ_{ij} w postaci następującej:

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \frac{1}{2Eh}[\overline{N}^{11} - \nu a^2 \overline{N}^{22}], \\ \gamma_{12} = \gamma_{21} &= \frac{1+\nu}{2Eh} a^2 \overline{N}^{12}, \\ \gamma_{22} &= \frac{a^2}{2Eh}[a^2\overline{N}^{22} - \nu \overline{N}^{11}]. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Wielkości $\hat{M}^{ij}$ opisane drugim wyrażeniem (2.5), po podstawieniu (2.6), przyjmą postać

$$\begin{aligned} \hat{M}^{11} &= -\frac{Eha^2}{2\alpha^4}\left[w^3_{,11} + \frac{\nu}{a^2} w^3_{,22}\right], \\ \hat{M}^{12} = \hat{M}^{21} &= -\frac{Eh(1-\nu)}{2\alpha^4} w^3_{,12}, \\ \hat{M}^{22} &= -\frac{Eh}{2\alpha^4}\left[\nu w^3_{,11} + \frac{1}{a^2} w^3_{,22}\right]. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Wprowadzony w (2.8) parametr α jest równy

$$\alpha = \sqrt{\frac{a}{2h}}\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}. \tag{2.9}$$

Tensory sił tnących Q^i napiszemy w oparciu o pracę [3] w postaci

$$\begin{aligned} Q^1 &= -\frac{Eha^2}{2\alpha^4} W_{,1} + \xi h^2 (H\overline{N}^{i1})_{,i}, \\ Q^2 &= -\frac{Eh}{2\alpha^4} W_{,2} + \xi h^2 (H\overline{N}^{i2})_{,i}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Niezmiennik W występujący w (2.10) jest sumą

$$W = g^{ij} w^3_{,ij}. \tag{2.11}$$

Przejścia do współrzędnych fizycznych, to znaczy odniesionych do bazy jednostkowej dokonujemy za pomocą wzorów:

$$\begin{aligned} N_{\overline{ij}} &= \sqrt{\frac{g_{jj}}{g^{ii}}} N^{ij}, & Q_{\overline{i}} &= \sqrt{\frac{1}{g^{ii}}} Q^i, \\ M_{\overline{i1}} &= -\sqrt{\frac{gg^{11}}{g^{ii}}} M^{i2}, & M_{\overline{i2}} &= \sqrt{\frac{gg^{22}}{g^{ii}}} M^{i1}, \\ w_{\overline{i}} &= \sqrt{g_{ii}} w^i, & w_{\overline{3}} &= w^3, \\ P_{\overline{i}} &= \sqrt{g_{ii}} P^i, & P_{\overline{3}} &= P^3, \end{aligned} \tag{2.12}$$

(po ij nie sumować). Symbol «$\urcorner$» oznacza współrzędną fizyczną.

3. Rozwiązanie równania różniczkowego powlok walcowych

Równanie różniczkowe, rozwiązujące powłoki walcowe dowolnie obciążone i podparte posiada kształt (por. [4]).

$$g^{ii}g^{jj}g^{kk}W_{,kkjjii}+4\left(\frac{\alpha}{a}\right)^4 w^3_{,1111} = \frac{2a}{Eh}\left(\frac{\alpha}{a}\right)^4 P. \tag{3.1}$$

Wielkości α i W są opisane wyrażeniami (2.9), (2.11), a daną funkcję obciążeń P opisuje zależność

$$P = ag^{ii}g^{jj}P^3_{,jjii}+g^{ii}(P^1_{,1}-P^2_{,2})_{,ii}-(1+\nu)P^k_{,k11}. \tag{3.2}$$

Rozwiązanie równania (3.1) możemy przedstawić jako sumę złożoną z całki ogólnej $\hat{w}^3$ równania jednorodnego i całki szczególnej $\overline{w}^3$ równania niejednorodnego,

$$w^3 = \hat{w}^3+\overline{w}^3. \tag{3.3}$$

Całka szczególna $\overline{w}^3$ jest rozwiązaniem stanu bezmomentowego i może być w prosty sposób wyznaczona w oparciu o pracę [1]. Całkę ogólną równania (3.1) można przedstawić jako sumę odpowiednio dobranego szeregu złożonego z iloczynów utworzonych z funkcji hiperbolicznych i kołowych.

Sumę takiego szeregu trygonometrycznego, hiperboliczno-kołowego, można zapisać w ujęciu tensorowym, co będzie szczególnie korzystne dla przeprowadzenia potrzebnych obliczeń.

Wprowadźmy następujące wielkości mające charakter tensorowy ze względu na sumowanie.

Argumenty funkcji trygonometrycznych:

hiperbolicznej

$$z^k_H = \alpha\left[\alpha^k\frac{u^1}{a}+\beta^k u^2\right], \tag{3.4}$$

kołowej

$$z^l_K = \alpha\left[m^l\frac{u^1}{a}+n^l u^2\right]. \tag{3.5}$$

Funkcje trygonometryczne:

hiperboliczne

$$H^i = \begin{cases}\text{sh dla } i=1\\ \text{ch dla } i=2;\end{cases} \tag{3.6}$$

pochodna funkcji H^i

$$\overline{H}^i = \begin{cases}\text{ch dla } i=1\\ \text{sh dla } i=2;\end{cases} \tag{3.6'}$$

kołowe

$$K^j = \begin{cases}\text{sin dla } j=1\\ \text{cos dla } j=2;\end{cases} \tag{3.7}$$

pochodna funkcji K^j

$$\bar{K}^j = \begin{cases} \cos \text{ dla } j = 1 \\ -\sin \text{ dla } j = 2. \end{cases} \tag{3.7'}$$

Tensory trygonometryczne:

hiperboliczne

$$\begin{aligned} A^{ik}_{mn} &= H^i z^k_H, \\ \bar{A}^{ik}_{mn} &= \bar{H}^i z^k_H; \end{aligned} \tag{3.8}$$

kołowe

$$\begin{aligned} B^{jl}_{mn} &= K^j z^l_K, \\ \bar{B}^{jl}_{mn} &= \bar{K}^j z^l_K. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Całce ogólnej równania (3.1) można nadać kształt

$$\hat{w}^3 = \sum_{m,n=1}^{\infty} C^{mn}_{klij} A^{ik}_{mn} B^{jl}_{mn}. \tag{3.10}$$

Wskaźniki k, l, i, j mają znaczenie tensorowe i przyjmują wartości 1, 2, natomiast m, n są liczbami naturalnymi i oznaczają sumowanie nieskończone. Wielkości C^{mn}_{klij} są stałymi, które mogą być wyznaczone z warunków brzegowych.

W wyrażeniu (3.10) nie znamy wielkości α^k i β^k, wiemy natomiast, że są one związane z m^l, n^l, lub odwrotnie. Możemy je obliczyć w dwojaki sposób: albo rozwiązując odpowiednie równanie algebraiczne ósmego stopnia uzyskane ze spełnienia tożsamościowego równania (3.1) po podstawieniu (3.10), albo też prościej wykorzystując związek siły $\bar{N}^{22}$ z przemieszczeniem w^3. Okazuje się bowiem, że całka ogólna $\overset{\triangle}{N}{}^{22}$ może być obliczona z części jednorodnej równania (3.1), jeśli w miejsce $\hat{w}^3$ podstawimy $\overset{\triangle}{N}{}^{22}$. Możliwość taką uzyskamy, jeśli część jednorodną równania (3.1) odpowiednio zróżniczkujemy i utworzymy sumę, w której wykorzystamy związek (por. [3])

$$\overset{\triangle}{N}{}^{22} = \frac{aEh}{2\alpha^4} g^{ij} W_{,ij}. \tag{3.11}$$

Całka ogólna $\overset{\triangle}{N}{}^{22}$ przyjmie więc postać wyrażenia (3.10) z dokładnością do stałej wyniesionej przed znak sumy.

Suma (2.11) po wykorzystaniu (3.10) przyjmie postać

$$W = \sum_{m,n=1}^{\infty} C^{mn}_{klij} [D^{kl} A^{ik}_{mn} B^{jl}_{mn} + E^{kl} \bar{A}^{ik}_{mn} \bar{B}^{jl}_{mn}]. \tag{3.12}$$

Wielkości D^{kl} i E^{kl} są równe

$$\begin{aligned} D^{kl} &= (z^k_{H,1})^2 - (z^l_{K,1})^2 + \frac{1}{a^2} [(z^k_{H,2})^2 - (z^l_{K,2})^2], \\ E^{kl} &= 2\left[z^k_{H,1} z^l_{K,1} + \frac{1}{a^2} z^k_{H,2} z^l_{K,2}\right]. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Obliczając odpowiednie pochodne z wyrażeń (3.4) i (3.5) możemy napisać

$$(3.14)\quad \begin{aligned} D^{kl} &= \left(\frac{\alpha}{a}\right)^2 [(\alpha^k)^2+(\beta^k)^2-(m^l)^2-(n^l)^2], \\ E^{kl} &= 2\left(\frac{\alpha}{a}\right)^2 [\alpha^k m^l+\beta^k n^l]. \end{aligned}$$

Przejdźmy teraz do obliczenia sumy

$$(3.15)\quad \overline{W} = g^{lj} W_{,ij}.$$

Różniczkując wyrażenie (3.12) względem odpowiednich zmiennych i wykorzystując wielkości (3.13), otrzymamy

$$(3.16)\quad \overline{W} = \sum_{m,n=1}^{\infty} C^{mn}_{klij}\{[(D^{kl})^2-(E^{kl})^2]A^{ik}_{mn}B^{jl}_{mn}+2D^{kl}E^{kl}\bar{A}^{ik}_{mn}\bar{B}^{jl}_{mn}\}.$$

Podstawiając (3.16) do (3.11) oraz doprowadzając do tożsamości z rozwiązaniem w kształcie (3.10) otrzymamy

$$(3.17)\quad \begin{aligned} D^{kl} &= 0, \\ \overset{\Delta}{N}{}^{22} &= -\frac{aEh}{2\alpha^4}\sum_{m,n=1}^{\infty}(E^{kl})^2 C^{mn}_{klij}A^{ik}_{mn}B^{jl}_{mn}, \end{aligned}$$

skąd po uwzględnieniu (3.14) dojdziemy do wyrażenia na siłę $\overset{\Delta}{N}{}^{22}$:

$$(3.18)\quad \overset{\Delta}{N}{}^{22} = -\frac{2Eh}{a^3}\sum_{m,n=1}^{\infty} C^{mn}_{klij}A^{ik}_{mn}B^{jl}_{mn}$$

oraz uzyskamy układ równań, z którego wyznaczymy wielkości α^k i β^k, mianowicie

$$(3.19)\quad \begin{aligned} (\alpha^k)^2+(\beta^k)^2-(m^l)^2-(n^l)^2 &= 0, \\ \alpha^k m^l+\beta^k n^l &= \varepsilon, \end{aligned}$$

gdzie ε może przybierać wartości ± 1.

Przyjmując, dla uproszczenia zapisu w dalszych rozważaniach, $m^l = m$ i $n^l = n$, będziemy mogli rozwiązanie układu równań (3.19) podać w postaci

$$(3.20)\quad \begin{aligned} \alpha^{kl} &= \varepsilon_k\frac{m}{m^2+n^2}-\delta_l n\sqrt{1+\frac{n^2-1}{m^2(m^2+n^2)}}, \\ \beta^{kl} &= \varepsilon_k\frac{n}{m^2+n^2}+\delta_l m\sqrt{1+\frac{n^2-1}{m^2(m^2+n^2)}}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.21)\quad \varepsilon_k = \begin{cases} +1 \text{ dla } k = 1 \\ -1 \text{ dla } k = 2, \end{cases} \qquad \delta_l = \begin{cases} +1 \text{ dla } l = 1 \\ -1 \text{ dla } l = 2. \end{cases}$$

Jak więc widzimy, wielkości tensorowe α^k, β^k dla rozwiązania ogólnego muszą przyjąć wartości tensorów o walencji 2, aby wyczerpać wszystkie możliwe rozwiązania, czyli α^k przejdzie w α^{kl}, a β^k przejdzie w β^{kl}.

W niektórych szczególnych przypadkach, na przykład dla powłoki zamkniętej, uzyskamy prostsze rozwiązanie, jeśli przyjmiemy $\beta^k = 0$. Przyjęcie takie prowadzi do związku między wielkościami m^l i n. Przy tym założeniu rozwiązanie układu równań (3.19) daje

$$\alpha^k = \varepsilon_k n \sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{1+\frac{4}{n^4}}+1\right]},$$

(3.22)

$$m^l = \delta_l n \sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{1+\frac{4}{n^4}}-1\right]}.$$

Przyjmując w wyrażeniach (3.22) $n = 0$, otrzymamy rozwiązanie dla powłoki walcowej obciążonej osiowo-symetrycznie

(3.23)
$$\alpha^k = \varepsilon_k, \qquad m^l = \delta_l.$$

4. Zestawienie wyników

4.1. Rozwiązanie ogólne. Argumenty funkcji trygonometrycznych:

$$z_H^{kl} = \alpha\left[\alpha^{kl}\frac{u^1}{a}+\beta^{kl}u^2\right], \qquad z_K^1 = \alpha\left[m\frac{u^1}{a}+nu^2\right].$$

Tensory trygonometryczne:

$$A_{mn}^{ikl} = H^i z_H^{kl}, \qquad B_{mn}^j = K^j z_k^l,$$

$$\bar{A}_{mn}^{ikl} = \bar{H}^i z_H^{kl}, \qquad \bar{B}_{mn} = \bar{K}^j z_k^l.$$

Całka ogólna

$$\hat{w}^3 = \sum_{m,n=1}^{\infty} C_{klij}^{mn} A_{mn}^{ikl} B_{mn}^j.$$

Całka poszukiwana

$$w^3 = \hat{w}^3 + \bar{w}^3.$$

4.2. Rozwiązanie szczególne — powłoka zamknięta. Argumenty funkcji trygonometrycznych:

$$z_H^k = \alpha\alpha^k\frac{u^1}{a},$$

$$z_K^l = \alpha\left[m^l\frac{u^1}{a}+nu^2\right].$$

Tensory trygonometryczne:

$$A_n^{ik} = H^i z_H^k \qquad B_n^{jl} = K^j z_K^l,$$

$$\bar{A}_n^{ik} = \bar{H}^i z_H^k, \qquad \bar{B}_n^{jl} = \bar{K}^j z_K^l.$$

Całka ogólna

$$\hat{w}^3 = \sum_{n=1}^{\infty} C_{klij}^{n} A_n^{ik} B_n^{jl}.$$

Całka poszukiwana

$$w^3 = \hat{w}^3 + \bar{w}^3.$$

Literatura cytowana w tekście

1. St. BIELAK, *Ogólna teoria powlok prostokreślnych pracujących w stanie zgięciowym*, Zeszyty Naukowe Pol. Śląskiej, Budownictwo, 33 (1973).
2. St. BIELAK, *A general scheme of equations covering rectilinearly drawn shell structures*, Zastosowania Matematyki, **14**, 2 (1974).
3. St. BIELAK, *Solution of a general system of equations of rectilinear evolvable shells in the bending state*, Bull. de l'Acad. Polon. des Sci. Sér. des sci. techn., **22**, 2 (1974).
4. St. BIELAK, *Kształt równania różniczkowego cząstkowego rozwiązującego klasę powlok prostokreślnych rozwijalnych*, Mech. Teor. i Stos., **12**, 3 (1974).

Резюме

ИНТЕГРАЛ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

В работе представлен интеграл дифференциального уравнения восьмого порядка, которое является разрешающим уравнением для цилиндрических оболочек.

Решение получено в виде двух интегралов: частного, отвечающего безмоментному состоянию, и общего, отвечающего моментному состоянию. Найденный интеграл дает возможность решать аналитически цилиндрические оболочки, работающие на изгиб, при любой нагрузке и любых условиях опирания. Частным случаем приведенного решения является расчет цилиндрических оболочек, замкнутых по всему периметру.

Summary

THE INTEGRAL OF A PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF CYLINDRICAL SHELLS

The paper shows the integral of the eighth-order partial differential equation solving the problem of cylindrical shells. The solution obtained is composed of two integrals: the particular integral, equivalent to the momentless work, and the general integral describing the moment work.

The integral derived solves the general equation of cylindrical shells working in moment state under arbitrary loads and clamped at the edges.

The problem of closed cylindrical shells represents a particular case of the solution given above.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 maja 1975 r.