MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3, 14 (1976)

NIELINIOWE DRGANIA ELASTYCZNIE POSADOWIONYCH SILNIKÓW TŁOKOWYCH PRZY SZEROKOPASMOWYCH WYMUSZENIACH STOCHASTYCZNYCH

JANUSZ KOLENDA (GDAŃSK)

1. Wstęp

Rozpatrywane w pracy [1] równania ruchu, opisujące nieliniowe drgania elastycznie posadowionych silników tłokowych z uwzględnieniem zmienności prędkości kątowej, oparte są na zdeterminowanym modelu mechanicznym, stanowiącym pewną idealizację realnego układu drgającego. W rzeczywistych warunkach eksploatacyjnych mogą występować zewnętrzne wymuszenia stochastyczne, jak również parametry układu mogą mieć charakter losowy. W szczególności probabilistycznego ujęcia wymagają geometryczne i fizyczne parametry układu oraz wymuszenia, zakłócenia, obciążenia, uszkodzenia i procesy zużycia [2]. W odniesieniu do elastycznie posadowionych silników tłokowych istotne mogą okazać się m.in. losowe zmiany warunków spalania w cylindrach, tarcia, smarowania, chłodzenia i zużycia, momentu oporowego odbiornika mocy, charakterystyk podkładek elastycznych, a także przypadkowe ruchy fundamentów silników zainstalowanych na środkach transportu.

Uwzględnienie procesów stochastycznych wymaga traktowania drgań silników jako losowej funkcji czasu, której charakterystyki należy wyznaczyć na podstawie znanych charakterystyk statystycznych procesów wejściowych. Należałoby przy tym brać pod uwagę łączny probabilistyczny opis warunków zewnętrznych, procesu eksploatacji, parametrów konstrukcyjnych i wytrzymałościowych, warunków spalania, tarcia etc., gdyż w ogólnym przypadku nie są one niezależne. Na obecnym etapie badań i rozwoju teorii tłokowych silników spalinowych nie dysponuje się takim opisem. Poniżej ograniczono się do rozpatrzenia drgań elastycznie posadowionych silników tłokowych przy losowych wymuszeniach, stanowiących szerokopasmowe procesy stochastyczne.

2. Równania ruchu

Wykorzystując równania (4.1) wyprowadzone w pracy [1], opisujące drgania wielocylindrowych silników rzędowych o sześciu stopniach swobody w stanach ustalonych i bliskich ustalonym, można przy wymuszeniach stochastycznych napisać równania ruchu w ogólnej postaci

$$
\begin{aligned}
m\ddot{u}+c_x u-U_y\gamma+U_z\beta &= \varepsilon[P_1+\delta_1(t)],\\
m\ddot{v}+c_y v-V_z\alpha+V_x\gamma &= \varepsilon[P_2+\delta_3(t)],\\
m\ddot{w}+c_z w-W_x\beta+W_y\alpha &= \varepsilon[P_3+\delta_3(t)],\\
I_x\ddot{\alpha}+c_{xx}\alpha-V_z v+W_y w-c_{zx}\gamma-c_{xy}\beta-crT(\omega_0) &= \varepsilon[P_4+\delta_4(t)],\\
I_y\ddot{\beta}+c_{yy}\beta-W_x w+U_z u-c_{xy}\alpha-c_{yz}\gamma &= \varepsilon[P_5+\delta_5(t)],\\
I_z\ddot{\gamma}+c_{zz}\gamma-U_y u+V_x v-c_{yz}\beta-c_{zx}\alpha &= \varepsilon[P_6+\delta_6(t)],\\
I\ddot{\varphi} &= \varepsilon[P_7+\delta_7(t)],
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

gdzie:

$$P_j = R_j + m_{p1}(F_j)_1 + m_{p2}(F_j)_2 + m_0 Q_j, \quad j = 1, 2, \ldots, 7, \quad R_7 = R_0^{(c)}.$$

Przyjęto, że $\delta_j(t)$ $(j = 1, 2, \ldots, 7)$ stanowią szerokopasmowe procesy stochastyczne o znanych charakterystykach statystycznych, których realizacje przyjmują małe wartości, a czasy korelacji $(\tau_j)_{\text{kor}}$ są krótsze od czasu relaksacji procesu wyjściowego, tj. spełniają warunek

$$(\tau_j)_{\text{kor}} \ll \frac{1}{\varepsilon\omega}. \tag{2.2}$$

Pozostałe oznaczenia są takie same, jak w pracy [1].

Z wystarczającą w praktycznych zastosowaniach dokładnością przekształcić można równania (2.1) do równań opisujących drgania określone przez częstości wymuszeń i tę spośród częstości drgań własnych λ_k analizowanego układu, dla której różnica $|\lambda_k - \dot{\varphi}|$ jest najmniejsza, gdyż drgania z innymi częstościami własnymi na skutek tłumienia bądź wygasną, bądź mogą nie być rozpatrywane w pierwszym przybliżeniu [3]. Jeśli taką częstością jest λ_m, podobnie jak w pracy [1] przekształca się równania (2.1) do postaci

$$\ddot{q}_m + \lambda_m^2 q_m = \frac{\varepsilon}{M_m} \sum_{j=1}^{6} \Phi_j^{(m)} [P_j + \delta_j(t)], \tag{2.3}$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{\varepsilon}{I} [P_7 + \delta_7(t)], \tag{2.4}$$

gdzie wielkości M_m i $\Phi_j^{(m)}$ określone zostały w pracy [1].

Przy braku wymuszeń stochastycznych drgania układu opisane są zależnościami

$$u = u_0 + \varrho_1, \quad v = v_0 + \varrho_2, \ldots, \quad \gamma = \gamma_0 + \varrho_6, \tag{7.5}$$

gdzie $\varrho_j(t) = \Phi_j^{(m)} q_m(t)$, $u_0, v_0, \ldots, \gamma_0$ oznaczają stałe składniki wywołane stałą składową momentu reakcyjnego $crT(\omega_0)$ w równaniach (2.1), a $q_m(t)$ jest rozwiązaniem równań (2.3) i (2.4) przy $\delta_j(t) \equiv 0$.

Rozwiązanie równań (2.3) i (2.4) przy braku wymuszeń stochastycznych przedstawiono w pracy [1]. Poniżej rozpatrzono zagadnienie wyznaczenia $q_m(t)$ przy występowaniu w równaniach (2.3) i (2.4) wymuszeń $\delta_j(t)$.

3. Rozwiązanie równań ruchu

Do rozwiązania równań (2.3) i (2.4) przy spełnionych warunkach (2.2) można zastosować matematyczny aparat procesów Markowa i równań kinetycznych Fokkera-Plancka-Kołmogorowa (F-P-K) [4, 5]. W tym celu stosuje się zamianę zmiennych określoną wzorami

$$\begin{aligned} q_m &= A\cos(\varphi + \psi), \\ \dot{q}_m &= -A\lambda_m \sin(\varphi + \psi), \\ \dot{\varphi} &= \omega \end{aligned} \tag{3.1}$$

i przekształca równania (2.3), (2.4) do postaci

$$
\begin{aligned}
\dot{A} &= \varepsilon X_R + \varepsilon X_F, \\
\dot{\psi} &= \varepsilon Y_R + \varepsilon Y_F, \\
\dot{\omega} &= \varepsilon Z_R + \varepsilon Z_F,
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

gdzie

$$X_R = -\frac{1}{M_m \lambda_m} \sum_{j=1}^{6} \Phi_j^{(m)} P_j \sin(\varphi + \psi),$$

$$Y_R = \lambda_m - \omega - \frac{1}{A M_m \lambda_m} \sum_{j=1}^{6} \Phi_j^{(m)} P_j \cos(\varphi + \psi),$$

$$Z_R = \frac{1}{I} P_7,$$

$$X_F = -\frac{1}{M_m \lambda_m} \sum_{j=1}^{6} \Phi_j^{(m)} \delta_j(t) \sin(\varphi + \psi),$$

$$Y_F = -\frac{1}{M_m A \lambda_m} \sum_{j=1}^{6} \Phi_j^{(m)} \delta_j(t) \cos(\varphi + \psi),$$

$$Z_F = \frac{1}{I} \delta_7(t),$$

$$P_j = P_j(A, \psi, \varphi, \omega),$$

A, ψ, ω oznaczają zmieniające się w czasie wielkości. Człony X_R, Y_R, Z_R stanowią części regularne równań (3.2), natomiast X_F, Y_F, Z_F są częściami fluktuacyjnymi, zawierającymi procesy stochastyczne. W równaniach tych należy wydzielić składniki opisujące płynne zmiany wielkości A, ψ i ω. W celu usunięcia wibracyjnych składników z członów X_R, Y_R, Z_R przedstawić można wielkości A, ψ i ω w postaci

$$
\begin{aligned}
A &= A^X + \varepsilon U(A^X, \psi^X, \omega^X, \varphi^X), \\
\psi &= \psi^X + \varepsilon V(A^X, \psi^X, \omega^X, \varphi^X), \\
\omega &= \omega^X + \varepsilon W(A^X, \psi^X, \omega^X, \varphi^X),
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

gdzie A^X, ψ^X, ω^X oznaczają wolnozmienne składowe, $\varphi^X = \omega^X t$, U, V, W — wibracyjne składniki.

Funkcje U, V, W należy tak dobrać, aby zachodziły związki

$$
\begin{aligned}
\dot{A}^X &= \varepsilon X_R^X(A^X, \psi^X, \omega^X), \\
\dot{\psi}^X &= \varepsilon Y_R^X(A^X, \psi^X, \omega^X), \\
\dot{\omega}^X &= \varepsilon Z_R^X(A^X, \psi^X, \omega^X).
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Dla uzyskania rozwiązań z uwzględnieniem członów drugiego rzędu małości należy wydzielić w funkcjach U, V, W i X_R^X, Y_R^X, Z_R^X człony pierwszego i drugiego rzędu małości:

$$
\begin{aligned}
U &= U_1(A^X, \psi^X, \omega^X, \varphi^X)+\varepsilon U_2(A^X, \psi^X, \omega^X, \varphi^X),\\
V &= V_1(A^X, \psi^X, \omega^X, \varphi^X)+\varepsilon V_2(A^X, \psi^X, \omega^X, \varphi^X),\\
W &= W_1(A^X, \psi^X, \omega^X, \varphi^X)+\varepsilon W_2(A^X, \psi^X, \omega^X, \varphi^X),\\
X_R^X &= X_{R1}^X(A^X, \psi^X, \omega^X)+\varepsilon X_{R2}^X(A^X, \psi^X, \omega^X),\\
Y_R^X &= Y_{R1}^X(A^X, \psi^X, \omega^X)+\varepsilon Y_{R2}^X(A^X, \psi^X, \omega^X),\\
Z_R^X &= Z_{R1}^X(A^X, \psi^X, \omega^X)+\varepsilon Z_{R2}^X(A^X, \psi^X, \omega^X).
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Dla analizowanego układu otrzymuje się

$$
\begin{aligned}
X_{R1}^X &= -\frac{1}{2\pi M_m \lambda_m}\int_0^{2\pi}\sum_{j=1}^{6}\Phi_j^{(m)}P_j\sin(\varphi^X+\psi^X)\,d\varphi^X,\\
Y_{R1}^X &= \lambda_m-\omega^X-\frac{1}{2\pi A^X M_m\lambda_m}\int_0^{2\pi}\sum_{j=1}^{6}\Phi_j^{(m)}P_j\cos(\varphi^X+\psi^X)\,d\varphi^X,\\
Z_{R1}^X &= \frac{1}{2\pi I}\int_0^{2\pi}P_7\,d\varphi^X,\\
U_1 &= \frac{1}{\omega^X}\sum_p\frac{1}{p}(c_{1p}\sin p\varphi^X-b_{1p}\cos p\varphi^X),\\
V_1 &= \frac{1}{\omega^X}\sum_p\frac{1}{p}(c_{2p}\sin p\varphi^X-b_{2p}\cos p\varphi^X),\\
W_1 &= \frac{1}{\omega^X}\sum_p\frac{1}{p}(c_{3p}\sin p\varphi^X-b_{3p}\cos p\varphi^X),\\
X_{R2}^X &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big[U_1\frac{\partial X_R}{\partial A}(A^X, \psi^X, \omega^X, \varphi^X)+V_1\frac{\partial X_R}{\partial \psi}(A^X, \psi^X, \omega^X, \varphi^X)+\\
&\quad +W_1\frac{\partial X_R}{\partial \omega}(A^X, \psi^X, \omega^X, \varphi^X)+W_{c1}\frac{\partial X^X}{\partial \varphi}(A^X, \psi^X, \omega^X, \varphi^X)\Big]d\varphi^X,\\
Y_{R2}^X &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big[U_1\frac{\partial Y_R}{\partial A}(A^X, \psi^X, \omega^X, \varphi^X)+V_1\frac{\partial Y_R}{\partial \psi}(A^X, \psi^X, \omega^X, \varphi^X)+\\
&\quad +W_1\frac{\partial Y_R}{\partial \omega}(A^X, \psi^X, \omega^X, \varphi^X)+W_{c1}\frac{\partial Y_R}{\partial \varphi}(A^X, \psi^X, \omega^X, \varphi^X)\Big]d\varphi^X,\\
Z_{R2}^X &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big[U_1\frac{\partial Z_R}{\partial A}(A^X, \psi^X, \omega^X, \varphi^X)+V_1\frac{\partial Z_R}{\partial \psi}(A^X, \psi^X, \omega^X, \varphi^X)+\\
&\quad +W_1\frac{\partial Z_R}{\partial \omega}(A^X, \psi^X, \omega^X, \varphi^X)+W_{c1}\frac{\partial Z_R}{\partial \varphi}(A^X, \psi^X, \omega^X, \varphi^X)\Big]d\varphi^X,
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

gdzie

$$b_{1p} = -\frac{1}{\pi M_m \lambda_m}\int_0^{2\pi}\sum_{j=1}^{6}\Phi_j^{(m)}P_j\sin(\varphi^X+\psi^X)\sin p\varphi^X d\varphi^X,$$

$$c_{1p} = -\frac{1}{\pi M_m \lambda_m}\int_0^{2\pi}\sum_{j=1}^{6}\Phi_j^{(m)}P_j\sin(\varphi^X+\psi^X)\cos p\varphi^X d\varphi^X,$$

$$b_{2p} = -\frac{1}{\pi A^X M_m \lambda_m}\int_0^{2\pi}\sum_{j=1}^{6}\Phi_j^{(m)}P_j\cos(\varphi^X+\psi^X)\sin p\varphi^X d\varphi^X,$$

$$c_{2p} = -\frac{1}{\pi A^X M_m \lambda_m}\int_0^{2\pi}\sum_{j=1}^{6}\Phi_j^{(m)}P_j\cos(\varphi^X+\psi^X)\cos p\varphi^X d\varphi^X,$$

$$b_{3p} = \frac{1}{\pi I}\int_0^{2\pi}P_7\sin p\varphi^X d\varphi^X,$$

$$c_{3p} = \frac{1}{\pi I}\int_0^{2\pi}P_7\cos p\varphi^X d\varphi^X,$$

$$W_{c1}(A^X, \psi^X, \omega^X, \varphi^X) = -\frac{1}{(\omega^X)^2}\sum_p \frac{1}{p^2}(b_{3p}\sin p\varphi^X + c_{3p}\cos p\varphi^X),$$

$$P_j = P_j(A^X, \psi^X, \omega^X, \varphi^X), \qquad j = 1, 2, \ldots, 7.$$

W częściach fluktuacyjnych równań (3.2) można zamiast A, ψ, φ podstawić A^X, ψ^X, φ^X i nie uwzględniać składników wyższych rzędów małości, gdyż są one w równaniu F-P-K pomijalne [5]. Po odrzuceniu składników wibracyjnych z części regularnych równania (3.2) przyjmują postać

$$\tag{3.7}\begin{aligned}\dot{A}^X &= \varepsilon X_{R1}^X + \varepsilon^2 X_{R2}^X - \frac{\varepsilon}{M_m \lambda_m}\sum_{j=1}^{6}\Phi_j^{(m)}\delta_j(t)\sin(\varphi^X+\psi^X),\\ \dot{\psi}^X &= \varepsilon Y_{R1}^X + \varepsilon^2 Y_{R2}^X - \frac{\varepsilon}{A^X M_m \lambda_m}\sum_{j=1}^{6}\Phi_j^{(m)}\delta_j(t)\cos(\varphi^X+\psi^X),\\ \dot{\omega}^X &= \varepsilon Z_{R1}^X + \varepsilon^2 Z_{R2}^X + \frac{\varepsilon}{I}\delta_7(t).\end{aligned}$$

W równaniach (3.7) pominiemy „znaczki X" i napiszemy je w postaci

$$\tag{3.8}\begin{aligned}\dot{A} &= \varepsilon F(A, \psi, \omega, \varphi, \delta_j, \varepsilon), \qquad j = 1, 2, \ldots, 6,\\ \dot{\psi} &= \varepsilon G(A, \psi, \omega, \varphi, \delta_j, \varepsilon), \qquad j = 1, 2, \ldots, 6,\\ \dot{\omega} &= \varepsilon H(A, \psi, \omega, \delta_7, \varepsilon).\end{aligned}$$

Dla takiego układu równań można napisać równanie F-P-K dla trójwymiarowej funkcji gęstości prawdopodobieństwa $w(A, \psi, \omega)$ [5], mianowicie

$$
\begin{aligned}
(3.9)\quad \dot{w}(A,\psi,\omega) = &-\frac{\partial}{\partial A}\left\{\left[\varepsilon\langle F\rangle+\varepsilon^2\int_{-\infty}^{0}K\left\{\frac{\partial F}{\partial A}, F_\tau\right\}d\tau+\varepsilon^2\int_{-\infty}^{0}K\left\{\frac{\partial F}{\partial\psi}, G_\tau\right\}d\tau+\right.\right.\\
&\left.\left.+\varepsilon^2\int_{-\infty}^{0}K\left\{\frac{\partial F}{\partial\omega}, H_\tau\right\}d\tau\right]w\right\}-\frac{\partial}{\partial\psi}\left\{\left[\varepsilon\langle G\rangle+\varepsilon^2\int_{-\infty}^{0}K\left\{\frac{\partial G}{\partial A}, F_\tau\right\}d\tau+\right.\right.\\
&\left.\left.+\varepsilon^2\int_{-\infty}^{0}K\left\{\frac{\partial G}{\partial\psi}, G_\tau\right\}d\tau+\varepsilon^2\int_{-\infty}^{0}K\left\{\frac{\partial G}{\partial\omega}, H_\tau\right\}d\tau\right]w\right\}-\frac{\partial}{\partial\omega}\left\{\left[\varepsilon\langle H\rangle+\right.\right.\\
&\left.\left.+\varepsilon^2\int_{-\infty}^{0}K\left\{\frac{\partial H}{\partial A}, F_\tau\right\}d\tau+\varepsilon^2\int_{-\infty}^{0}K\left\{\frac{\partial H}{\partial\psi}, G_\tau\right\}d\tau+\varepsilon^2\int_{-\infty}^{0}K\left\{\frac{\partial H}{\partial\omega}, H_\tau\right\}d\tau\right]w\right\}+\\
&+\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial A^2}\left[\int_{-\infty}^{0}K\{F, F_\tau\}d\tau w\right]+\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}\left[\int_{-\infty}^{0}K\{G, G_\tau\}d\tau w\right]+\\
&+\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}\left[\int_{-\infty}^{0}K\{H, H_\tau\}d\tau w\right]+\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial A\partial\psi}\left[\int_{-\infty}^{0}(K\{F, G_\tau\}+K\{G, F_\tau\})d\tau w\right]+\\
&+\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial A\partial\omega}\left[(K\{F, H_\tau\}+K\{H, F_\tau\})d\tau w\right]+\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial\psi\partial\omega}\left[\int_{-\infty}^{0}(K\{G, H_\tau\}+\right.\\
&\left.+K\{H, G_\tau\})d\tau w\right],
\end{aligned}
$$

gdzie $\langle\ \rangle$ oznacza wartość oczekiwaną, a $K\{\ \}$ — funkcję korelacyjną (bądź funkcję korelacji wzajemnej).

Przy wyliczaniu poszczególnych składników równania (3.9) przyjęto, że $\delta_j(t)$ są nieskorelowanymi procesami o wartościach oczekiwanych równych zeru. Przy wyznaczaniu wartości oczekiwanych $\langle F\rangle$, $\langle G\rangle$, $\langle H\rangle$ odrzucono składniki wibracyjne z części fluktuacyjnych. W wyniku otrzymano

$$
\begin{aligned}
(3.10)\quad \dot{w}(A,\psi,\omega) = &-\frac{\partial}{\partial A}\left\{\left[\varepsilon X_{R1}+\varepsilon^2 X_{R2}+\frac{\varepsilon^2\pi}{AM_m^2\lambda_m^2}\sum_{j=1}^{6}[\Phi_j^{(m)}]^2 S_j(\delta_j,\omega)\right]w\right\}-\\
&-\frac{\partial}{\partial\psi}\left\{\left[\varepsilon Y_{R1}+\varepsilon^2 Y_{R2}+\frac{\varepsilon^2}{2A^2M_m^2\lambda_m^2}\sum_{j=1}^{6}[\Phi_j^{(m)}]^2 R_j(\delta_j,\omega)\right]w\right\}-\\
&-\frac{\partial}{\partial\omega}[w(\varepsilon Z_{R1}+\varepsilon^2 Z_{R2})]+\frac{\varepsilon^2\pi}{2M_m^2\lambda_m^2}\sum_{j=1}^{6}[\Phi_j^{(m)}]^2 S_j(\delta_j,\omega)\frac{\partial^2 w}{\partial A^2}+\\
&+\frac{\varepsilon^2\pi}{2A^2M_m^2\lambda_m^2}\sum_{j=1}^{6}[\Phi_j^{(m)}]^2 S_j(\delta_j,\omega)\frac{\partial^2 w}{\partial\psi^2}+\frac{\varepsilon^2\pi}{I^2}S_7(\delta_7,0)\frac{\partial^2 w}{\partial\omega^2},
\end{aligned}
$$

gdzie

$$S_j(\delta_j, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \delta_j, \delta_{j\tau} \rangle \cos\omega\tau d\tau \text{ — widmowa gęstość procesu } \delta_j(t),$$

$$S_7(\delta_7, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \delta_7, \delta_{7\tau} \rangle d\tau, \qquad R_j(\delta_j, \omega) = \int_{-\infty}^{0} \langle \delta_j, \delta_{j\tau} \rangle \sin\omega\tau d\tau.$$

Rozwiązanie równania (3.10) wymaga zastosowania maszyn cyfrowych.

Dla stanu ustalonego przy $\delta_7(t) \equiv 0$ celowe może być wyznaczenie stacjonarnej funkcji gęstości $w(A, \psi)$, która spełnia równanie

$$(3.11) \qquad 0 = -\frac{\partial}{\partial A}\left\{\left[\varepsilon X_{R1} + \varepsilon^2 X_{R2} + \frac{\varepsilon^2\pi}{AM_m^2\lambda_m^2} \sum_{j=1}^{6} [\Phi_j^{(m)}]^2 S_j(\delta_j, \omega)\right] w\right\} -$$
$$-\frac{\partial}{\partial\psi}\left\{\left[\varepsilon Y_{R1} + \varepsilon^2 Y_{R2} + \frac{\varepsilon^2}{2A^2M_m^2\lambda_m^2} \sum_{j=1}^{6} [\Phi_j^{(m)}]^2 R_j(\delta_j, \omega)\right] w\right\} +$$
$$+\frac{\varepsilon^2\pi}{2M_m^2\lambda_m^2} \sum_{j=1}^{6} [\Phi_j^{(m)}]^2 S_j(\delta_j, \omega)\left(\frac{\partial^2}{\partial A^2} + \frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}\right) w.$$

Funkcja $w(A, \psi)$ powinna spełniać warunki

$$(3.12) \qquad \begin{aligned} w(A, -\pi) &= w(A, \pi) = 0, \\ w(-\infty, \psi) &= w(\infty, \psi) = 0. \end{aligned}$$

Rozwiązań równania (3.11) spełniających warunki (3.12) poszukiwać można w postaci

$$(3.13) \qquad w(A, \psi) = \sum_{l=0}^{\infty} w_l(A) \cos\left(l + \frac{1}{2}\right)\psi, \qquad l = 0, 1, 2, \ldots.$$

Po podstawieniu (3.13) do równania (3.11), pomnożeniu obu jego stron przez $\cos\left(s+\frac{1}{2}\right)\psi$, $s = 0, 1, 2, \ldots$, i scałkowaniu po ψ w przedziale $[-\pi, \pi]$, otrzymuje się układ złożony z nieskończonej liczby równań różniczkowych zwyczajnych o postaci

$$(3.14) \qquad \frac{d^2 w_s}{dA^2} + R_{1s}(A)\frac{dw_s}{dA} + R_{2s}(A) w_s = 0, \qquad s = 0, 1, 2, \ldots.$$

Dla takich równań i funkcji gęstości (3.13) podano w pracy [6] następujące rozwiązanie:

$$(3.15) \qquad w(A, \psi) = \exp(-A^2) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1 + 2A_s(2A^2 - 1)}{\pi\sqrt{2\pi}\,(1 + 2A_s)} \cos\left(s + \frac{1}{2}\right)\psi,$$

gdzie

$$A_s = \frac{-2B_{12s}+B_{20s}+6B_{22s}+48B_{24s}+1}{2(6B_{11s}-4B_{12s}+72B_{13s}+5B_{20s}+12B_{22s}-144B_{24s})},$$

$$B_{1ns} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-A^2)R_{1s}(A)H_n(A)dA,$$

$$B_{2ns} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-A^2)R_{2s}(A)H_n(A)dA,$$

a $H_n(A)$ są wielomianami Hermite'a

$$H_n(A) = (-1)^n \exp(A^2)\frac{d^n}{dA^n}[\exp(-A^2)].$$

Znajomość funkcji gęstości $w(A, \psi)$ pozwala wyznaczyć wartości oczekiwane $\langle A\rangle$ i $\langle\psi\rangle$. Wartość prędkości kątowej silnika ω w stanie ustalonym przy $\delta_7(t) \equiv 0$ określona jest równaniem

$$\varepsilon H(\langle A\rangle, \langle\psi\rangle, \omega, \varepsilon) = \varepsilon Z_{R1}^X(\langle A\rangle, \langle\psi\rangle, \omega)+\varepsilon^2 Z_{R2}^X(\langle A\rangle, \langle\psi\rangle, \omega) = 0. \tag{3.16}$$

Funkcje Z_{R1} i Z_{R2} nie zawierają składników wibracyjnych, stąd zgodnie z postacią funkcji P_7 [1] stały składnik dodatkowego momentu oporowego na wale silnika (wywołanego drganiami silnika przy $\delta_7(t) \equiv 0$) wynosi

$$(\Delta M)_0 = crT(\omega)-B(\omega)-h\omega-\varepsilon IZ_{R1}^X(\langle A\rangle, \langle\psi\rangle, \omega)-\varepsilon^2 IZ_{R2}^X(\langle A\rangle, \langle\psi\rangle, \omega), \tag{3.17}$$

gdzie c oznacza liczbę wykorbień wału korbowego, r — długość ramienia korby, $T(\omega)$ — średnią wartość siły gazowej działającej prostopadle do jednego wykorbienia na promieniu r, $B(\omega)$ — średnią wartość momentu oporowego odbiornika mocy, h — współczynnik wiskotycznego tłumienia przy obracaniu wału silnika. Wynikająca stąd strata mocy jest równa

$$(\Delta N)_0 = (\Delta M)_0\omega. \tag{3.18}$$

Wartość ta może różnić się od wartości straty mocy w przypadku braku wymuszeń stochastycznych, odpowiadającej rozwiązaniom równań (3.4) z uwzględnieniem zależności (3.5) i (3.6). Przykładowo, dla dwucylindrowego silnika w układzie V, wykonującego drgania pionowe, równania (3.4) mają, z pominięciem członów drugiego rzędu małości, postać

$$\dot{A}^X = -\frac{\varepsilon}{2mb}[A^X bl_y+(2m_p\cos^2\delta+m_0)r(\omega^X)^2\sin\psi^X],$$

$$\dot{\psi}^X = \varepsilon\left[b-\omega^X-\frac{2m_p\cos^2\delta+m_0}{2A^X mb}r(\omega^X)^2\cos\psi^X\right],$$

$$\dot{\omega}^X = \frac{\varepsilon}{I}\left[rT(\omega^X)-B(\omega^X)-h\omega^X+\frac{1}{2}(2m_p\cos^2\delta+m_0)A^X br\omega^X\sin\psi^X\right],$$

gdzie m oznacza masę układu drgającego, $m_p = m_{p1} = m_{p2}$ — niewyrównoważoną masę w ruchu postępowo-zwrotnym, odpowiadającą jednemu cylindrowi i skupioną na osi sworznia tłokowego, m_0 — wirującą masę niewyrównoważoną, odpowiadającą jednemu wykorbieniu i skupioną na osi czopa korbowego, b — częstość drgań własnych układu w kierunku pionowym, l_y — współczynnik wiskotycznego tłumienia układu amortyzacji przy pionowych drganiach silnika, δ — połowę kąta pomiędzy osiami dwóch cylindrów.

Dla stanów ustalonych równania te mają rozwiązania pokrywające się z rozwiązaniami, jakie uzyskuje się metodą uśredniania [7] w pierwszym przybliżeniu

$$A^x = \frac{(2m_p\cos^2\delta + m_0)r(\omega^x)^2}{2mb\sqrt{(b-\omega^x)^2 + \left(\frac{1}{2m}l_y\right)^2}}, \qquad \operatorname{tg}\psi^x = \frac{l}{2m(\omega^x - b)},$$

gdzie prędkość kątowa silnika ω^x określona jest równaniem

$$rT(\omega^x) - B(\omega^x) - h\omega^x + \frac{1}{2}(2m_p\cos^2\delta + m_0)A^x br\omega^x \sin\psi^x = 0,$$

tzn. stały składnik dodatkowego momentu oporowego wyraża się zależnością

$$(\varDelta M)_0 = -\frac{1}{2}(2m_p\cos^2\delta + m_0)A^x br\omega^x \sin\psi^x.$$

Równanie (3.17) ma w przypadku pionowych drgań dwucylindrowego silnika w układzie V postać

$$(\varDelta M)_0 = -\frac{1}{2}(2m_p\cos^2\delta + m_0)\langle A\rangle br\omega \sin\langle\psi\rangle,$$

co oznacza, że strata mocy $(\varDelta N)_0$ przy wymuszeniach stochastycznych będzie różnić się od straty mocy przy braku wymuszeń stochastycznych, gdy

$$\langle A\rangle \sin\langle\psi\rangle \neq A^x \sin\psi^x.$$

Równania (2.3) nie posiadają rozwiązania zerowego i stateczność ruchu można badać w tym sensie, czy trajektorie rozwiązań przebiegają w pewnych obszarach ograniczonych. W tym przypadku celowe jest zbadanie stateczności technicznej [8]. Zależność (3.15) pozwala wyznaczyć warunek, aby rozwiązania A i ψ dla $\delta_7(t) \equiv 0$ pozostawały wewnątrz domkniętego ograniczonego obszaru $E\{A \leqslant \varDelta_1, |\psi| \leqslant \varDelta_2\}$, gdy wartości początkowe A i ψ należą do otwartego ograniczonego obszaru $e \subset E$, a $\delta_j(t)$ są procesami ograniczonymi, tj. $||\delta_j(t)|| < \varDelta$, $\varDelta > 0$, $j = 1, 2, \ldots, 6$. Techniczna stateczność względem obszarów E, e i procesów $\delta_j(t)$ dla ustalonego $\varepsilon_0 (1 > \varepsilon_0 > 0)$ jest zapewniona, gdy prawdopodobieństwo $p[(A, \psi) \in E]$ spełnia nierówność

$$p[(A, \psi) \in E] \geqslant 1 - \varepsilon_0,$$

czyli

$$\int_0^{\varDelta_1}\int_{-\varDelta_2}^{\varDelta_2} w(A, \psi)\,dA\,d\psi \geqslant 1 - \varepsilon_0. \tag{3.19}$$

4. Uwagi końcowe

Funkcje $(F_j)_{1,2}$ ($j = 1, 2, \ldots, 7$) w równaniach (2.1) dotyczą silników z cylindrami w układzie V i łatwo można z nich uzyskać odpowiednie funkcje dla silników o pionowym układzie cylindrów lub dla silników typu bokser [1]. Równania ruchu silników innych typów przy szerokopasmowych wymuszeniach stochastycznych mogą być rozpatrywane analogicznie, przy czym zastosowana w niniejszej pracy metoda nie nakłada ograniczeń na intensywność fluktuacji [5].

Literatura cytowana w tekście

1. J. Kolenda, *Nieliniowe drgania elastycznie posadowionych silników tłokowych z cylindrami w układzie V*, Mech. Teoret. i Stos., 4, **13** (1975).
2. S. Ziemba, *Problemy teorii konstrukcji maszyn*, Zag. Drgań Nieliniowych, 9 (1968).
3. Ю. А. Митропольский, *Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах*. Изд. АН УССР, Киев 1955.
4. B. Skalmierski, A. Tylikowski, *Metody stochastyczne w mechanice*, Wyd. Politechniki Śląskiej, Gliwice 1971.
5. Р. Л. Стратонович, *Избранные вопросы теории флуктуации в радиотехнике*, Изд. Сов. Радио, Москва 1961.
6. Т. А. Тибилов, *Асимптотические методы исследования колебаний подвижного состава*, Труды Ростовского-на-Дону Института Жел. Транспорта, вып. 78, Изд. Транспорт, Москва 1970.
7. Ю. А. Митропольский, *Метод усреднения в нелинейной механике*, Труды V Междунар. Конф. по Нелинейным Колебаниям, т. I, Изд. Инст. Мат. АН УССР, Киев 1970.
8. W. Bogusz, *Stateczność techniczna*, PWN, Warszawa 1972.

Резюме

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ АМОРТИЗИРОВАННЫХ ПОРШНЕВЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ ПРИ ШИРОКОПОЛОСНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

В работе рассматриваются одночастотные колебания амортизированных поршневых двигателей с шестью степенями свободы при случайных возмущениях, являющихся широкополосными, некоррелированными стохастическими процессами, которых математическое ожидание равно нулю. Угловая скорость двигателя считается переменной величиной. Формулируется уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова для трехмерной плотности вероятности амплитуды колебаний, фазового угла и угловой скорости двигателя. Приводится решение для двухмерной, стационарной плотности амплитуды и фазового угла колебаний а также условие технической устойчивости рассматриваемой системы.

Summary

NONLINEAR VIBRATIONS OF ELASTICALLY MOUNTED PISTON ENGINES AT WIDE-BAND STOCHASTIC EXCITATIONS

The paper deals with one-frequency vibrations of elastically mounted multi-cylinder piston engines of six degrees of freedom subjected to random excitations being wide-band non-corelated stochastic processes with expected values equal to zero. Rotating speed of an engine is treated as a variable. The Fokker-Planck-

Kolmogorov equation for the three-dimensional probability density of a vibration amplitude, phase angle and rotating speed is formulated. The solution for the two-dimensional stationary probability density of a vibration amplitude and phase angle as well as the condition of technical stability of the analysed system are given.

INSTYTUT OKRĘTOWY POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 września 1975 r.