

ELEKTRYCZNY UKŁAD ANALOGOWY
DLA GEOMETRYCZNIE NIELINIOWYCH ZAGADNIEŃ PŁYT O DOWOLNEJ GEOMETRII

MIECZYŚLAW JANOWSKI, HENRYK KOPECKI (RZESZÓW)

Modelowanie elektryczne znalazło szerokie zastosowanie w rozwiązywaniu wielu problemów współczesnej techniki w takich dyscyplinach, jak lotnictwo, okrętownictwo, budowa maszyn, mechanika budowli itp.

Zastosowanie metod analogowych uzasadnione jest szybkością modelowania obiektu fizycznego oraz wystarczającą w obliczeniach inżynierskich dokładnością otrzymanych wyników.

Znane są szerokie zastosowania elektrycznych analizatorów połowych do statycznych obliczeń takich elementów konstrukcji, jak belki, ramy, płyty i powłoki, rozważanych jako zagadnienia liniowe w sensie fizycznym i geometrycznym [1, 2].

Celem obecnej pracy jest przedstawienie koncepcji rozwiązywania geometrycznie nieliniowych zagadnień płyt cienkich o dowolnym kształcie, dowolnie zmiennej grubości i dowolnym obciążeniu, za pomocą elektrycznych analizatorów połowych.

1. Równania podstawowe

Analiza ogólnego przypadku dużych ugięć cienkich płyt o zmiennej grubości z materiału o sprężystości liniowej charakterystyce fizycznej prowadzi do układu dwóch równań podstawowych [3]

$$(1.1) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \\ + \nu \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] = \\ = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + q,$$

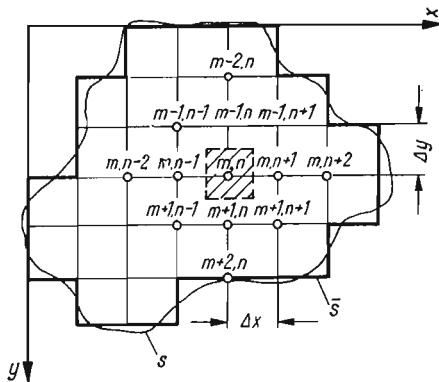
$$(1.2) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{h} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{1}{h} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{h} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) - \\ - \nu \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{h} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{1}{h} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{h} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) \right] = \\ = E \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right];$$

gdzie oznaczono: $w = w(x, y)$ — przemieszczenie prostopadłe do płaszczyzny środkowej płyty, $h = h(x, y)$ — grubość płyty, $D = D(x, y) = \frac{Eh^3(x, y)}{12(1-\nu^2)}$ — sztywność giętną płyty, E — moduł sprężystości podłużnej materiału płyty, ν — współczynnik Poissona dla tego materiału, $q = q(x, y)$ — obciążenie zewnętrzne prostopadłe do elementu płyty, $\Phi = \Phi(x, y)$ — funkcja naprężeń, przez którą wyrażają się składowe stanu naprężenia płaszczyzny środkowej płyty

$$(1.3) \quad \sigma_x = \frac{1}{h(x, y)} \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{1}{h(x, y)} \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2},$$

$$\tau_{xy} = -\frac{1}{h(x, y)} \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Rozwiązania powyższego układu nieliniowych równań różniczkowych w ogólnym przypadku nie są znane. Przybliżone rozwiązania tych problemów uzyskano jedynie dla niektórych przypadków szczególnych [4, 5].



Rys. 1

Rozwiązanie układu równań (1.1), (1.2) będziemy tutaj opierali na metodzie pełnego dyskretnego podziału obszaru płyty. Rzeczywisty kontur płyty S zastępujemy konturem łamanym \bar{S} (rys. 1). Wartość pochodnych w danym punkcie wyrazimy przez wartość odpowiednich ilorazów różnicowych.

Przyjmując dla funkcji dwóch zmiennych $\Psi(x, y)$ identyczny krok $\Delta x = \Delta y = \delta$ otrzymujemy przykładowo następujące zależności różnicowe:

$$(1.4) \quad \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)_{m, n} \approx \frac{\Psi_{m, n+1} - \Psi_{m, n-1}}{2\delta},$$

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)_{m, n} \approx \frac{\Psi_{m+1, n} - \Psi_{m-1, n}}{2\delta},$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right)_{m, n} \approx \frac{\Psi_{m, n+1} - 2\Psi_{m, n} + \Psi_{m, n-1}}{\delta^2},$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \right)_{m, n} \approx \frac{\Psi_{m-1, n-1} - \Psi_{m-1, n+1} - \Psi_{m+1, n-1} + \Psi_{m+1, n+1}}{4\delta^2},$$

$$\left(\frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^3} \right)_{m, n} \approx \frac{\Psi_{m, n+2} - 2\Psi_{m, n+1} + 2\Psi_{m, n-1} - \Psi_{m, n-2}}{2\delta^3} \text{ itd.}$$

Operatory różniczkowe $\nabla^2\mathcal{Y}$ i $\nabla^4\mathcal{Y}$ po uwzględnieniu zależności (1.4) przyjmują znane postacie:

$$(1.5) \quad (\nabla^2\mathcal{Y})_{m,n} = \frac{1}{\delta^2} (\mathcal{Y}_{m+1,n} + \mathcal{Y}_{m-1,n} + \mathcal{Y}_{m,n+1} + \mathcal{Y}_{m,n-1} - 4\mathcal{Y}_{m,n}),$$

$$(1.6) \quad (\nabla^4\mathcal{Y})_{m,n} = \frac{1}{\delta^4} [20\mathcal{Y}_{m,n} - 8(\mathcal{Y}_{m+1,n} + \mathcal{Y}_{m-1,n} + \mathcal{Y}_{m,n+1} + \mathcal{Y}_{m,n-1}) + \\ + 2(\mathcal{Y}_{m+1,n+1} + \mathcal{Y}_{m+1,n-1} + \mathcal{Y}_{m-1,n+1} + \mathcal{Y}_{m-1,n-1}) + \\ + \mathcal{Y}_{m+2,n} + \mathcal{Y}_{m-2,n} + \mathcal{Y}_{m,n+2} + \mathcal{Y}_{m,n-2}].$$

Wskaźniki m, n oznaczają tutaj współrzędne punktu należącego do obszaru płyty (rys. 1). Uwzględniając związki (1.4), (1.5), (1.6) sprowadzamy układ równań różniczkowych (1.1), (1.2) do układu równań różnicowych:

$$(1.7) \quad 20a_{m,n}w_{m,n} - 8(b_{m,n}w_{m+1,n} + c_{m,n}w_{m-1,n} + d_{m,n}w_{m,n+1} + e_{m,n}w_{m,n-1}) + \\ + 2(f_{m,n}w_{m+1,n+1} + g_{m,n}w_{m+1,n-1} + j_{m,n}w_{m-1,n+1} + k_{m,n}w_{m-1,n-1}) + \\ + l_{m,n}w_{m+2,n} + p_{m,n}w_{m-2,n} + r_{m,n}w_{m,n+2} + s_{m,n}w_{m,n-2} = \\ = \frac{1}{D} [(\Phi_{m+1,n} - 2\Phi_{m,n} + \Phi_{m-1,n})(w_{m,n+1} - 2w_{m,n} + w_{m,n-1}) - \\ - \frac{1}{8}(\Phi_{m-1,n-1} - \Phi_{m-1,n+1} - \Phi_{m+1,n-1} + \Phi_{m+1,n+1})(w_{m-1,n-1} - \\ - w_{m-1,n+1} - w_{m+1,n-1} + w_{m+1,n+1}) + (\Phi_{m,n+1} - 2\Phi_{m,n} + \Phi_{m,n-1}) \times \\ \times (w_{m+1,n} - 2w_{m,n} + w_{m-1,n})] + \frac{q_{m,n}\delta^4}{D},$$

$$(1.8) \quad 20\bar{a}_{m,n}\bar{\Phi}_{m,n} - 8(\bar{b}_{m,n}\bar{\Phi}_{m+1,n} + \bar{c}_{m,n}\bar{\Phi}_{m-1,n} + \bar{d}_{m,n}\bar{\Phi}_{m,n+1} + \\ + \bar{e}_{m,n}\bar{\Phi}_{m,n-1}) + 2(\bar{f}_{m,n}\bar{\Phi}_{m+1,n+1} + \bar{g}_{m,n}\bar{\Phi}_{m+1,n-1} + \bar{j}_{m,n}\bar{\Phi}_{m-1,n+1} + \\ + \bar{k}_{m,n}\bar{\Phi}_{m-1,n-1}) + \bar{l}_{m,n}\bar{\Phi}_{m+2,n} + \bar{p}_{m,n}\bar{\Phi}_{m-2,n} + \bar{r}_{m,n}\bar{\Phi}_{m,n+2} + \\ + \bar{s}_{m,n}\bar{\Phi}_{m,n-2} = Eh \left[\frac{1}{16} (w_{m-1,n-1} - w_{m-1,n+1} - w_{m+1,n-1} + \\ + w_{m+1,n+1})^2 - (w_{m,n+1} - 2w_{m,n} + w_{m,n-1})(w_{m+1,n} - 2w_{m,n} + w_{m-1,n}) \right];$$

gdzie $q_{m,n}$ oznacza obciążenie zewnętrzne prostopadłe do elementu płyty działające na pole o wymiarach $\Delta x \cdot \Delta y = \delta^2$ należące do węzła m, n ,

$$(1.9) \quad a_{m,n} = 1 - \frac{1+\nu}{10} \frac{D_{xx} + D_{yy}}{D} \delta^2, \quad \bar{a}_{m,n} = 1 - \frac{1+\nu}{10} \frac{H_{xx} + H_{yy}}{H} \delta^2, \\ b_{m,n} = 1 + \frac{D_y}{D} \frac{\delta}{2} - \frac{1}{8} \frac{D_{yy} + \nu D_{xx}}{D} \delta^2, \quad \bar{b}_{m,n} = 1 + \frac{H_y}{H} \frac{\delta}{2} - \frac{1}{8} \frac{H_{yy} + \nu H_{xx}}{H} \delta^2, \\ c_{m,n} = 1 - \frac{D_y}{D} \frac{\delta}{2} - \frac{1}{8} \frac{D_{yy} + \nu D_{xx}}{D} \delta^2, \quad \bar{c}_{m,n} = 1 - \frac{H_y}{H} \frac{\delta}{2} - \frac{1}{8} \frac{H_{yy} + \nu H_{xx}}{H} \delta^2, \\ d_{m,n} = 1 + \frac{D_x}{D} \frac{\delta}{2} - \frac{1}{8} \frac{D_{xx} + \nu D_{yy}}{D} \delta^2, \quad \bar{d}_{m,n} = 1 + \frac{H_x}{H} \frac{\delta}{2} - \frac{1}{8} \frac{H_{xx} + \nu H_{yy}}{H} \delta^2,$$

$$\begin{aligned}
 e_{m,n} &= 1 - \frac{D_x}{D} \frac{\delta}{2} - \frac{1}{8} \frac{D_x + \nu D_{yy}}{D} \delta^2, & \bar{e}_{m,n} &= 1 - \frac{H_x}{H} \frac{\delta}{2} - \frac{1}{8} \frac{H_{xx} + \nu H_{yy}}{H} \delta^2, \\
 f_{m,n} &= 1 + \frac{1}{2} \frac{D_x + D_y}{D} \delta + \frac{1-\nu}{4} \frac{D_{xy}}{D} \delta^2, & \bar{f}_{m,n} &= 1 + \frac{1}{2} \frac{H_x + H_y}{H} \delta + \frac{1-\nu}{4} \frac{H_{xy}}{H} \delta^2, \\
 g_{m,n} &= 1 - \frac{1}{2} \frac{D_x - D_y}{D} \delta - \frac{1-\nu}{4} \frac{D_{xy}}{D} \delta^2, & \bar{g}_{m,n} &= 1 - \frac{1}{2} \frac{H_x - H_y}{H} \delta - \frac{1-\nu}{4} \frac{H_{xy}}{H} \delta^2, \\
 j_{m,n} &= 1 + \frac{1}{2} \frac{D_x - D_y}{D} \delta - \frac{1-\nu}{4} \frac{D_{xy}}{D} \delta^2, & \bar{j}_{m,n} &= 1 + \frac{1}{2} \frac{H_x - H_y}{H} \delta - \frac{1-\nu}{4} \frac{H_{xy}}{H} \delta^2, \\
 (1.9) \text{ [c.d.]} \quad k_{m,n} &= 1 - \frac{1}{2} \frac{D_x + D_y}{D} \delta + \frac{1-\nu}{4} \frac{D_{xy}}{D} \delta^2, & \bar{k}_{m,n} &= 1 - \frac{1}{2} \frac{H_x + H_y}{H} \delta + \frac{1-\nu}{4} \frac{H_{xy}}{H} \delta^2, \\
 l_{m,n} &= 1 + \frac{D_y}{D} \delta, & \bar{l}_{m,n} &= 1 + \frac{H_y}{H} \delta, \\
 p_{m,n} &= 1 - \frac{D_y}{D} \delta, & \bar{p}_{m,n} &= 1 - \frac{H_y}{H} \delta, \\
 r_{m,n} &= 1 + \frac{D_x}{D} \delta, & \bar{r}_{m,n} &= 1 + \frac{H_x}{H} \delta, \\
 s_{m,n} &= 1 - \frac{D_x}{D} \delta, & \bar{s}_{m,n} &= 1 - \frac{H_x}{H} \delta;
 \end{aligned}$$

przy czym

$$\begin{aligned}
 D_x &= \frac{\partial D(x, y)}{\partial x}, & D_y &= \frac{\partial D(x, y)}{\partial y}, & D_{xy} &= \frac{\partial^2 D(x, y)}{\partial x \partial y}, \\
 D_{xx} &= \frac{\partial^2 D(x, y)}{\partial x^2}, & D_{yy} &= \frac{\partial^2 D(x, y)}{\partial y^2}, \\
 (1.10) \quad H &= H(x, y) = \frac{1}{h}(x, y), \\
 H_x &= \frac{\partial H(x, y)}{\partial x}, & H_y &= \frac{\partial H(x, y)}{\partial y}, & H_{xy} &= \frac{\partial^2 H(x, y)}{\partial x \partial y}, \\
 H_{xx} &= \frac{\partial^2 H(x, y)}{\partial x^2}, & H_{yy} &= \frac{\partial^2 H(x, y)}{\partial y^2}
 \end{aligned}$$

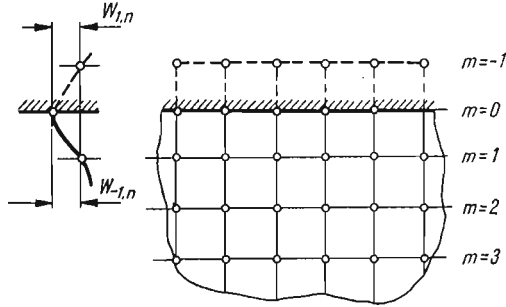
oznaczają odpowiednie pochodne określone dla punktu m, n .

Powyższy układ równań różnicowych (1.7), (1.8) wraz z odpowiednimi warunkami brzegowymi formułuje w zapisie różnicowym problem geometrycznie nieliniowej cienkiej płyty o dowolnej geometrii (dowolny kontur i dowolnie zmienna grubość) oraz dowolnym rozkładzie obciążenia zewnętrznego.

Rozważymy kilka typów warunków brzegowych [4] przyjmując, że krawędź płyty jest równoległa do jednej z osi współrzędnych x albo y oraz punkty węzłowe znajdują się na krawędzi.

a) *Krawędź płyty* $y = 0$ utwierdzona na podporze nieodkształcalnej (rys. 2).
Warunki geometryczne:

$$(1.11) \quad w(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y}(x, 0) = 0$$



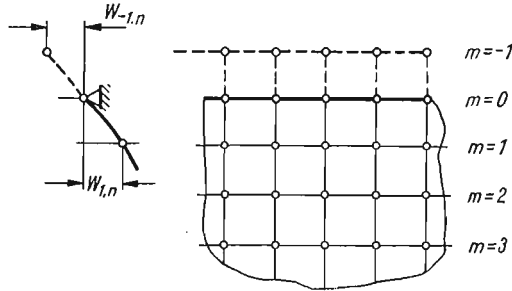
Rys. 2

w zapisie dyskretnym wyrażają się następująco:

$$(1.12) \quad w_{0,n} = 0, \quad w_{1,n} = w_{-1,n}$$

b) *Krawędź płyty* $y = 0$ przegubowo podparta (rys. 3).
Warunek geometryczny oraz statyczny:

$$(1.13) \quad w(x, 0) = 0, \quad M_y(x, 0) = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, 0) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, 0) \right] = 0$$



Rys. 3

w zapisie dyskretnym wyrażają się następująco:

$$(1.14) \quad w_{0,n} = 0, \quad w_{1,n} = -w_{-1,n}$$

c) *Krawędź swobodna*.
Warunki statyczne:

$$(1.15) \quad R_y(x, 0) = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}(x, 0) + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}(x, 0) \right] = 0,$$

$$M_y(x, 0) = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, 0) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, 0) \right] = 0$$

w zapisie dyskretnym wyrażają się następująco:

$$(1.16) \quad w_{2,n} - w_{0,n-2} + 2(3-\nu)(w_{-1,n} - w_{1,n}) + (2-\nu)(w_{1,n+1} - w_{-1,n+1} + w_{1,n-1} - w_{-1,n-1}) = 0,$$

$$w_{1,n} + w_{-1,n} - 2(1+\nu)w_{0,n} + \nu(w_{0,n+1} + w_{0,n-1}) = 0.$$

d) Punkty krawędzi nieobciążonej $y = 0$ mają swobodę przemieszczenia wzdłuż osi y .
Warunek

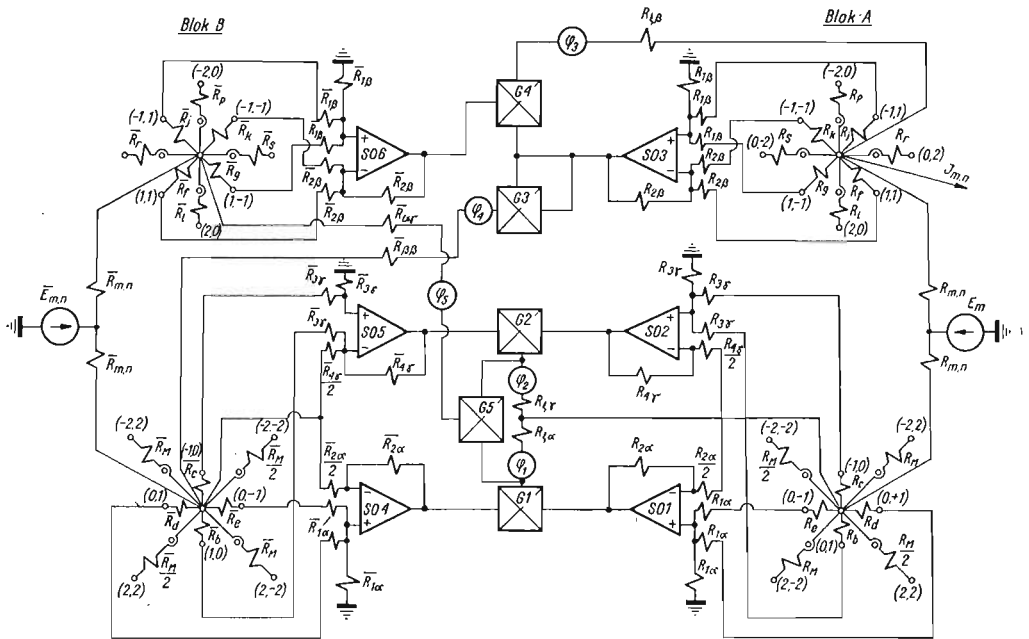
$$(1.17) \quad \sigma_y(x, 0) = \frac{\partial^2 \Phi(x, 0)}{\partial x^2} = 0$$

prowadzi do zależności różnicowej

$$(1.18) \quad \Phi_{0,n+1} - 2\Phi_{0,n} + \Phi_{0,n-1} = 0.$$

2. Model elektryczny układu równań różnicowych

Opierając się na podstawowych prawach elektrotechniki przedstawimy schemat elektryczny modelujący układ równań różnicowych (1.7), (1.8).



Rys. 4

Układ analogowy (połączenia dla jednego węzła wewnętrznego pokazane są na rys. 4) budujemy za pomocą czterech siatek elektrycznych. Prócz typowych elementów, jakimi są oporniki, wykorzystamy tutaj również sumująco-odejmujące wzmacniacze operacyjne (SO1 ÷ SO6) oraz generatory funkcji mnożących dwa sygnały napięciowe (G1 ÷ G5).

Na schemacie połączeń elektrycznych wyróżnić możemy dwa zasadnicze bloki. Blok A modeluje człony układu równań różnicowych (1.7), (1.8) zawierające ugięcie w . Wartość ugięcia w węzłach o współrzędnych m, n jest proporcjonalna do potencjału elektrycznego

w odpowiednich węzłach siatek bloku A (potencjały w węzłach obu siatek tego bloku są sobie równe). Blok B modeluje z kolei te człony układu równań różnicowych (1.7) (1.8), w których występuje funkcja naprężeń Φ . Wartości potencjałów w poszczególnych węzłach siatek bloku B określają wartości funkcji naprężeń w odpowiednich węzłach płyty (tutaj również potencjały w odpowiadających sobie węzłach obu siatek są identyczne).

Aby przedstawiony układ elektryczny określał faktycznie szukane wielkości mechaniczne wartości poszczególnych oporności muszą być równe niżej podanym. Wartości te określimy używając oporności modułowych R_M i \bar{R}_M stanowiących rezystancje odniesienia:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} R_b &= \frac{R_M}{8 \left(\frac{23}{24} + \frac{D_y}{2D} \delta - \frac{1}{8} \frac{D_{yy} + \nu D_{xx}}{D} \delta^2 \right)}, & \bar{R}_b &= \frac{\bar{R}_M}{8 \left(\frac{23}{24} + \frac{H_y}{2H} \delta - \frac{1}{8} \frac{H_{yy} + \nu H_{xx}}{H} \delta^2 \right)}, \\ R_c &= \frac{R_M}{8 \left(\frac{23}{24} - \frac{D_y}{2D} \delta - \frac{1}{8} \frac{D_{yy} + \nu D_{xx}}{D} \delta^2 \right)}, & \bar{R}_c &= \frac{\bar{R}_M}{8 \left(\frac{23}{24} - \frac{H_y}{2H} \delta - \frac{1}{8} \frac{H_{yy} + \nu H_{xx}}{H} \delta^2 \right)}, \\ R_d &= \frac{R_M}{8 \left(\frac{23}{24} + \frac{D_x}{2D} \delta - \frac{1}{8} \frac{D_{yy} + \nu D_{xx}}{D} \delta^2 \right)}, & \bar{R}_d &= \frac{\bar{R}_M}{8 \left(\frac{23}{24} + \frac{H_x}{2H} \delta - \frac{1}{8} \frac{H_{yy} + \nu H_{xx}}{H} \delta^2 \right)}, \\ R_e &= \frac{R_M}{8 \left(\frac{23}{24} - \frac{D_x}{2D} \delta - \frac{1}{8} \frac{D_{yy} + \nu D_{xx}}{D} \delta^2 \right)}, & \bar{R}_e &= \frac{\bar{R}_M}{8 \left(\frac{23}{24} - \frac{H_x}{2H} \delta - \frac{1}{8} \frac{H_{yy} + \nu H_{xx}}{H} \delta^2 \right)}, \\ R_f &= \frac{R_M}{2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{D_x + D_y}{D} \delta + \frac{1-\nu}{4} \frac{D_{xy}}{D} \delta^2 \right)}, & \bar{R}_f &= \frac{\bar{R}_M}{2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{H_x + H_y}{H} \delta + \frac{1-\nu}{4} \frac{H_{xy}}{H} \delta^2 \right)}, \\ R_g &= \frac{R_M}{2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{D_x - D_y}{D} \delta - \frac{1-\nu}{4} \frac{D_{xy}}{D} \delta^2 \right)}, & \bar{R}_g &= \frac{\bar{R}_M}{2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{H_x - H_y}{H} \delta - \frac{1-\nu}{4} \frac{H_{xy}}{H} \delta^2 \right)}, \\ R_j &= \frac{R_M}{2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{D_x + D_y}{D} \delta - \frac{1-\nu}{4} \frac{D_{xy}}{D} \delta^2 \right)}, & \bar{R}_j &= \frac{R_M}{2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{H_x + H_y}{H} \delta - \frac{1-\nu}{4} \frac{H_{xy}}{H} \delta^2 \right)}, \\ R_k &= \frac{R_M}{2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{D_x + D_y}{D} \delta + \frac{1-\nu}{4} \frac{D_{xy}}{D} \delta^2 \right)}, & \bar{R}_k &= \frac{\bar{R}_M}{2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{H_x + H_y}{H} \delta + \frac{1-\nu}{4} \frac{H_{xy}}{H} \delta^2 \right)}, \\ R_l &= \frac{R_M}{2,5 + \frac{D_y}{D} \delta}, & \bar{R}_l &= \frac{\bar{R}_M}{2,5 + \frac{H_y}{H} \delta}, \\ R_p &= \frac{R_M}{2,5 - \frac{D_y}{D} \delta}, & \bar{R}_p &= \frac{\bar{R}_M}{2,5 - \frac{H_y}{H} \delta}, \end{aligned}$$

$$R_r = \frac{R_M}{2,5 + \frac{D_x}{D} \delta},$$

$$R_s = \frac{R_M}{2,5 - \frac{D_x}{D} \delta},$$

$$R_{\xi\alpha} = R_{\xi\gamma} = R_M, \quad R_{\xi\beta} = \frac{R_M}{8},$$

$$(2.1) \quad R_{1\alpha(m, n+1)} = R_{1\alpha(m, n-1)} = R_{3\gamma(m+1, n)} = \\ (cd) \quad = R_{3\gamma(m-1, n)} = \frac{2}{3} R_M,$$

$$R_{2\alpha} = R_{4\gamma} = R_M,$$

$$R_{m+2, n+2} = R_{m-2, n-2} = \frac{1}{2} R_M,$$

$$R_{m+2, n-2} = R_{m-2, n+2} = R_M,$$

$$\bar{R}_r = \frac{\bar{R}_M}{2,5 + \frac{H_x}{H} \delta},$$

$$\bar{R}_s = \frac{\bar{R}_M}{2,5 - \frac{H_x}{H} \delta},$$

$$\bar{R}_{\beta\beta} = \bar{R}_M, \quad \bar{R}_{\alpha\gamma} = \frac{\bar{R}_M}{7},$$

$$\bar{R}_{2\alpha} = \bar{R}_{4\gamma} = \bar{R}_M,$$

$$\bar{R}_{1\alpha(m, n+1)} = \bar{R}_{1\alpha(m, n-1)} = \bar{R}_{3\gamma(m+1, n)} = \\ = \bar{R}_{3\gamma(m-1, n)} = \frac{2}{3} \bar{R}_M,$$

$$\bar{R}_{m+2, n+2} = \bar{R}_{m-2, n-2} = \frac{1}{2} \bar{R}_M,$$

$$\bar{R}_{m+2, n-2} = \bar{R}_{m-2, n+2} = \bar{R}_M.$$

Wartość oporów $R_{m,n}$ i $\bar{R}_{m,n}$ oraz sił elektromotorycznych $E_{m,n}$ i $\bar{E}_{m,n}$ muszą być tak dobrane, aby zapewnić zrównanie potencjałów w odpowiadających sobie węzłach każdej z siatek obu bloków. Symbolami φ_i oznaczono potencjometry liniowe realizujące mnożenie przez stałe współczynniki, które odpowiednio wynoszą

$$(2.2) \quad \varphi_1 = \frac{1}{D}, \quad \varphi_2 = \frac{1}{D}, \quad \varphi_3 = \frac{1}{64D}, \quad \varphi_4 = \frac{Eh}{16}, \quad \varphi_5 = \frac{Eh}{7}.$$

Na schemacie przyjęto oznaczenie węzłów w formie uproszczonej; tak np. zamiast oznaczenia: $m-2, n+2$ przyjęto oznaczenie: $-2, +2$. Aby zachować przejrzystość rysunku w siatkach obu bloków A i B nie podajemy połączeń ze wzmacniaczami operacyjnymi należącymi do sąsiednich węzłów.

Prąd zasilający siatkę górną bloku A modeluje obciążenie w danym węzle, przy czym jego wartość jest równa

$$(2.3) \quad I_{m,n} = \frac{q_{m,n} \delta^4}{D} \frac{k_u}{R_M},$$

gdzie k_u jest współczynnikiem przeniesienia modelowego potencjału w bloku A .

Ugięcia w poszczególnych węzłach są równe

$$(2.4) \quad w_{m,n} = \frac{U_{m,n}}{k_u},$$

zaś funkcja naprężeń wynosi

$$(2.5) \quad \Phi_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{k_v},$$

gdzie $U_{m,n}$ potencjał w węźle m, n siatek bloku A ,

$V_{m,n}$ potencjał w węźle m, n siatek bloku B ,

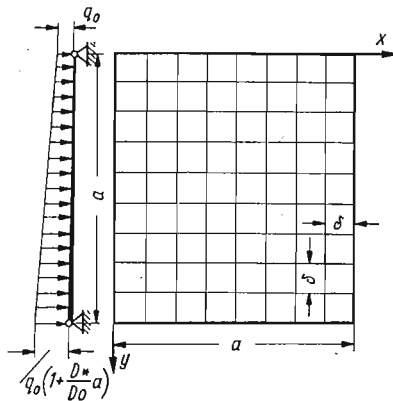
k_v współczynnik przeniesienia modelowego potencjału w bloku B .

Przechodząc do modelowania warunków brzegowych musimy mieć na uwadze fakt, że dla węzłów położonych na krawędzi płyty i w jej pobliżu układ elektryczny będzie inny nieco niż dla węzłów wewnętrznych. Wynika to z konieczności spełnienia przez przemieszczenia w określone potencjałami U oraz funkcję naprężeń Φ określoną potencjałem V , nie tylko zależności (1.7) i (1.8), ale także odpowiednich warunków brzegowych np. (1.12), (1.14), (1.16), (1.18).

Zasada określania wartości oporów w węzłach brzegowych z uwzględnieniem między innymi załamań konturu przedstawiona jest szczegółowo dla płyt o stałej sztywności geometrycznie i fizycznie liniowych w pracy [6]. Można ją uogólnić na rozważaną przez nas płytę geometrycznie nieliniową.¹⁾

3. Model układu elektrycznego dla płyty geometrycznie liniowej

W szczególnym przypadku, gdy rozważania teoretyczne ograniczymy do problemu geometrycznie liniowego, przedstawiony schemat elektryczny upraszcza się w sposób zasadniczy. Ze względu na to, że układ podstawowych równań różniczkowych, a zatem i różnicowych redukuje się do jednego równania liniowego, w schemacie elektrycznym nie pojawiają się wzmacniacze operacyjne oraz cały blok B modelujące człony nieliniowe.



Rys. 5

Dla ilustracji przedstawimy przykład modelowania płyty prostokątnej o sztywności liniowo zmiennej w kierunku równoległym do jednego z jej boków, obciążonej proporcjonalnie do sztywności i przegubowo podpartej na brzegach (rys. 5).

¹⁾ Traktując model analogowy warunków brzegowych jako przypadek szczególny ogólnego schematu elektrycznego, ograniczamy się tutaj jedynie do omówienia sposobu podejścia do modelowania warunków brzegowych dla płyt geometrycznie nieliniowych.

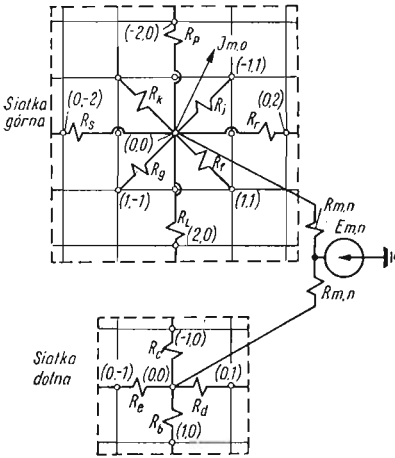
Ograniczając się jedynie do małych ugięć takiej płyty możemy układ równań (1.1), (1.2) sprowadzić do postaci

$$(3.1) \quad (D_0 + D_{*y})\nabla^4 w + 2D_{*y} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w = q_0 \left(1 + \frac{D_{*y}}{D_0} y\right).$$

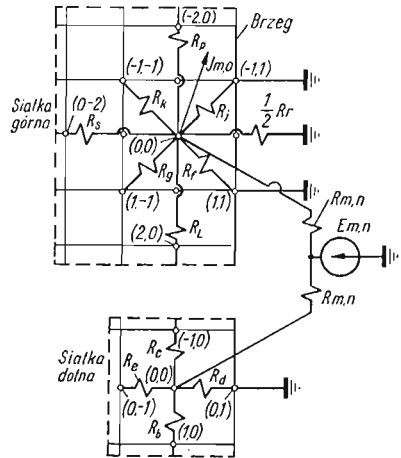
Przy czym oznaczono:

$$D = D_0 \left(1 + \frac{D_{*y}}{D_0} y\right) \text{ sztywność giętna płyty,}$$

$$q = q_0 \left(1 + \frac{D_{*y}}{D_0} y\right) \text{ obciążenie zewnętrzne, normalne do elementu płyty.}$$



Rys. 6



Rys. 7

Równanie różnicowe (1.7) sprowadza się w tym przypadku do zależności:

$$(3.2) \quad 20w_{m,n} - (8w_{m,n-1} + w_{m,n+1}) - 4\left(2 - \frac{D_*\delta}{D_m}\right)w_{m-1,n} - 4\left(2 + \frac{D_*\delta}{D_m}\right)w_{m+1,n} + \\ + \left(2 - \frac{D_*\delta}{D_m}\right)(w_{m-1,n-1} + w_{m-1,n+1}) + \left(2 + \frac{D_*\delta}{D_m}\right)(w_{m+1,n-1} + w_{m+1,n+1}) + \\ + w_{m,n-2} + w_{m,n+2} + \left(1 - \frac{D_*\delta}{D_m}\right)w_{m-2,n} + \left(1 + \frac{D_*\delta}{D_m}\right)w_{m+2,n} = \frac{q_0}{D_0} \delta^4,$$

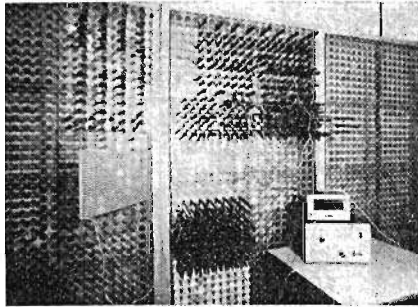
przy czym D_m oznacza tu sztywność giętną płyty w węzłach wiersza m .

Układ połączeń elektrycznych dla jednego węzła wewnętrznego utworzony jest przez dwie siatki (rys. 6).

Warunki brzegowe, które dla podanego przykładu opisane są zależnościami (1.13) i (1.14), modelują się przez układ połączeń przedstawiony na rys. 7. Wartości oporów spełniać muszą teraz następujące związki:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} R_b &= \frac{R_M}{4 \left(2 + \frac{D_* \delta}{D_m} \right)}, & R_c &= \frac{R_M}{4 \left(2 - \frac{D_* \delta}{D_m} \right)}, & R_d &= R_e = \frac{R_M}{8}, \\ R_f = R_g &= \frac{R_M}{2 + \frac{D_* \delta}{D_m}}, & R_j = R_k &= \frac{R_M}{2 - \frac{D_* \delta}{D_m}}, \\ R_l &= \frac{R_M}{1 + \frac{D_* \delta}{D_m}}, & R_p &= \frac{R_M}{1 - \frac{D_* \delta}{D_m}}, & R_r &= R_s = R_M. \end{aligned}$$

Opór $R_{m,n}$ oraz siła elektromotoryczna $E_{m,n}$ zapewniają równość potencjałów w odpowiadających sobie węzłach obu siatek. Wykorzystując wyżej przytoczone rozważania zbudowano



Rys. 8

wano na analizatorze polowym układ elektryczny (rys. 8), modelujący płytę kwadratową dla następujących danych liczbowych:

$a = 0,9$ m długość boku płyty,

$h_0 = 0,01$ m grubość płyty na krawędzi $y = 0$,

$q_0 = 0,25$ MN/m² obciążenie zewnętrzne na krawędzi $y = 0$,

$$\frac{D_* a}{D_0} = 4,2,$$

$E = 2 \cdot 10^5$ MN/m² moduł spr. podł. mat. płyty,

$\nu = 0,3$ liczba Poissona mat. płyty,

$\delta = 0,1$ m krok siatki.

Sztywność D_0 na krawędzi $y = 0$ wynosi

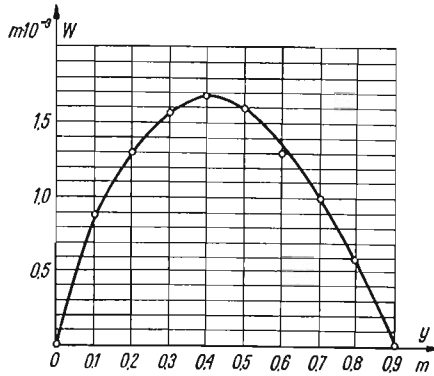
$$D_0 = \frac{E h_0^3}{12(1 - \nu^2)} = 0,0183 \text{ MN/m.}$$

Tablica 1

Wiersz „m”	Przewodność oporników								Prąd zasil. I_m mA	Wartości potencjałów w poszczególnych węzłach							
										kolumna „n”							
	$\frac{1}{R_b}$	$\frac{1}{R_c}$	$\frac{1}{R_d} = \frac{1}{R_e}$	$\frac{1}{R_f} = \frac{1}{R_g}$	$\frac{1}{R_j} = \frac{1}{R_k}$	$\frac{1}{R_l}$	$\frac{1}{R_p}$	$\frac{1}{R_r} = \frac{1}{R_s}$		1	2	3	4	5	6	7	8
μS	μS	μS	μS	μS	μS	μS	μS	V	V	V	V	V	V	V	V		
1	9270	-6730	8000	2320	1680	1320	680	1000	1,50	0,483	0,768	0,902	0,975	0,976	0,905	0,769	0,483
2	11820	9270	10560	2960	2320	1640	1000	1320	1,98	0,791	1,150	1,383	1,438	1,440	1,385	1,150	0,792
3	14370	11820	13120	3590	2960	1960	1320	1640	2,46	0,823	1,262	1,523	1,698	1,700	1,528	1,264	0,830
4	16950	14370	15680	4240	3590	2240	1640	1960	2,94	0,867	1,315	1,628	1,854	1,856	1,630	1,317	0,870
5	19520	16950	18240	4880	4240	2600	1960	2280	3,42	0,805	1,247	1,530	1,758	1,757	1,249	1,250	0,809
6	22050	19520	20800	5510	4880	2920	2280	2600	3,90	0,702	1,070	1,320	1,404	1,404	1,318	1,064	0,704
7	24600	22050	23360	6150	5510	3240	2600	2920	4,38	0,529	0,856	1,972	1,112	1,110	0,972	0,858	0,528
8	27160	24600	25920	6770	6150	3560	2920	3240	4,68	0,353	0,473	0,581	0,640	0,638	0,586	0,470	0,352

Wartości rezystorów (określone przez przewodności), prądów zasilających oraz potencjały (odniesione do masy) w poszczególnych węzłach podane są w tablicy I.

Obliczony dla naszego przykładu współczynnik przeniesienia modelowego (2.3) wynosi $k_u = 1100 \text{ V/m}$.



Rys. 9

Ugięcie płyty $w_{m,n}$ (2.4) wzdłuż prostej $x = a/2$ przedstawiono na rys. 9.

4. Wnioski

W pracy wykazano skuteczność metody elektrycznego modelowania analogowego w rozwiązywaniu zagadnień dużych ugięć płyt cienkich. Przedstawiony sposób rozwiązania pozwala na szybką identyfikację pola naprężeń oraz przemieszczeń dla płyt o dowolnej geometrii (np. płyty z otworami, zmiennej grubości itp.).

Porównanie ilościowych i jakościowych rezultatów otrzymanych w rozwiązanych przykładzie z' wynikami rozwiązań analitycznych [7] potwierdza zalety przyjętej metody w zastosowaniu do podobnych problemów.

Praktyczna realizacja układu elektrycznego dla zagadnienia nieliniowego będzie celem dalszych prac.

Literatura cytowana w tekście

1. A. LISOWSKI, *Technika analogii elektrycznych w budownictwie*, Arkady, Warszawa 1969.
2. Математическое моделирование и электрические цепи, Изд. АН УССР, Киев 1964.
3. Y. FUNG, W. WITTRICK, *The anticlastic curvature of a strip*, Jour. Appl. Mech., 4 (1954).
4. А. С. ВОЛЬМИР, *Гибкие пластинки и оболочки*, Гостехиздат, Москва 1956.
5. М. С. КОРНИШИН, *Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения*, Наука, Москва 1964.
6. Г. Е. ПУХОВ, В. В. ВАСИЛЬЕВ, А. Е. СТЕПАНОВ, О. Н. ТОКАРЕВА, *Электрическое моделирование задач строительной механики*, Изд. АН УССР, Киев 1963.
7. S. TIMOSHENKO, S. WOJNOWSKY-KRIEGER, *Teoria płyt i powłok*, Arkady, 1962.

Резюме

ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ АНАЛОГОВАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ
НЕЛИНЕЙНЫХ ПЛАСТИНОК ПРОИЗВОЛЬНОГО КОНТУРА

В работе рассматриваются задачи геометрически нелинейных тонких пластинок произвольного контура, для которых дано решение, основанное на электрическом моделировании.

Система разрешающих уравнений представлена в конечно-разностном виде и разработана для нее электрическая модель. Как частный случай, представлена система уравнений и соответствующая ей электрическая схема для линейной задачи. Для такого случая построена аналоговая электрическая модель, при учете линейно изменяющейся жесткости и линейно переменной нагрузки (нормальное давление). Решен численный пример на полевом аналоговом анализаторе типа «Р».

Summary

THE ELECTRIC ANALOG SYSTEM FOR GEOMETRICALLY NONLINEAR PLATES OF
ARBITRARY CONTOUR

In the paper is considered a problem of geometrically nonlinear thin plates of arbitrary contour line. The problem is solved by the electric model method by using the system of difference equations.

A particular case is considered as this system and the appropriate electric diagram is applied to the geometrically linear problem. The electric analog is prepared for this case by assuming linearly variables force (normal pressure) and rigidity. The numerical example is solved by the field analyzer of the type «R». The results of the analysis are discussed.

INSTYTUT LOTNICTWA
POLITECHNIKA RZESZOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 kwietnia 1975 r.