MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3, 14 (1976)

PRZYKŁAD BADANIA DOKŁADNOŚCI LINIOWEGO UKŁADU DYNAMICZNEGO W PRZYPADKU NIESTACJONARNYM

JÓZEF NIZIOŁ, NARCYZ KONDRACIUK (KRAKÓW)

Wstęp

Dużą rolę w rozwoju techniki odegrały układy automatycznego sterowania. W układach tych można wyróżnić obiekt regulacji oraz regulator, który może działać na obiekt poprzez wejścia $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Wyjścia obiektu $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m$ będą mniej lub więcej różnić się od założonego przebiegu procesu $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3, \ldots, \tilde{y}_m$. Problem optymalnego sterowania polega na tym, by wyjścia obiektu $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m$ różniły się minimalnie (w określonym sensie) od żądanych przebiegów $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3, \ldots, \tilde{y}_m$. Do tego celu można dążyć w różny sposób:

1) poprzez odpowiedni dobór funkcji $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$,

2) przy znanej strukturze układu poprzez dobór jego parametrów (niepełna synteza),

3) poprzez dobór struktury układu, czyli dokonanie pełnej syntezy.

Wymuszenia, które działają na dany układ możemy podzielić na użyteczne, czyli sterujące, nazywane sygnałami, i zakłócające, zwane szumami. Zakłócenia nie mogą być określone w sposób jednoznaczny w sensie deterministycznym i należy je traktować jako procesy stochastyczne.

W niniejszej pracy zajmiemy się jedynie szczególnym przypadkiem pełnej syntezy. Rozważać będziemy układ jednokanałowy, tzn. układ dynamiczny z jednym wejściem i jednym wyjściem.

Dokładność dynamiczną takiego układu można zdefiniować następująco: niech wejście ma postać $X(t) = U(t)+V(t)$, gdzie $U(t)$ jest sygnałem, $V(t)$ szumem; $Z(t)$ niech będzie żądanym wyjściem. Wprowadźmy pewną funkcję zwaną funkcją strat.

Funkcją wagi nazywać będziemy pewną nieujemną funkcję dwóch zmiennych $Y(t)$ i $Z(t)$, gdzie

$$Y(t) = L[U(t)+V(t)],$$

zaś L jest pewnym operatorem liniowym.

Funkcja wagi przyjmuje postać

$$W = W\{Z(t), L[U(t)+V(t)]\}.$$

Wartość oczekiwana funkcji wagi nosi nazwę funkcji strat.

Jako kryterium dokładności dynamicznej układu przyjmiemy minimum funkcji strat. Przy przyjęciu funkcji wagi w postaci

$$W = k\{Z(t)-L[U(t)+V(t)]\}^2 = k\varepsilon^2$$

funkcja strat przyjmuje postać

$$\langle \varepsilon^2(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2 p(\varepsilon, t)d\varepsilon.$$

Symbolem $\langle \cdot \rangle$ oznaczać będziemy wartość średnią procesu stochastycznego po zbiorze realizacji.

Jako kryterium dokładności dynamicznej układu przyjmiemy warunek $\bigwedge_{t\in\tau} \langle \varepsilon^2(t)\rangle = \min$, gdzie τ jest czasem obserwacji układu dynamicznego. Dodatkowo żądamy, by funkcja oczekiwana różnicy $Y(t)-Z(t)$ była tożsamościowo równa zeru.

Żądany proces na wyjściu ma postać

$$Z(t) = N[U(t)],$$

gdzie N jest znanym, narzuconym przez nas operatorem.

1. Dokładność dynamiczna układu jednokanałowego w przypadku niestacjonarnym

Zakładamy, że:

1) operatory N i L są operatorami liniowymi,

2) funkcje $U(t)$ i $V(t)$ są funkcjami przypadkowymi, których nadzieje matematyczne są równe zeru,

3) istnieją momenty drugiego rzędu procesów $U(t)$, $V(t)$ i znane są funkcje korelacyjne $K_u(t_1, t_2)$, $K_v(t_1, t_2)$ i $K_{uv}(t_1, t_2)$, gdzie symbolami $K_u(t_1, t_2)$, $K_v(t_1, t_2)$ odpowiednio oznaczono funkcje autokorelacyjne procesów $U(t)$ i $V(t)$, zaś symbolem $K_{uv}(t_1, t_2)$ oznaczono funkcję korelacji wzajemnej procesów $U(t)$, $V(t)$,

4) czas obserwacji rozpatrywanego układu jest skończony i równy T,

5) proces $X(t)$ jest całkowalny w sensie średniokwadratowym.

Przy przyjętym kryterium dokładności dynamicznej dostajemy warunek

$$\left\langle \left| \int_0^T l(t, t_1)X(t_1)dt_1 - Z(t)\right|^2 \right\rangle = \min. \tag{1.1}$$

Wprowadzona funkcja przejścia $l(t, t_1)$ związana jest z operatorem L związkiem

$$\int_0^T l(t, t_1)X(t_1)dt_1 = L[X(t)].$$

Znalezienie optymalnej funkcji przejścia $l(t, t_1)$ sprowadza się do rozwiązania zagadnienia z rachunku wariacyjnego. W końcowym rezultacie $l(t, t_1)$ powinna spełniać równanie całkowe postaci [1]

$$\int_0^t l(t, t_2)K_x(t_1, t_2)dt_2 - R_{xz}(t_1, t) = 0, \qquad t \geqslant 0, \quad 0 \leqslant t_1 \leqslant t, \tag{1.2}$$

gdzie $K_x(t_1, t_2)$ jest funkcją autokorelacyjną procesu na wejściu, zaś $R_{xz}(t_1, t_2)$ — funkcją korelacji wzajemnej wymuszenia $X(t)$ i żądanego wyjścia $Z(t)$.

Znalezienie optymalnej funkcji $l(t, t_1)$ w ogólnym przypadku jest zagadnieniem bardzo trudnym. Prekursorem w tej dziedzinie można nazwać KOŁMOGOROWA [2]. Problem rozwiązany przez niego dotyczył ciągu przypadkowego, stacjonarnego. Zagadnienie syntezy w ujęciu probabilistycznym znacznie ogólniej postawił WIENER [4]. Podał on metodę rozwiązania równania całkowego (1.2) przy następujących założeniach:

1) procesy $X(t)$ i $Z(t)$ są stacjonarne,

2) ich nadzieje matematyczne są równe zeru,

3) czas obserwacji układu dynamicznego $T \to \infty$.

Ogólniejszy przypadek rozwiązali ZADEH i RAGAZZINI [5] zakładając nadzieje matematyczne w postaci wielomianów potęgowych zmiennej t oraz zakładając skończony czas obserwacji T.

SHINBROT [6] podał dość prosty sposób uzyskania rozwiązania równania (1.2) w pewnym szczególnym przypadku, mianowicie wtedy, kiedy funkcje $K_x(t_1, t_2)$ i $R_{xz}(t_1, t_2)$ można przedstawić w postaci skończonych sum iloczynów funkcji każdej ze zmiennych t_1 i t_2, tzn. kiedy prawdziwe są równości:

$$K_x(t_1, t_2) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(t_1)\cdot\psi_j(t_2), \qquad t_1 \geqslant t_2, \tag{1.3}$$

$$R_{xz}(t_1, t_2) = \sum_{j=1}^{m} \chi_j(t_1)\cdot\psi_j(t_2), \qquad t_1 \geqslant t_2; \tag{1.4}$$

gdzie $\varphi_j(t)$, $\psi_j(t)$ i $\chi_j(t)$ są deterministycznymi funkcjami czasu; oraz kiedy ponadto spełniony jest warunek

$$\sum_{j=1}^{m} \varphi_j(t_1)\cdot\psi_j(t_2) - \varphi_j(t_2)\cdot\psi_j(t_1) = w(t_1 - t_2), \tag{1.5}$$

tzn. funkcje $\varphi_j(t)$ i $\psi_j(t)$ są takie, że suma różnic stojąca po lewej stronie równości (1.5) jest funkcją różnicy $(t_1 - t_2)$.

Ponieważ funkcja korelacyjna $K_x(t_1, t_2)$ jest symetryczna, z równości (1.3) wynika, że

$$K_x(t_1, t_2) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(t_2)\cdot\psi_j(t_1), \qquad t_1 \leqslant t_2. \tag{1.6}$$

Celowe jest rozpatrywanie problemów z ograniczeniami (1.3), (1.4) i (1.5), ponieważ szeroka klasa zadań z zakresu sterowania automatycznego spełnia te warunki.

2. Wyznaczenie optymalnej funkcji przejścia dla układu całkującego

W zagadnieniach praktycznych, przy badaniu dokładności układów dynamicznych, najczęściej spotykamy się z problemami ekstrapolacji, filtracji, różniczkowania czy też ich kombinacji. W literaturze nie spotyka się problemów związanych z przypadkami, gdy operator N jest operatorem całkowania. Wiadomo, że jeżeli na dowolny całkowalny proces stochastyczny podziałamy operatorem całkowania, uzyskamy proces niestacjonarny. W tym przypadku będziemy więc zawsze mieć do czynienia z problemem doboru optymalnej funkcji przejścia w ujęciu niestacjonarnym. W praktyce, z takimi zagadnieniami, gdzie operator N jest operatorem całkowania, spotykamy się w przypadku żyroskopu całkującego przyspieszenie liniowe obiektu, na którym jest on umieszczony [3].

Żyroskop taki spełnia funkcję przyrządu mierzącego prędkości liniowe samolotów czy rakiet poprzez całkowanie ich przyspieszeń. Ze względu na losowy charakter sił działających na poruszający się samolot czy rakietę, przyspieszenia tych ostatnich są typowo procesami stochastycznymi. Na podstawie badań eksperymentalnych [1] wiadomo, że są to procesy na ogół stacjonarne, których funkcje korelacyjne najczęściej są aproksymowane funkcjami postaci:

a) $$K_x(t_1, t_2) = \sigma_1^2 e^{-\alpha|t_2-t_1|},$$

b) $$K_x(t_1, t_2) = \sigma_2^2 e^{-\alpha|t_2-t_1|}\cos\beta(t_2-t_1),$$

c) $$K_x(t_1, t_2) = \sigma_3^2 e^{-\alpha|t_2-t_1|}\cos\beta(t_2-t_1)+\frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|t_2-t_1|,$$

gdzie σ_i^2, α, β pewne stałe.

Dla wszystkich tych funkcji oraz całej szerokiej klasy innych, jak i dla operatora całkowania spełnione będą warunki (1.3) i (1.4) dla funkcji korelacyjnych $K_x(t_1, t_2)$, $R_{xz}(t_1, t_2)$, jak i warunek (1.5).

Zajmiemy się znalezieniem optymalnej funkcji przejścia w przypadku ogólnym, jednak przy ograniczeniach (1.3) - (1.5).

Dla uproszczenia zapisu posłużymy się symboliką rachunku wektorowego i zbiory funkcji $\varphi_j(t)$, $\psi_j(t)$ i $\chi_j(t)$, $j = 1, 2, 3, \ldots, m$ oznaczymy odpowiednio jako wektory $\bar{\varphi}(t)$, $\bar{\psi}(t)$ i $\bar{\chi}(t)$. W tym przypadku sumy postaci $\sum_{j=1}^{m} \varphi_j \psi_j$ można traktować jako iloczyn skalarny wektorów $\bar{\varphi}$ i $\bar{\psi}$. Wtedy (1.3), (1.4) i (1.5) można zapisać w postaci:

$$K_x(t_1, t_2) = \bar{\varphi}(t_1)\cdot\bar{\psi}(t_2), \quad t_1 \geqslant t_2, \tag{2.1}$$

$$R_{xz}(t_1, t_2) = \bar{\psi}(t_1)\cdot\bar{\chi}(t_2), \quad t_1 \leqslant t_2, \tag{2.2}$$

$$\bar{\varphi}(t_1)\cdot\bar{\psi}(t_2)-\bar{\varphi}(t_2)\cdot\bar{\psi}(t_1) = w(t_1-t_2). \tag{2.3}$$

Przyjmujemy, że szukane rozwiązanie równania (1.2) można przedstawić w postaci

$$l(t, t_2) = [\bar{l}(t)\cdot\bar{\gamma}(t_2)I(t-t_2), \tag{2.4}$$

gdzie $\bar{l}(t)$ i $\bar{\gamma}(t)$ są wektorami o współrzędnych $l_1(t), l_2(t), \ldots, l_m(t)$ i $\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t), \ldots, \gamma_m(t)$, a funkcja $I(t)$ jest funkcją skoku jednostkowego, tzn.

$$I(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geqslant 0, \end{cases} \tag{2.5}$$

i zapewnia zerowanie się funkcji $l(t, t_2)$ dla $t < t_2$, czyli realizowalność fizyczną układu.

Można tak określić wektory $\bar{l}(t)$ i $\bar{\gamma}(t)$, że wyrażenie (2.4) spełnia równanie (1.2). W tym celu przepisujemy równanie (1.2) uwzględniając warunki (2.1), (2.2) i (1.6). Otrzymamy

$$\bar{\psi}(t_1)\cdot\bar{\chi}(t) = \int_0^{t_1} l(t, t_2)[\bar{\varphi}(t_1)\cdot\bar{\psi}(t_2)]dt_2 + \int_{t_1}^{t} l(t, t_2)[\bar{\varphi}(t_2)\cdot\psi(t_1)]dt_2. \tag{2.6}$$

Ostatnią całkę przedstawiamy jako różnicę dwóch całek w przedziałach od 0 do t i od 0 do t_1. Więc

$$(2.7)\qquad \bar{\psi}(t_1)\cdot\bar{\chi}(t) = \int_0^{t_1} l(t, t_2)[\bar{\varphi}(t_1)\cdot\bar{\psi}(t_2)]dt_2 + \int_0^{t} l(t, t_2)[\bar{\varphi}(t_2)\cdot\bar{\psi}(t_1)]dt_2 - \int_0^{t_1} l(t, t_2)[\bar{\varphi}(t_2)\cdot\bar{\psi}(t_1)]dt_2 .$$

Następnie przenosimy drugą całkę z prawej strony na lewą i wyciągamy przed nawias wspólny czynnik

$$(2.8)\qquad \bar{\psi}(t_1)\Big[\bar{\chi}(t) - \int_0^{t} l(t, t_2)\cdot\bar{\varphi}(t_2)dt_2\Big] = \int_0^{t_1} l(t, t_2)[\bar{\varphi}(t_1)\cdot\bar{\psi}(t_2) - \bar{\varphi}(t_2)\cdot\bar{\psi}(t_1)]dt_2 .$$

Wstawiając (1.3) i (2.4) otrzymamy:

$$(2.9)\qquad \bar{\psi}(t_1)\Big\{\bar{\chi}(t) - \int_0^{t} [\bar{l}(t)\cdot\bar{\gamma}(t_2)]\cdot\bar{\varphi}(t_2)dt_2\Big\} = \bar{l}(t)\int_0^{t_1} \bar{\gamma}(t_2)w(t_1 - t_2)dt_2 .$$

Po obu stronach ostatniej równości są iloczyny funkcji zmiennej t_1 i funkcji zmiennej t. Równanie to będzie spełnione jeżeli porównamy te funkcje parami, tzn.:

$$(2.10)\qquad \bar{\psi}(t_1) = \int_0^{t_1} \bar{\gamma}(t_2)w(t_1 - t_2)dt_2 ,$$

$$(2.11)\qquad \bar{l}(t) + \int_0^{t} [\bar{l}(t)\cdot\bar{\gamma}(t_2)]\cdot\bar{\varphi}(t_2)dt_2 = \bar{\chi}(t).$$

Funkcja wektorowa $\bar{\psi}(t_1)$ podana wzorem (2.10) wyraża się poprzez splot funkcji $\bar{\gamma}(t)$ i $w(t)$. Zakładamy istnienie transformat Laplace'a $\bar{\Psi}(s)$, $\bar{\Gamma}(s)$ i $W(s)$, funkcji $\bar{\psi}(t)$, $\bar{\gamma}(t)$ i $w(t)$; ponadto zakładamy, że $W(s) \not\equiv 0$. Stosując przekształcenie Laplace'a do równania (2.10) otrzymamy

$$(2.12)\qquad \bar{\Gamma}(s) = \frac{\bar{\Psi}(s)}{W(s)} .$$

Równość ta, jako równość dwóch wektorów, będzie spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednie współrzędne tych wektorów będą sobie równe. W ten sposób znajdziemy transformaty Laplace'a wszystkich m współrzędnych $\gamma_j(t)$ wektora $\bar{\gamma}(t)$ i stosując odwrotne przekształcenie Laplace'a, określimy wszystkie nieznane funkcje $\gamma_j(t)$, $j = 1, 2, 3, \ldots, m$.

Aby obliczyć współrzędne wektora $\bar{l}(t)$, przepiszemy równanie (2.11) w postaci układu m skalarnych równań

$$(2.13)\qquad \sum_{i=1}^{m} [a_{ji}(t) + \delta_{ji}]l_j(t) = \chi_i(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

gdzie

$$a_{ji}(t) = \int_0^t \gamma_j(t_2)\varphi_i(t_2)dt_2, \tag{2.14}$$

a δ_{ji}, jak wiadomo, równa jest zeru, gdy $j \neq i$, i jest równa jedności, gdy $j = 1$.

W przypadku gdy układ (2.9) jest układem niesprzecznym, z (2.13) wyliczamy funkcje $l_j(t)$ i podstawiając je do (2.4) otrzymamy funkcję wagi optymalnego układu dynamicznego określonego równaniem całkowym (1.2).

Jeżeli układ (2.9) jest sprzeczny, oznacza to, że funkcja $l(t, t_2)$ została założona niewłaściwie. W tej sytuacji należy przyjąć ją w innej postaci, mianowicie:

$$l(t, t_2) = \bar{l}(t)\cdot\bar{\gamma}(t_2)I(t-t_2)+\sum_k h_k(t)\,\delta^{(k)}(t-t_2), \tag{2.15}$$

gdzie $h_k(t)$ są dowolnymi funkcjami wybranymi tak, aby wyrażenie $l(t)$ uczynić możliwie najprostszym; $\delta^{(k)}(t-t_2)$ jest k-tą pochodną funkcji δ-Diraca.

Jeśli funkcja wagi jest postaci (2.15), to równanie (2.9) przyjmie postać:

$$\bar{\varphi}(t_1)\Big\{\bar{\chi}(t)-\int_0^t [\bar{l}(t)\cdot\bar{\gamma}(t_2)]\bar{\varphi}(t_2)dt_2-\sum_k h_k(t)\int_0^t \delta^{(k)}(t-t_2)\cdot\bar{\varphi}(t_2)dt_2\Big\} = \tag{2.16}$$

$$= \int_0^{t_1} \bar{l}(t)\cdot\bar{\gamma}(t_2)w(t_1-t_2)dt_2+\sum_k h_k(t)\int_0^{t_1} \delta^{(k)}(t-t_2)w(t_1-t_2)dt_2.$$

Ostatnia całka jest równa zeru, ponieważ $t_1 < t$. Natomiast drugą całkę można łatwo obliczyć korzystając z własności funkcji δ-Diraca. Zakładając, że $\bar{\varphi}(t)$ jest klasy C^k otrzymujemy

$$\int_0^t \delta^{(k)}(t-t_2)\bar{\varphi}(t_2)dt_2 = \bar{\varphi}^{(k)}(t). \tag{2.17}$$

Uwzględniając poczynione wyżej uwagi równanie (2.16) napiszemy w postaci

$$\bar{\varphi}(t_1)\Big\{\bar{\chi}(t)-\int_0^t [l(t)\cdot\bar{\gamma}(t_2)]\cdot\bar{\varphi}(t_2)dt_2-\sum_k h_k(t)\cdot\bar{\varphi}^{(k)}(t)\Big\} = \tag{2.18}$$

$$= l(t)\int_0^{t_1} \bar{\gamma}(t_2)w(t_1-t_2)dt_2.$$

Stąd łatwo widać, że równości (2.10) i (2.11) przyjmą odpowiednio postać:

$$\bar{\varphi}(t_1) = \int_0^{t_1} \bar{\gamma}(t_2)w(t_1-t_2)dt_2, \qquad w \not\equiv 0, \tag{2.19}$$

$$\bar{l}(t)+\int_0^t [\bar{l}(t)\cdot\bar{\gamma}(t_2)]\cdot\bar{\varphi}(t_2)dt_2+\sum_k h_k(t)\bar{\varphi}^{(k)}(t) = \bar{\chi}(t). \tag{2.20}$$

Macierzowa forma układu równań (2.20) będzie identyczna z (2.13), jeżeli wektor z elementami $\chi_j(t)$ zastąpić wektorem o wyrazach $d_j(t)$, gdzie

$$d_j(t) = \chi_j(t) - \sum_k h_k(t)\bar{\varphi}_j^{(k)}(t). \tag{2.21}$$

Dobierając odpowiednio funkcje $h_k(t)$, z układu (2.20) obliczymy szukane funkcje $l_j(t)$.

3. Przykład

Jako przykład znajdziemy optymalną funkcję przejścia układu dynamicznego, całkującego funkcję przypadkową $X(t)$. Układ jest obserwowany przez skończony okres czasu od 0 do T. Funkcja korelacyjna $K_x(\tau)$ jest określona wzorem

$$K_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}, \qquad \langle X(t)\rangle = 0. \tag{3.1}$$

W tym przypadku niestacjonarność zagadnienia, jak zostało nadmienione w rozdz. 2, jest związana z operacją całkowania. Szukana funkcja wagi jest określona równaniem (1.2), gdzie

$$R_{xz}(t_1, t_2) = \int_0^{t_2} \sigma^2 e^{-\alpha(t_1-\xi)} d\xi = -\frac{\sigma^2}{\alpha} e^{-\alpha t_1} + \frac{\sigma^2}{\alpha} e^{-\alpha(t_1-t_2)}, \qquad t_2 \leqslant t_1. \tag{3.2}$$

Widać stąd, że jeżeli założymy:

$$\varphi_1(t) = 0, \qquad \varphi_2(t) = \sigma e^{-\alpha t},$$

$$\psi_1(t) = 1, \qquad \psi_2(t) = \sigma e^{\alpha t},$$

$$\chi_1(t) = -\frac{\sigma^2}{\alpha} e^{-\alpha t}, \qquad \chi_2(t) = \frac{\sigma}{\alpha} e^{-\alpha t},$$

to spełnione są warunki (1.3) i (1.4) dla $m = 2$. Mianowicie:

$$\begin{aligned} K_x(t_1, t_2) &= 0\cdot 1 + \sigma e^{-\alpha t_1}\cdot \sigma e^{\alpha t_2}, \qquad t_1 \geqslant t_2, \\ R_{xz}(t_1, t_2) &= -\frac{\sigma^2}{\alpha} e^{-\alpha t_2}\cdot 1 + \frac{\sigma}{\alpha} e^{-\alpha t_2}\cdot \sigma e^{t_1 \alpha}, \qquad t_1 \leqslant t_2, \end{aligned} \tag{3.3}$$

równość (1.5) zaś ma postać

$$\sigma e^{-\alpha t_1}\cdot \sigma e^{\alpha t_2} - \sigma e^{-\alpha t_2}\cdot \sigma e^{\alpha t_1} = \sigma^2[e^{-\alpha(t_1-t_2)} - e^{\alpha(t_1-t_2)}] = w(t_1-t_2). \tag{3.4}$$

Stosując przekształcenie Laplace'a do funkcji $\psi_j(t)$, $j = 1, 2$ i $w(t)$ otrzymamy

$$\Psi_1(s) = \frac{1}{s}, \qquad \Psi_2(s) = \frac{\sigma}{s-\alpha}, \qquad W(s) = \frac{2\alpha\sigma^2}{\alpha^2 - s^2}.$$

Zgodnie z (2.12) transformaty Laplace'a funkcji $\gamma_1(t)$ i $\gamma_2(t)$ mają postać

$$\Gamma_1(s) = \frac{\alpha^2-s^2}{2\alpha\sigma^2 s}, \quad \Gamma_2(s) = -\frac{\alpha+s}{2\alpha\sigma}.$$

Obliczając oryginały, otrzymamy:

$$\gamma_1(t) = \frac{\alpha}{2\sigma^2} - \frac{1}{2\alpha\sigma^2}\delta^{(1)}(t),$$

$$\gamma_2(t) = -\frac{1}{2\sigma}\delta(t) - \frac{1}{2\alpha\sigma}\delta^{(1)}(t),$$

gdzie $t > 0$ i $\delta(t)$ jest funkcją δ-Diraca.

Aby obliczyć funkcje $l_1(t)$ i $l_2(t)$, należy rozwiązać układ równań (2.13). W tym celu obliczamy współczynniki $a_{ji}(t)$, $i, j = 1, 2$, według wzoru (2.14)

$$a_{11}(t) = \int_{0^-}^{t} 0\, dt_2 = 0,$$

$$a_{21}(t) = \int_{0^-}^{t} 0\, dt_2 = 0,$$

$$a_{22}(t) = \int_{0^-}^{t}\left[-\frac{1}{2\sigma}\delta(t_2) - \frac{1}{2\alpha\sigma}\delta^{(1)}(t_2)\right]\sigma e^{-\alpha t_2}dt_2 = -1,$$

$$a_{12}(t) = \int_{0^-}^{t}\left[\frac{\alpha}{2\sigma^2} - \frac{1}{2\alpha\sigma^2}\delta^{(1)}(t_2)\right]\sigma e^{-\alpha t_2}dt_2 = -\frac{1}{2\sigma}e^{-\alpha t}.$$

Układ (2.13) ma postać:

$$(3.5) \qquad \begin{cases} l_1(t) = -\dfrac{\sigma^2 e^{-\alpha t}}{\alpha}, \\ -\dfrac{1}{2\sigma}e^{-\alpha t}\cdot l_1(t) = \dfrac{\sigma}{\alpha}e^{-\alpha t}. \end{cases}$$

Łatwo zauważyć, że układ równań (3.5) jest sprzeczny.

Zagadnienie to można rozwiązać, jeżeli założymy, że $l_2(t) = 0$ i jeżeli będziemy poszukiwać funkcji przejścia w postaci (2.15).

Obliczamy $d_j(t)$, $j = 1, 2$

$$d_1(t) = \frac{-\sigma^2}{\alpha}e^{-\alpha t},$$

$$d_2(t) = \frac{\sigma}{\alpha}e^{-\alpha t} - h_0(t)\sigma e^{-\alpha t} + h_1(t)\sigma\alpha e^{-\alpha t} - h_2(t)\sigma\alpha^2 e^{-\alpha t} + h_3(t)\sigma\alpha^3 e^{-\alpha t} - \ldots.$$

Aby rozwiązanie uczynić prostszym założymy, że $h_k(t) = 0$, $k \geqslant 1$. Wtedy układ równań (2.20) przyjmie postać:

$$\begin{cases} l_1(t) = -\dfrac{\sigma^2}{\alpha}e^{-\alpha t}, \\ -\dfrac{1}{2\sigma}e^{-\alpha t}\cdot l_1(t) = \dfrac{\sigma}{\alpha}e^{-\alpha t} - h_0(t)\sigma e^{-\alpha t}. \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ równań znajdziemy

$$h_0(t) = \frac{2-e^{-\alpha t}}{2\alpha}$$

i

$$l_1(t) = -\frac{\sigma^2 e^{-\alpha t}}{\alpha}.$$

Wstawiając obliczone niewiadome do (2.15) otrzymamy impulsową funkcję przejścia rozpatrywanego układu

$$l(t, t_2) = -\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha}\left[\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2\alpha}\delta^{(1)}(t_2)\right] + \frac{2-e^{-\alpha t}}{2\alpha}\delta(t-t_2).$$

Minimalną wartość średnią błędu kwadratowego można obliczyć według wzoru

$$\langle\varepsilon^2(t)\rangle_{\min} = K_z(t, t) - \int_0^T l(t, t_1)R_{xz}(t_1, t)dt_1.$$

Otrzymamy:

$$\langle\varepsilon^2(t)\rangle_{\min} = \frac{2\sigma^2}{\alpha^2}[\alpha t + e^{-\alpha t} + 1] - \frac{\sigma^2}{2\alpha^3}e^{-2\alpha t}\int_{0^-}^{t}[\alpha - \delta^{(1)}(t_1) -$$

$$-2\alpha e^{\alpha t}\delta(t-t_1) + \alpha\delta(t-t_1)](1-e^{\alpha t_1})dt_1 - \frac{\sigma^2}{2\alpha^3}(1-e^{\alpha t})e^{-\alpha t}\int_{t^-}^{T}[\alpha - \delta^{(1)}(t_1) -$$

$$-2\alpha e^{\alpha t}\delta(t-t_1) + \alpha\delta(t-t_1)]e^{-\alpha t_1}dt_1 = \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}[4\alpha t + e^{-\alpha t}(9+e^{-\alpha T}) - e^{-2\alpha t}(2+\alpha t) - e^{-\alpha T} + 2].$$

Literatura cytowana w tekście

1. И. Б. Челпанов, *Оптимальная обработка сигналов в навигационных системах*, Наука, Москва 1967.
2. А. Н. Колмогоров, *Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей*, Изв. АН СССР, Матем., 1 (1949).
3. J. Nizioł, *Dynamika żyroskopów ze szczególnym uwzględnieniem żyroskopu całkującego w nieliniowym ujęciu deterministycznym i probabilistycznym*, Zeszyty Naukowe Polit. Krakowskiej, 1 (1975).
4. N. Wiener, *Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time*, Series John Wiley, 4 (1949).
5. L. Zadeh, I. R. Raggazzini, *An extension of Wiener's theory of prediction*, J. Appl. Physics, 21 (1950).
6. M. Shinbrot, *On the integral equation occuring in optimisation theory with nonstationary inputs*, J. Mathem. and Physics, 1, 36 (1957).

Резюме

ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТИ ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В НЕСТАЦИОНАРНОМ СЛУЧАЕ

Целью работы является определение оптимальной весовой функции для динамической системы в нестационарном случае, когда автокорреляционная функция $K_x(t_1, t_2)$ сигнала на входе $X(t)$ а также корреляционная функция $R_{xz}(t_1, t_2)$ входа $X(t)$ и заданного выхода $Z(t)$ имеют вид

$$K_x(t_1, t_2) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(t_1)\psi_j(t_2), \qquad t_1 \geqslant t_2,$$

$$R_{xz}(t_1, t_2) = \sum_{j=1}^{m} \chi_j(t_1)\psi_j(t_2), \qquad t_1 \geqslant t_2,$$

где $\varphi_j(t)$, $\psi_j(t)$, $\chi_j(t)$ некоторые заданные функции. Предполагается, что выполняется условие

$$\sum_{j=1}^{m} [\varphi_j(t_1)\psi_j(t_2) - \varphi_j(t_2)\psi_j(t_2)] = w(t_1 - t_2).$$

Решен пример, в котором найдена оптимальная весовая функция динамической системы, интегрирующая случайную функцию $X(t)$ (вид корреляционной функции $K_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha(\tau)}$, математическое ожидание равно нулю), когда время наблюдения системы является конечным промежутком $t \in (0, T)$.

Summary

EXAMPLE OF INVESTIGATING THE ACCURACY OF A LINEAR DYNAMIC SYSTEM IN A NONSTATIONARY CASE

In the present paper is discussed a method of calculating the optimal transfer impulse function for dynamic system in a nonstationary case, if the signal's autocorrelation function $K_x(t_1, t_2)$ at the input $X(t)$ and the intecorrelation $R_{xz}(t_1, t_2)$ between the input $X(t)$ and the required output $Z(t)$ have the following special form

$$K_x(t_1, t_2) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(t_1)\psi_j(t_2), \qquad t_1 \geqslant t_2,$$

$$R_{xz}(t_1, t_2) = \sum_{j=1}^{m} \chi_j(t_1)\psi_j(t_2), \qquad t_1 \geqslant t_2,$$

where $\varphi_j(t)$, $\psi_j(t)$ and $\chi_j(t)$ stand for certain scalar functions. Moreover we presume the following condition to be satisfied

$$\sum_{j=1}^{m} [\varphi_j(t_1)\psi_j(t_2) - \varphi_j(t_2)\psi_j(t_1)] = w(t_1 - t_2).$$

An example is given of calculating the optimal transfer function for a dynamic system, which integrates the stochastic function $X(t)$ (the autocorrelation function $K_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha(\tau)}$ and its mathematical expectation are zero), in the case when the system is observed for a finite interval of time $t \in (0, T)$.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 sierpnia 1975 r.