

O PEWNEJ METODZIE ANALIZY WPŁYWU TARCIA W PROCESIE PLASTYCZNEGO
ŚCISKANIA PRÓBKII WALCOWEJ

ZDZISŁAW MALINOWSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Jednym z ważniejszych czynników występujących w procesie plastycznego ściskania próbki walcowej jest tarcie na powierzchniach pomiędzy próbką i stemplami. Analizie wpływu tarcia na przebieg i wyniki próby ściskania zostało poświęconych szereg prac. Klasyczną pozycją w tej dziedzinie jest praca [5], w której zakładając pewne uproszczenia otrzymuje się, poprzez całkowanie równania równowagi, następującą zależność na średnie naprężenie osiowe $\bar{\sigma}_z$:

$$(1) \quad \bar{\sigma}_z = \sigma_0 \frac{2}{\alpha^2} (e^\alpha - \alpha - 1), \quad \alpha = \frac{2\mu a}{h},$$

gdzie σ_0 jest aktualnym naprężeniem plastycznego płynięcia przy ściskaniu, μ oznacza współczynnik tarcia, h stanowi bieżącą wysokość krążka, a jest bieżącym maksymalnym promieniem. Równanie (1) przekształcone do postaci

$$(2) \quad \mu = s_0(1-\varepsilon)^{3/2} \left(e^\alpha - \frac{\bar{\sigma}_z}{\sigma_0} \frac{\alpha^2}{2} - 1 \right), \quad \alpha = \frac{\mu}{s_0(1-\varepsilon)^{3/2}},$$

gdzie h_0 i d_0 oznaczają początkową wysokość i średnicę próbki, $s_0 = \frac{h_0}{d_0}$, $\varepsilon = \frac{h_0 - h}{h_0}$ jest aktualnym odkształceniem próbki — może zostać wykorzystane do określenia współczynnika tarcia μ na podstawie doświadczalnie wyznaczonej zależności $\bar{\sigma}_z(s_0, \varepsilon)$. Tą metodą obliczono numerycznie μ dla próbek aluminiowych i miedzianych w pracy [2]. Wartości $\sigma_0(\varepsilon)$ można w tym przypadku wyznaczyć poprzez ekstrapolację przyjmując, że $\sigma_0 = \bar{\sigma}_z(s_0, \varepsilon)_{s_0 \rightarrow \infty}$, sposób ten został pierwotnie zaproponowany w pracy [1].

W pracach [4] i [6] przeprowadzono bardziej szczegółową dyskusję problemu wykazując, że zależność (1) jest słuszna jedynie wówczas, gdy współczynnik tarcia μ , przy danej wartości a/h nie przekracza pewnej wartości krytycznej μ_k , którą wyznacza się z warunku

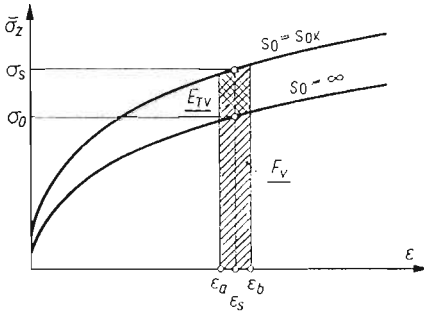
$$(3) \quad \frac{a}{h} \leq \frac{1}{2\mu_k} \ln \left(\frac{1}{2\mu_k} \right).$$

Gdy warunek (3) nie jest spełniony, wówczas w pewnej strefie na powierzchni próbki obserwuje się tarcie szcpe i wzajemny poślizg materiału próbki względem ściskającej płyty nie zachodzi.

W dotychczasowej teoretycznej analizie zagadnienia opierano się głównie na zależnościach otrzymanych poprzez całkowanie równania równowagi. W obecnej pracy przedstawiono odmienną metodę pozwalającą uwzględnić tarcie w procesie plastycznego ściskania próbki walcowej.

2. Ogólne sformułowanie metody

Okazuje się, że korzystając z równania bilansu pracy można również otrzymać odpowiednie zależności opisujące proces ściskania próbki z uwzględnieniem tarcia. Pole podwójnie zakreskowane na rys. 1 przedstawia dodatkową pracę na jednostkę objętości próbki,



Rys. 1. Wpływ tarcia na powierzchniach kontaktu na krzywą umocnienia odpowiadającą procesowi ściskania próbki walcowej

wykonaną dla pokonania oporów spowodowanych tarcie podczas ściskania próbki od odkształcenia ϵ_a do ϵ_b . Praca tarcia E_T dla całej próbki wynosi:

$$E_T = E_{TV} V,$$

gdzie E_{TV} oznacza średnią pracę tarcia na jednostkę objętości próbki, V jest objętością próbki.

Ogólnie biorąc E_T można podzielić na dwie części

$$(4) \quad E_T = E_{TP} + W.$$

W równaniu (4) E_{TP} oznacza pracę tarcia na powierzchniach pomiędzy próbką i stemplami, natomiast W jest pracą związaną z powodowaniem przez tarcie niejednorodnego stanu odkształcenia i naprężenia w próbce. Dzieliąc równanie (4) stronami przez $V(\epsilon_b - \epsilon_a)$ przy założeniu, że wielkość $\Delta\epsilon = \epsilon_b - \epsilon_a$ nie jest duża, można je wyrazić poprzez naprężenia w formie

$$(5) \quad \sigma_T = \sigma_{TP} + \sigma(W).$$

Równanie (5) może być zilustrowane w sposób pokazany na rys. 2, gdzie

$$\sigma_T = AC, \quad \sigma_{TP} = AB, \quad \sigma(W) = BC.$$

Ponieważ oddziaływanie sił tarcia powierzchniowego na rozkłady naprężeń i odkształceń wewnątrz próbki zależy od jej smukłości s_0 , zatem również wartość naprężeń $\sigma(W)$ będzie zależeć od s_0 . Przy założeniu jednorodnego stanu odkształcenia w próbce podczas procesu ściskania można przyjąć, że $W = 0$ i cała dodatkowa praca spowodowana tarcie jest dysypowana na powierzchni próbki, a więc

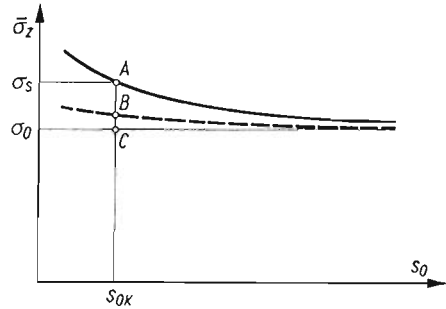
$$E_T = E_{TP}.$$

Uwzględniając powyższe założenie można dla próbki ścisanej w przedziale odkształcenia od ϵ_a do ϵ_b napisać następujące równanie bilansu pracy:

$$(6) \quad P - E_T = F,$$

gdzie $F = F_V V$ (rys. 1) jest pracą potrzebną do odkształcenia próbki, jeśli nie występuje tarcie. Równanie to wyraża równość pracy wykonanej przez siły zewnętrzne i wewnętrzne. Zgodnie z rys. 1 wielkości P i F można wyrazić następująco:

$$(7) \quad \begin{aligned} P &= \sigma_s V(\varepsilon_b - \varepsilon_a), \\ F &= \sigma_0 V(\varepsilon_b - \varepsilon_a). \end{aligned}$$



Rys. 2. Zależność $\bar{\sigma}_z(s_0)$ dla $\varepsilon = \text{const}$. Linia przerywana ilustruje dyskutowany w pracy przypadek z niejednorodnym stanem odkształcenia wewnątrz próbki

Podstawiając zależności (7) do równania (6) oraz dzieląc stronami przez $V(\varepsilon_b - \varepsilon_a)$ otrzymuje się

$$(8) \quad \sigma_s = \sigma_0 + \frac{E_T}{V(\varepsilon_b - \varepsilon_a)}.$$

Za pomocą układu równań typu (8) można określać wartość σ_0 . Również po wyprowadzeniu odpowiedniej zależności na E_T równanie to może zostać wykorzystane do analizy wpływu tarcia na powierzchniach kontaktu w procesie ściskania próbki walcowej.

3. Wyznaczanie wartości σ_0

Dysponując doświadczalnie wyznaczoną krzywą $\sigma(s_0)_{\varepsilon = \text{const}}$ możemy napisać n równań typu (8) dla n wybranych wartości s_0 . Ogólna postać takiego układu będzie następująca:

$$(9) \quad \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_0 + \frac{E_{T1}}{V_1(\varepsilon_b - \varepsilon_a)}, \\ &\vdots \\ \sigma_{n-1} &= \sigma_0 + \frac{E_{Tn-1}}{V_{n-1}(\varepsilon_b - \varepsilon_a)}, \\ \sigma_n &= \sigma_0 + \frac{1}{V_n(\varepsilon_b - \varepsilon_a)(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\sigma_n}{\sigma_i} \left(\frac{a_{an}}{a_{ai}} \right)^3 E_{Ti}; \end{aligned}$$

a_a w ostatnim równaniu oznacza maksymalny promień próbki przy odkształceniu ε_a . Niewiadomymi wielkościami są σ_0 , $E_{T1} \dots E_{Tn-1}$. W celu umożliwienia jednoznacznego rozwiązania układu ostatnie równanie posiada inną konstrukcję niż pozostałe równania. Wartość E_{Tn} jest wyrażona przez znane wielkości $\sigma_1 \dots \sigma_n$ oraz niewiadome $E_{T1} \dots E_{Tn-1}$. Na podstawie wyprowadzonej w dalszej części pracy zależności na E_T można stwierdzić,

że taki sposób obliczania E_{Tn} jest poprawny przy założeniu, że wartość współczynnika tarcia μ nie zależy od s_0 .

Rozwiązanie względem σ_0 układu (9) zawierającego n równań posiada następującą postać:

$$\sigma_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} s_{ai} - (n-1)s_{an}}{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{s_{ai}}{\sigma_i} - (n-1) \frac{s_{an}}{\sigma_n}}$$

Zdefiniowanie odkształcenia próbki jako $\varepsilon = \frac{h_0 - h}{h_0}$ oraz założenie nieściśliwości materiału umożliwia napisanie zależności

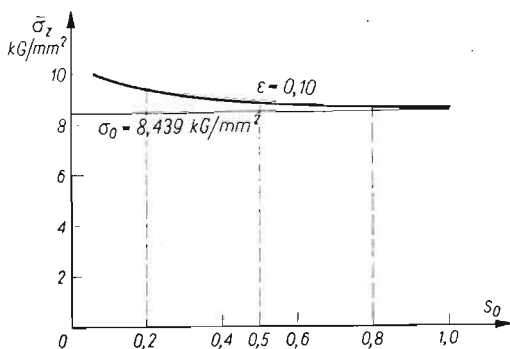
$$(10) \quad s_a = s_0(1 - \varepsilon_a)^{3/2}.$$

Uwzględniając tę zależność otrzymuje się następującą postać wyrażenia na σ_0 :

$$(11) \quad \sigma_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} s_{0i} - (n-1)s_{0n}}{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{s_{0i}}{\sigma_i} - (n-1) \frac{s_{0n}}{\sigma_n}}$$

Z postaci tego wyrażenia wynika, że σ_0 nie zależy od objętości próbek. Korzystając z wyrażenia (11) oraz dysponując wyznaczoną doświadczalnie w odpowiednio szerokim przedziale smukłości s_0 , zależnością $\sigma(s_0)_{\varepsilon=\text{const}}$ można z wystarczającą dokładnością obliczyć wartość σ_0 .

W pracy [2] na podstawie doświadczalnie wyznaczonych zależności $\bar{\sigma}_z(\varepsilon, s_0)$ dla próbek aluminiowych obliczono z równania (2) wartości współczynnika tarcia $\mu(\varepsilon, s_0)$ postu-



Rys. 3. Rozkład wartości s_0 wybranych w celu obliczenia σ_0 z układu równań (9)

gując się przy wyznaczaniu σ_0 metodą ekstrapolacji dla $s_0 = \infty$. W obecnej pracy obliczono σ_0 z wyrażenia (11) korzystając z tych samych doświadczalnych zależności. Wybierając na krzywej $\bar{\sigma}_z(s_0)$ (rys. 3) dla $\varepsilon = 0,10$ trzy punkty o wartościach s_0 równych $s_{01} = 0,2$, $s_{02} = 0,5$, $s_{03} = 0,8$ otrzymano $\sigma_0 = 8,439 \text{ KG/mm}^2$. Zawężając przedział s_0

i przeprowadzając obliczenia dla próbek o wartościach s_0 równych $s_{01} = 0,2$, $s_{02} = 0,4$, $s_{03} = 0,6$ otrzymano $\sigma_0 = 8,397 \text{ KG/mm}^2$.

Porównanie wartości σ_0 obliczonych z wyrażenia (11) oraz określonych przez ekstrakcję wykazuje dobrą zgodność wyników. Wartości te różnią się mniej niż pół procent. Efektywność obliczania σ_0 wskazuje, że w tym przypadku przyjęte założenia oraz metoda postępowania są prawidłowe.

4. Wyprowadzenie zależności na E_T , $\bar{\sigma}_z$, μ

Zależności na pracę tarcia E_T , średnie naprężenie osiowe $\bar{\sigma}_z$ oraz współczynnik tarcia μ zostaną wyprowadzone przy założeniu jednorodnego stanu odkształcenia w próbce i przyjęciu warunku nieściśliwości materiału.



Rys. 4. Charakterystyczne wymiary powierzchni czołowej próbki: a_0 , r_0 — początkowe; a_a , r_a dla odkształcenia $\epsilon_a = \epsilon_s - \Delta\epsilon/2$; a_b , r_b dla odkształcenia $\epsilon_b = \epsilon_s + \Delta\epsilon/2$

Ponieważ naprężenia $\bar{\sigma}_z$ są odniesione do aktualnej powierzchni czołowej próbki, również miara odkształceń powinna być określona w stosunku do aktualnej geometrii próbki. Definiując odkształcenie jako

$$(12) \quad \varphi = \ln \frac{h_0}{h},$$

gdzie h_0 i h oznaczają początkową i bieżącą wysokość, otrzymuje się zależność pomiędzy początkowym i bieżącym maksymalnym promieniem krążka w postaci

$$(13) \quad a = a_0 e^{\varphi/2}.$$

Z założenia o jednorodności odkształceń wynika geometryczny związek pomiędzy promieniami dla odkształceń φ_a i φ_b

$$(14) \quad r_b - r_a = \frac{r_a}{a_a} (a_b - a_a).$$

Na rys. 4 zilustrowano charakterystyczne wymiary powierzchni czołowej próbki w stanie początkowym oraz dla odkształceń φ_a i φ_b . Podstawiając (13) do związku (14) otrzymuje się

$$(15) \quad r_b - r_a = r_a \left(e^{\frac{\varphi_b - \varphi_a}{2}} - 1 \right).$$

Wyrażenie na pracę tarcia dysypowaną na elemencie powierzchni próbki w trakcie procesu odkształcenia od φ_a do φ_b można przedstawić w postaci

$$(16) \quad dE'_T = (r_b - r_a) \tau r_a d\theta dr_a,$$

gdzie τ oznacza średnie naprężenie styczne występujące na powierzchni próbki. Po wprowadzeniu oznaczenia

$$(17) \quad A = e^{\frac{\varphi_b - \varphi_a}{2}} - 1$$

oraz po podstawieniu zależności (14) do wyrażenia na dE'_T otrzymuje się

$$(18) \quad dE'_T = A \tau r_a^2 d\theta dr_a.$$

Stąd po scałkowaniu po powierzchni próbki wyrażenie na E'_T przyjmuje postać

$$(19) \quad E'_T = \frac{2}{3} \pi A \mu \sigma_s a^3.$$

Przy całkowaniu przyjęto, że naprężenia styczne τ na powierzchni próbki są stałe i równe $\mu \sigma_s$. Wyniki obliczeń σ_0 i $\mu(\varepsilon)$, uzyskane na podstawie zależności będących rezultatem przeprowadzonej w pracy analizy świadczą o tym, że przyjęcie równości $\tau = \mu \sigma_s$ nie powoduje większego błędu. W rzeczywistości, jak wynika z pracy [7], wartości współczynnika tarcia μ , naprężenia ściskającego σ_z i naprężenia stycznego τ zmieniają się wzdłuż promienia próbki. Wyrażenie (19) zostało wyprowadzone tylko dla jednej z dwóch powierzchni kontaktu próbki. W związku z tym praca dysypowana na tarcie dla całej próbki jest dwukrotnie większa

$$(20) \quad E_T = \frac{4}{3} \pi A \mu \sigma_s a^3.$$

Z kolei z równania (8) wynika następująca zależność na pracę tarcia E_T

$$(21) \quad E_T = V(\varphi_b - \varphi_a) (\sigma_s - \sigma_0).$$

Podstawiając (21) do (20) oraz uwzględniając zależność $s_a = s_0 e^{-(3/2)\varphi_a}$ otrzymuje się po przekształceniach

$$(22) \quad \sigma_s = \frac{\sigma_0}{1 - \frac{2\mu}{3s_0 K}},$$

gdzie

$$(23) \quad K = \frac{1}{A} (\varphi_b - \varphi_a) e^{-(3/2)\varphi_a}.$$

Z wyrażenia (22) wynika bezpośrednio zależność na współczynnik tarcia μ

$$(24) \quad \mu = \frac{3}{2} s_0 K \frac{\sigma_s - \sigma_0}{\sigma_s}.$$

Ponieważ otrzymane z zależności (22) i (24) wartości σ_s i μ są średnimi w rozpatrywanym przedziale odkształceń $\Delta\varphi = \varphi_b - \varphi_a$, ze względu na dokładność wyników przedział ten nie powinien być zbyt duży.

Okazuje się jednak, że można znaleźć graniczną wartość K w przypadku, gdy przedział odkształceń $\Delta\varphi$ dąży do zera otrzymując w ten sposób ścisłą postać zależności (22) i (23). Po podstawieniu do wyrażenia (23)

$$\varphi_a = \varphi_s - \frac{\Delta\varphi}{2}, \quad \varphi_b = \varphi_s + \frac{\Delta\varphi}{2}$$

oraz uwzględniając oznaczenie (17) można K przedstawić w postaci

$$K = \frac{\Delta\varphi e^{(\Delta\varphi/2 - \varphi_s)}}{e^{1/2(\varphi_s + \Delta\varphi/2)} - e^{1/2(\varphi_s - \Delta\varphi/2)}}.$$

Stosując w celu znalezienia granicznej formy K dla $\Delta\varphi \rightarrow 0$ regułę de l'Hospitala otrzymuje się

$$(25) \quad \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} K_{\Delta\varphi \rightarrow 0} = 2e^{-3/2\varphi_s}.$$

Stąd dla $\sigma_s \equiv \bar{\sigma}_z$ oraz $\varphi_s \equiv \varphi$ wyrażenia (22) i (24) przyjmują postać

$$(26) \quad \bar{\sigma}_z = \frac{\sigma_0}{1 - \frac{\mu}{3s_0} e^{3/2\varphi}},$$

$$(27) \quad \mu = 3s_0 e^{-3/2\varphi} \frac{\bar{\sigma}_z - \sigma_0}{\bar{\sigma}_z}.$$

Wyrażenia te mają inną postać niż odpowiadające im zależności (1) i (2) uzyskane metodą całkowania równania równowagi. Różnica ta wynika stąd, że przy wyprowadzaniu zależności (20) na pracę tarcia E_T przyjęto uśrednioną stałą wartość σ_z oraz τ na powierzchni czołowej próbki, podczas gdy z całkowania równania równowagi otrzymuje się

$$(28) \quad \tau(r) = \mu\sigma_z(r) = \mu\sigma_0 \exp\left(\alpha\left(1 - \frac{r}{a_a}\right)\right),$$

gdzie α , podobnie jak we wzorze (1), jest równe $2\mu a/h$. Podstawiając (28) do wyrażenia (18) na dE'_r oraz całkując otrzymuje się zależność na pracę tarcia w postaci

$$(29) \quad E_T = 8\pi A \mu \sigma_0 \frac{a_a^3}{\alpha^3} \left(e^\alpha - \frac{\alpha^2}{2} - \alpha - 1 \right).$$

Na podstawie równań (21) oraz (29) można określić stosunek $\bar{\beta}_E = \bar{\sigma}_z/\sigma_0$ w formie

$$(30) \quad \bar{\beta}_E = \frac{2A}{\varphi_b - \varphi_a} (\bar{\beta}_R - 1) + 1,$$

gdzie

$$\bar{\beta}_R = \frac{2}{\alpha^2} (e^\alpha - \alpha - 1)$$

oznacza stosunek $\bar{\sigma}_z/\sigma_0$ wynikający z równania (1). W granicy, gdy $\Delta\varphi \rightarrow 0$ wyrażenie $2A/(\varphi_b - \varphi_a)$ osiąga wartość

$$(31) \quad \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{2A}{\Delta\varphi} = 1.$$

Stąd z wyrażeń (31) oraz (30) wynika, że przy założeniu niejednorodnego rozkładu naprężeń τ na powierzchni czołowej próbki, określonego zależnością (28), wielkości $\bar{\beta}_E$ i $\bar{\beta}_R$ są sobie równe, co oznacza, że w takim przypadku metoda energetyczna daje tę samą średnią wartość $\bar{\sigma}_z$, którą w metodzie całkowania równania równowagi otrzymuje się z bezpośredniego uśrednienia rozkładu $\bar{\sigma}_z(r)$ po powierzchni próbki.

Z zależności (26) wynika, że gdy μ będzie dążyć do wartości $3s_0 e^{-3/2\varphi}$ naprężenia $\bar{\sigma}_z$ będą nieskończenie wzrastać. W rzeczywistości przy pewnej wartości $\mu_k < 3s_0 e^{-3/2\varphi}$ na powierzchni pomiędzy próbką i stemplem pojawi się tarcie szcpe oraz nastąpi ścięcie materiału wewnątrz próbki. Korzystając ze wzoru (26) można znaleźć zależność na krytyczną wartość μ jako funkcję $\mu_k = f(s_0, \varphi)$. Przy przyjęciu warunku plastyczności Treski

$$(32) \quad \mu_k \bar{\sigma}_z = \frac{\sigma_0}{2}$$

wyrażenie określające μ_k posiada następującą postać:

$$(33) \quad \mu_k = \frac{1}{2 + \frac{1}{3s_0} e^{3/2\varphi}}.$$

W przypadku gdy wartość $\mu > \mu_k$ zależność (26) przestaje być słuszna.

Przedstawiona w pracy metoda analizy rozważanego problemu wynika z równania bilansu pracy dla pewnego przedziału odkształcenia $\Delta\varepsilon = \varepsilon_b - \varepsilon_a$. W związku z tym dokładność metody zależy od poprawnego wyboru miar naprężenia i odkształcenia. Przy prawidłowym ich doborze oraz przy założeniu $\mu = 0$ w rozpatrywanym przedziale odkształceń $d\varepsilon$ jest spełniona zasada zachowania energii, którą można wyrazić w następującej formie:

$$(34) \quad Pdh = V\bar{\sigma}_z d\varepsilon,$$

gdzie P oznacza siłę nacisku działającą na powierzchnię kontaktu próbki ze stemplem. Najczęściej używaną miarą naprężenia $\bar{\sigma}_z$ w analizie próby ściskania jest miara w sensie Cauchy'ego, tzn.

$$(35) \quad \sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{P}{\Delta S},$$

gdzie siła nacisku P oraz powierzchnia ΔS są odniesione do stanu aktualnego istniejącego w procesie ściskania. Równanie (34) będzie spełnione jeśli jednocześnie z miarą naprężenia (35) zostanie przyjęta logarytmiczna miara odkształcenia $\varphi = \ln(h_0/h)$.

Do analizy procesu ściskania można również stosować miary naprężenia i odkształcenia odniesione do początkowej geometrii próbki. Miary te można określić następująco:

$$(36) \quad \sigma = \lim_{\Delta S_0 \rightarrow 0} \frac{P}{\Delta S_0},$$

$$(37) \quad \varepsilon = \frac{h_0 - h}{h_0}.$$

Nieprawidłowe jest natomiast stosowanie miary naprężenia (35) odniesionej do aktualnej geometrii próbki jednocześnie z miarą odkształcenia (37) odniesioną do początkowej geometrii próbki. W celu pokazania wielkości błędów spowodowanych nieprawidłowym doбором miar naprężenia i odkształcenia poniżej wyprowadzone zostaną, w taki sam sposób jak poprzednio, zależności określające $\bar{\sigma}_z$ oraz μ . Dla naprężeń odniesionych do aktualnej powierzchni czołowej próbki, tzn. dla zależności (35), oraz dla przyjętej miary odkształcenia $\varepsilon = (h_0 - h)/h_0$ związki te przyjmują postać

$$(38) \quad \bar{\sigma}_z = \frac{\sigma_0}{1 - \frac{\mu}{3s_0} (1 - \varepsilon)^{-5/2}},$$

$$(39) \quad \mu = 3s_0(1 - \varepsilon)^{5/2} \frac{\bar{\sigma}_z - \sigma_0}{\bar{\sigma}_z}.$$

Wyrażenia na $\bar{\sigma}_z$ oraz μ dla stosowanych powyżej miar naprężenia i odkształcenia możemy otrzymać również przez podstawienie do wzorów (26) oraz (27) związku pomiędzy logarytmiczną i aktualnie przyjętą miarą odkształcenia

$$(40) \quad \varphi = -\ln(1 - \varepsilon),$$

w tym przypadku otrzymuje się:

$$(41) \quad \bar{\sigma}_z = \frac{\sigma_0}{1 - \frac{\mu}{3s_0} (1 - \varepsilon)^{-3/2}},$$

$$(42) \quad \mu = 3s_0(1 - \varepsilon)^{3/2} \frac{\bar{\sigma}_z - \sigma_0}{\bar{\sigma}_z}.$$

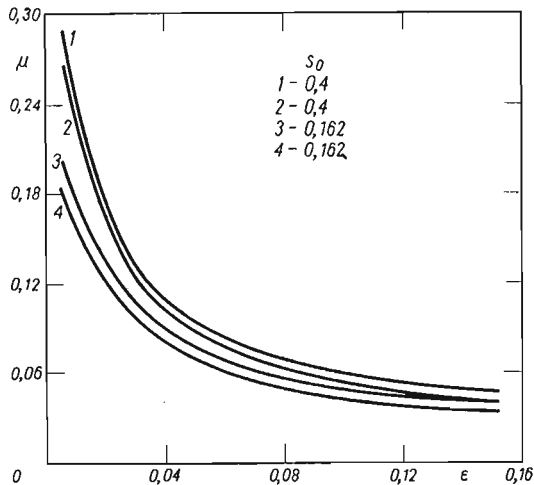
Zależności (41) i (38) oraz (42) i (39) różnią się wykładnikiem potęgi wyrażenia $1 - \varepsilon$, przy czym z powodu nieprawidłowego doboru miar naprężenia i odkształcenia zależności (38) i (39) są mniej dokładne.

5. Wyniki obliczeń przeprowadzonych na podstawie badań doświadczalnych

Poniżej podane zostaną wyniki obliczeń współczynnika tarcia μ , otrzymane z różnych zależności na podstawie tych samych danych doświadczalnych. Obliczenia wykonano wykorzystując dane doświadczalne zamieszczone w pracach [1] i [2]. W celu porównania na rysunkach przedstawiono niektóre wyniki obliczeń przeprowadzonych w pracach [2] oraz [3]. Ponieważ w pracach [1, 2] oraz [3] naprężenia odniesione są do aktualnej powierzchni czołowej próbki, natomiast odkształcenia do początkowej wysokości h_0 , dla uzyskania możliwości bezpośredniego porównania w obliczeniach przeprowadzonych w obecnej pracy przyjęto podobne miary naprężenia i odkształcenia.

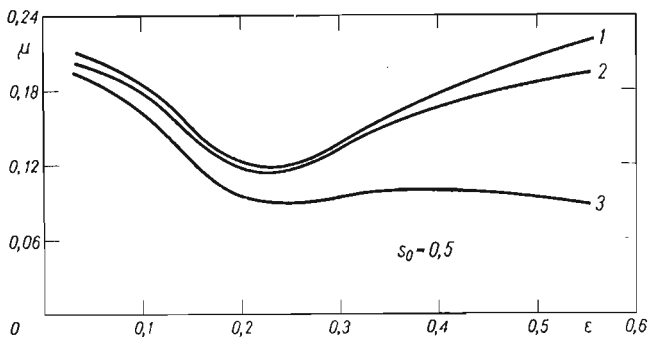
Rysunek 5 przedstawia wartości μ obliczone w zakresie odkształceń $0,01 \div 0,15$ dla próbek aluminiowych smarowanych sproszkowanym MoS_2 . Porównanie uzyskanych rezultatów wskazuje, że różnice pomiędzy wynikami otrzymanymi z zależności (2) oraz

(39) dla tego zakresu odkształceń nie są zbyt duże. Wartości μ obliczone na podstawie zależności (42) będą zawarte wewnątrz przedziału wyznaczonego ze wzorów (2) oraz (39).



Rys. 5. Wartości współczynnika tarcia μ w funkcji odkształcenia obliczone dla próbek aluminiowych z zależności (2) — linie 1 i 3 oraz z zależności (39) — linie 2 i 4, na podstawie tych samych danych doświadczalnych

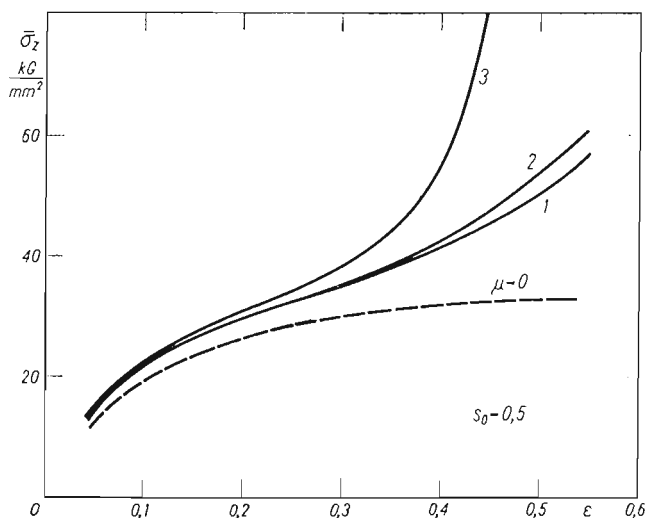
Na rys. 6 przedstawiono wartości μ w zależności od odkształcenia dla próbek miedzianych w zakresie odkształceń od 0,05 do 0,55. Z przedstawionych rezultatów wynika, że różnica w wartościach μ obliczonych ze wzorów (2), (39) oraz (42) wzrasta wraz z od-



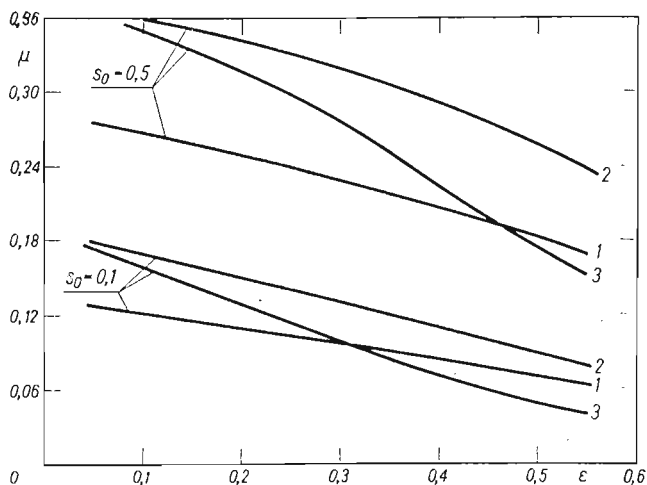
Rys. 6. Wartości współczynnika tarcia μ w zależności od odkształcenia dla próbek miedzianych. Linie 1, 2, 3 wyznaczone odpowiednio ze wzorów (2), (42) oraz (39)

kształceniem. Duża różnica w wartościach μ uzyskanych z zależności (2) oraz (39) jest spowodowana nieprawidłowym doбором miar naprężenia i odkształcenia przy wyrowadzaniu zależności (39).

Z kolei niewielka różnica w wartościach μ przedstawionych liniami 1 i 2 świadczy, że obie metody dają zbliżone rezultaty. W zakresie odkształceń od $0 \div 0,5$ różnica ta wynosi średnio 5%.



Rys. 7. Zależności średnich naprężeń $\bar{\sigma}_z$ od odkształcenia obliczone z różnych wzorów dla tych samych wartości $\mu(\epsilon)$. Linie 1, 2, 3 wyznaczono odpowiednio ze wzorów (1), (41) oraz (38)



Rys. 8. Graficzne przedstawienie warunku powstawania tarcia szczepczego. Linie 1, 2, 3 wyznaczono na podstawie zależności (32) podstawiając zamiast $\bar{\sigma}_z$ odpowiednio wzory (1), (41) oraz (38)

Wpływ tarcia na kształt krzywej umocnienia został pokazany na rys. 7. Przedstawione krzywe umocnienia obliczono ze wzorów (1), (38) oraz (41) dla tej samej zależności $\mu(\epsilon)$.

Na rys. 8 przedstawiono wyniki obliczeń μ_k otrzymane na podstawie zależności (32) dla wartości $\bar{\sigma}_z$ obliczonych ze wzorów (1), (38) oraz (41).

6. Uwagi i wnioski

Jak wynika z przeprowadzonych rozważań, korzystając z równania bilansu pracy (6) oraz wyrażenia na pracę tarcia (20), można dokonać analizy procesu ściskania próbki walcowej z uwzględnieniem tarcia na powierzchniach kontaktu.

Równanie (6) sprowadzone do postaci (8) wyjaśnia ponadto w prosty sposób charakter zależności $\bar{\sigma}_z(s_0)_{\varepsilon=\text{const}}$, rys. 2. Przy założeniu stałej średnicy próbek praca tarcia zmienia się w niewielkim stopniu wraz ze wzrostem s_0 , natomiast objętość V zwiększa się proporcjonalnie do s_0 . Stąd drugi człon po prawej stronie w równaniu (8) zmniejsza się ze wzrostem s_0 , co przy stałej wartości σ_0 nadaje krzywej $\bar{\sigma}_z(s_0)_{\varepsilon=\text{const}}$ obserwowany doświadczalnie kształt.

Zaproponowana w pracy metoda analizy pozwala obliczać wartość aktualnego naprężenia plastycznego płynięcia σ_0 , co nie jest możliwe przy korzystaniu z metody całkowania równania równowagi. Dość duża dokładność wyznaczania σ_0 z układu równań (9) świadczy ponadto, że postać zależności (8) jest w tym przypadku prawidłowa.

W dalszej analizie problemu, w celu wyprowadzenia zależności $\bar{\sigma}_z(\sigma_0, \varepsilon, s_0, \mu)$ przyjęto, że praca tarcia na powierzchniach kontaktu określona zależnością

$$(i) \quad E_T = \frac{4}{3} \pi A \mu \sigma_s a^3$$

jest równa całkowitej dodatkowej pracy wykonanej w procesie ściskania, określonej zależnością

$$(ii) \quad E_T = V(\varepsilon_b - \varepsilon_a)(\sigma_s - \sigma_0).$$

W odniesieniu do rzeczywistej próby ściskania założenie to może nie być całkowicie ściśle ze względu na niejednorodność odkształcenia wewnątrz próbki oraz zmienne rozkłady $\mu(r)$, $\sigma_z(r)$ i $\tau(r)$ na powierzchniach kontaktu. Dodatkowym warunkiem równości pracy obliczonej z zależności (i) oraz (ii) jest prawidłowy dobór miar naprężenia i odkształcenia. Jak wynika z przeprowadzonej w pracy dyskusji, niespełnienie tego warunku może powodować dość duże błędy.

Zarówno w metodzie całkowania równania równowagi, jak i w metodzie zaproponowanej w pracy zakłada się stały rozkład współczynnika tarcia μ na powierzchniach czołowych próbki. W obecnej pracy zakłada się również stałą wartość naprężeń stycznych τ na powierzchniach kontaktu, natomiast z metody całkowania równania równowagi otrzymuje się, że dla $\mu(r) = \text{const}$ τ wzrasta w kierunku środka powierzchni czołowej. W rzeczywistości, jak wynika z pracy [7], wartości μ oraz τ zmniejszają się w kierunku środka powierzchni czołowej próbki.

Ponieważ związki (1) i (2) zostały wyprowadzone metodą całkowania równania równowagi wartości σ_z i μ obliczone z tych związków będą stanowiły dolną ocenę naprężeń ściskających $\bar{\sigma}_z$ oraz górną ocenę współczynnika tarcia μ . Natomiast wartości $\bar{\sigma}_z$ i μ obliczone ze związków wyprowadzonych w pracy będą stanowiły górną ocenę naprężenia ściskającego $\bar{\sigma}_z$ oraz dolną ocenę współczynnika tarcia μ dla stałego rozkładu $\mu(r)$ na powierzchni czołowej próbki.

Ze względu na przyjęte założenia upraszczające rezultaty obu metod będą obarczone błędem. Opierając się na danych doświadczalnych zamieszczonych w pracach [2] oraz [7]

można wnioskować, że wartości μ uzyskane zarówno na podstawie zależności (2) — odpowiadającej metodzie całkowania równania równowagi — jak i zależności (42) — odpowiadającej metodzie zaproponowanej w pracy — będą wyższe od rzeczywistych. Ze względu na brak bezpośredniej metody wyznaczania współczynnika tarcia oraz złożoność innych eksperymentalnych metod trudno jest ocenić błąd wartości μ otrzymywanych na podstawie zależności (2) oraz (42).

Należy dodać, że obliczanie współczynnika tarcia z zależności (27) oraz (42) nie wymaga stosowania techniki numerycznej, co jest konieczne w przypadku korzystania z zależności (2).

Literatura cytowana w tekście

1. M. COOK, E. C. LARKE, *Resistance of copper and copper alloys to homogeneous deformation in compression*, I. Inst. Metals, **71**, (1945) 371.
2. Z. MALINOWSKI, J. KLEPACZKO, *Szacowanie współczynnika tarcia na czołach ściskanej plastycznie próbki walcowej*, Mech. Teoret. i Stos., **10**, 4, (1972) 561.
3. Z. MALINOWSKI, *Energetyczna metoda analizy wpływu tarcia w procesie plastycznego ściskania próbki walcowej*, Prace IPPT, 48/1974.
4. W. SCHROEDER, D. A. WEBSTER, *Press-forging thin sections: effect of friction, area, and thickness on pressures required*, J. Appl. Mech., **16**, (1949) 289.
5. E. SIEBEL, *Grundlagen zur Berechnung des Kraft und Arbeitbedarf bei Schmieden und Walzen*, Stahl u. Eisen. Düsseldorf, **43**, 41, (1923) 1295.
6. E. G. THOMSEN, C. H. YANG, S. KOBAYASHI, *Plastic Deformation in Metal Processing*, Mac Millan, 1965.
7. G. T. VAN ROOYEN, W. A. BACKOFEN, *A study of interface friction in plastic compression*, Int. J. Mech. Sciences, **1**, 1, (1960) 1.

Резюме

О НЕКОТОРОМ МЕТОДЕ АНАЛИЗА ВЛИЯНИЯ ТРЕНИЯ В ПРОЦЕССЕ ПЛАСТИЧЕСКОГО СЖАТИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ОБРАЗЦА

В работе представлен способ учета трения на поверхностях контакта в процессе сжатия цилиндрического образца. Анализ проведен при предположении, что вся дополнительная работа, обусловленная трением во время деформирования образца, затрачивается на поверхностях контакта между образцом и сжимающими его штампами. В предположении однородного деформирования выводятся зависимости, определяющие актуальное напряжение текучести σ_0 , среднее осевое напряжение $\bar{\sigma}_z$ и коэффициент трения μ .

С помощью полученных зависимостей вычислены, на основе опытных данных из работ [1] и [2], значения $\mu(\epsilon)_{\sigma_0=\text{const}}$. Эти значения сравнены со значениями μ , полученными в работе [2] путем интегрирования уравнения равновесия.

Summary

ON A METHOD OF FRICTION ANALYSIS IN PLASTICALLY COMPRESSED CYLINDRICAL SPECIMEN

In this paper a method is presented which makes it possible to take into consideration the effect of friction at the interfaces during compression of a cylindrical specimen. In the analysis performed it is assumed that the additional work developed by the frictional effects is dissipated over the interfaces between

the specimen and loading platens. Assuming the uniform state of strain, the relations are obtained yielding the actual flow stress σ_0 , the axial stress $\bar{\sigma}_z$ and the coefficient of friction μ . Making use of the relations derived the values of $\mu(\epsilon)_{\sigma_0 = \text{const}}$ are computed on the basis of experimental data taken from the paper [1] and [2]. These values are compared with the values μ which were obtained in the paper [2] as the result of integrating the equilibrium equation.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 lipca 1975 r.
