

ZAGADNIENIE MIKROPOLARNIE SPRĘŻYTEJ RURY GRUBOŚCIENNEJ

ZBIGNIEW OLESIAK, MONIKA WĄGROWSKA (WARSZAWA)

W pracy ograniczymy się do rozpatrzenia zagadnień osiowo-symetrycznych w przypadku walca o przekroju pierścienia kołowego. Podobnie jak to ma miejsce w klasycznej teorii sprężystości, rozpatrzmy oddzielnie dwa zagadnienia: pierwsze z nich można uważać za uogólnienie zagadnienia Lamégo, drugie da się sprowadzić, w przypadku klasycznym, do zagadnienia skręcania. Przyjmujemy ośrodek mikropolarny z niezwiązanymi obrotami. Jeśli chodzi o ośrodek ze związanymi obrotami to jeszcze KOITER [3] podał przykład skręcania pręta o przekroju kołowym, ogólniej zagadnienie rozpatrzył SOKOŁOWSKI [4, 5]. Rozważania ogólne dotyczące ośrodka mikropolarnego znajdujemy w monografiach NOWACKIEGO [1]. Skręcanie prętów pryzmatycznych rozpatrywali SMITH [6], İEŞAN [7], USIDUS [9, 10]. Fale rotacyjne rozpatrzył NOWACKI [2], a drgania mikropolarnie sprężystych walców kołowych SMITH [6] oraz WILLSON [8].

Przedstawione rozwiązania otrzymano nie w przypadku ogólnym, lecz przy spełnieniu pewnych dodatkowych warunków, np. w przypadku uogólnionego zagadnienia Lamégo, które odpowiada równaniom różniczkowym (2.2), założono, że spełnione są warunki identyczne jak w przypadku klasycznym. Okazało się, że rozwiązanie w płaskim stanie odkształcenia nie różni się, przy identycznych warunkach brzegowych, od klasycznego. Założenie, że w całym obszarze walca znikają naprężenia normalne σ_{zz} nie prowadzi teraz do zagadnienia płaskiego stanu naprężenia w mikropolarnej teorii sprężystości, lecz powoduje wprowadzenie pewnego «skrępowania» w postaci dodatkowego związku między stałymi całkowania. Naszym celem jest znalezienie możliwie prostych rozwiązań odpowiadających pewnym warunkom brzegowym, przy pewnych założeniach upraszczających (np., że $u_{z,z}$, u_r i φ_0 nie zależą od z). W ten sposób układ równań różniczkowych cząstkowych (1.1) lub (1.2) został sprowadzony odpowiednio do układu równań różniczkowych zwyczajnych (2.2) lub (3.4).

Układ równań (1.2) jest uogólnieniem równań klasycznej teorii sprężystości odpowiadających skręcaniu prętów w przypadku osiowej symetrii i może dotyczyć również przekrojów dwuspójnych w odróżnieniu od dotychczas rozpatrywanych jednospójnych. Nie zajmujemy się tu jednak badaniem zagadnień skręcania lub wpływu, jaki ma przyjęcie w obliczeniach modelu ośrodka mikropolarnego na wielkość momentu skręcającego, czy też kąta skręcania pręta pryzmatycznego (np. USIDUS [9, 10]). Interesować nas będzie rozkład naprężeń momentowych i siłowych wewnątrz walca wywołany działaniem sił i momentów na pobocznicę walca. Nie dyskutujemy tu również, co było przyczyną powstania naprężeń momentowych, mogą one być wynikiem działania na przykład pola magnetycznego.

Jeżeli założymy, że naprężenia momentowe $\mu_{rr}(a) = m_a$, $\mu_{rr}(b) = m_b$, działające na powierzchniach walcowych są stałe, to, przy założeniach p. 4 otrzymamy, że rozkład naprężeń momentowych $\mu_{rr}(r)$ i $\mu_{\theta\theta}(r)$ wzdłuż promienia przypomina rozkład naprężeń normalnych w klasycznym zadaniu Lamégo.

1. Równania podstawowe

W przypadku osiowej symetrii, układ równań różniczkowych równowagi w przemieszczeniach i obrotach, momentowej teorii sprężystości z niezwiązanymi obrotami przyjmuje znaną postać [1], którą podamy tu w zmodyfikowanym zapisie:

$$\begin{aligned}
 & (\mu + \alpha) \left(B_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_r + (\lambda + \mu - \alpha) e_{,r} - 2\alpha \varphi_{0,z} = 0, \\
 (1.1) \quad & (\mu + \alpha) \left(B_0 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_z + (\lambda + \mu - \alpha) e_{,z} + \frac{2\alpha}{r} (r\varphi_0)_{,r} = 0, \\
 & (\gamma + \varepsilon) \left(B_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi_0 - 4\alpha \varphi_0 + 2\alpha (u_{r,z} - u_{z,r}) = 0. \\
 & (\mu + \alpha) \left(B_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_\theta + 2\alpha (\varphi_{r,z} - \varphi_{z,r}) = 0, \\
 (1.2) \quad & (\gamma + \varepsilon) \left(B_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi_r - 4\alpha \varphi_r + (\beta + \gamma - \varepsilon) \kappa_{,r} - 2\alpha u_{0,z} = 0, \\
 & (\gamma + \varepsilon) \left(B_0 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi_z - 4\alpha \varphi_z + (\beta + \gamma - \varepsilon) \kappa_{,z} + \frac{2\alpha}{r} (ru_0)_{,r} = 0,
 \end{aligned}$$

gdzie

$$(1.3) \quad e = \frac{1}{r} (ru_r)_{,r} + u_{z,z}, \quad \kappa = \frac{1}{r} (r\varphi_r)_{,r} + \varphi_{z,z},$$

$$(1.4) \quad B_0 f = \frac{1}{r} (rf)_{,r},$$

$$(1.5) \quad B_1 f = \left[\frac{1}{r} (rf)_{,r} \right]_{,r},$$

μ , λ , α , β , γ , ε są stałymi materiałowymi.

W układzie współrzędnych walcowych r , θ , z oraz przy założeniu osiowej symetrii układy równań różniczkowych (1.1) i (1.2) są niezależne. Pierwszy z nich będzie spełniony przez wektory $\mathbf{u} = (u_r, 0, u_z)$ i $\boldsymbol{\varphi} = (0, \varphi_0, 0)$ przy znikających następujących składowych naprężeń siłowych i momentowych: $\sigma_{r\theta}$, $\sigma_{\theta r}$, $\sigma_{\theta z}$, $\sigma_{z\theta}$, μ_{rr} , $\mu_{\theta\theta}$, μ_{zz} , μ_{rz} i μ_{zr} . Drugi z nich spełnią wektory $\mathbf{u} = (0, u_\theta, 0)$ i $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_r, 0, \varphi_z)$, a znikać będą następujące składowe naprężeń: σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz} , σ_{rz} , σ_{zr} , $\mu_{r\theta}$, $\mu_{\theta r}$, $\mu_{\theta z}$ oraz $\mu_{z\theta}$.

W klasycznej teorii sprężystości rozpatrywane są trzy warianty zagadnienia Lamégo (rury grubościennej), mianowicie płaski stan odkształcenia, płaski stan naprężenia oraz

rura zamknięta dnami (dot. przekrojów w odpowiedniej odległości od den). W dalszej części pracy rozpatrzmy oddzielnie dwa przypadki odpowiadające układowi równań różniczkowych (1.1) i układowi równań (1.2) oraz przedyskutujemy przypadki szczególne.

2. Rozwiązanie układu równań różniczkowych (1.1)

Zakładamy, że naprężenia siłowe i momentowe nie zależą od współrzędnej z . Z odpowiednich wzorów:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2\mu u_{r,r} + \lambda e, \\ \sigma_{rz} &= \mu(u_{z,r} + u_{r,z}) - \alpha(u_{r,z} - u_{z,r}) + 2\alpha\varphi_0, \\ \mu_{r0} &= \gamma\left(\varphi_{0,r} - \frac{1}{r}\varphi_0\right) + \varepsilon\left(\varphi_{0,r} + \frac{1}{r}\varphi_0\right), \end{aligned}$$

wynika, że $u_{z,z}$, u_r oraz φ_0 nie zależą od z . Równania (1.1) przyjmą postać następującą:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} (2\mu + \lambda)B_1 u_r + (\lambda + \mu - \alpha)u_{z,zr} &= 0, \\ (\mu + \alpha)B_0 u_z + 2\alpha \frac{1}{r}(r\varphi_0),r &= 0, \\ (\gamma + \varepsilon)B_1 \varphi_0 - 4\alpha\varphi_0 - 2\alpha u_{z,r} &= 0. \end{aligned}$$

Rozpatrzmy teraz trzy przypadki:

a) $u_z \equiv 0$ — płaski stan odkształcenia,

b) $\sigma_{zz} \equiv 0$, skąd $(2\mu + \lambda)u_{z,z} = -\lambda \frac{1}{r}(ru_r),r$,

c) $\sigma_{zz} = \text{const} = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2}$.

Przypadek a). Dla $u_z \equiv 0$, rozwiązując pierwsze równanie (2.2), otrzymamy: $u_r = Ar + B/r$, z drugiego równania wyniknie, że $r\varphi_0 = C$, a z trzeciego równania dostaniemy, że $C = 0$, a więc dokładnie rozwiązanie klasycznego zagadnienia Lamégo.

Przypadek b). Biorąc pod uwagę, że $(2\mu + \lambda)u_{z,zr} = -\lambda B_1 u_r$, otrzymamy z pierwszego równania (2.2) równanie $B_1 u_r = 0$, skąd wynika $u_r = Ar + B/r$. Drugie i trzecie równanie (2.2) przyjmie postać następującą:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} (\mu + \alpha)(ru_{z,r}),r + 2\alpha(r\varphi_0),r &= 0, \\ (\gamma + \varepsilon)B_1 \varphi_0 - 4\alpha\varphi_0 - 2\alpha u_{z,r} &= 0. \end{aligned}$$

Całkując pierwsze z powyższych równań otrzymamy równanie

$$(2.4) \quad (\mu + \alpha)u_{z,r} + 2\alpha\varphi_0 = \frac{1}{r}C,$$

a następnie przekształcając drugie równanie (2.3) dostaniemy

$$(2.5) \quad B_1 \varphi_0 - \frac{1}{l^2} \varphi_0 = \frac{C}{2\mu l^2} \frac{1}{r},$$

gdzie $l^2 = \frac{(\mu + \alpha)(\gamma + \varepsilon)}{4\mu\alpha}$. Całką równania (2.5) ma postać następującą:

$$(2.6) \quad \varphi_0 = C_1 I_1 \left(\frac{r}{l} \right) + C_2 K_1 \left(\frac{r}{l} \right) - \frac{C}{2\mu} \frac{1}{r},$$

gdzie I_1 jest funkcją Bessela urojonego argumentu, a K_1 funkcją MacDonalda. Z kolei, po podstawieniu (2.6) do (2.4) i scałkowaniu, otrzymamy

$$(2.7) \quad u_z = \frac{1}{\mu} C \ln r + C_3 z - \frac{2\alpha l}{\mu + \alpha} \left[C_1 I_0 \left(\frac{r}{l} \right) + C_2 K_0 \left(\frac{r}{l} \right) \right].$$

Po przekształceniach i podstawieniu do wzorów na naprężenia, otrzymamy

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2\mu \left(A - C_3 - \frac{B}{r^2} \right), \\ \sigma_{rz} &= \frac{C}{r}, \\ \mu_{r0} &= \frac{1}{l} (\gamma + \varepsilon) \left[C_1 I_0 \left(\frac{r}{l} \right) - C_2 K_0 \left(\frac{r}{l} \right) \right] - \frac{2\varepsilon}{r} \left[C_1 I_1 \left(\frac{r}{l} \right) + C_2 K_1 \left(\frac{r}{l} \right) \right]. \end{aligned}$$

Ponadto, z założenia znikania σ_{zz} , mamy

$$(2.9) \quad (2\mu + \lambda) C_3 = -2\lambda A.$$

Z powyższych wzorów wynika, że stałe A oraz B można wyznaczyć z warunków brzegowych $\sigma_{rr}(a) = -p_a$, $\sigma_{rr}(b) = -p_b$, a niezależnie stałe C_1 i C_2 wyznaczymy z warunków $\mu_{r,z}(a) = \mu_a$, $\mu_{r0}(b) = \mu_b$. Stałą C wyznacza się np. z warunku $\sigma_{rz}(a) = t_a$, wtedy wartość liczbowa $\sigma_{rz}(b)$ wynika z obliczeń i nie może być przyjęta dowolnie. Rezultat taki nie jest niespodziewany, wynika bowiem z założenia o niezależności naprężeń od zmiennej z . Jeżeli $\mu_a = \mu_b = t_a = t_b = 0$, to rozwiązanie znowu nie różni się od klasycznego, z wyjątkiem być może wartości stałych materiałowych.

P r z y p a d e k c). Wykorzystując obecnie wzór $\sigma_{zz} = \text{const}$, otrzymamy

$$(2.10) \quad (2\mu + \lambda) u_{z,z} = -\lambda \frac{1}{r} (r u_r)_{,r} + \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2};$$

rozwiązując następnie równania (2.2) stwierdzimy, że dyskusja przebiega podobnie jak w p. b).

3. Rozwiązanie układu równań różniczkowych (1.2)

Podobnie jak poprzednio wyjdźmy z założenia, że składowe naprężeń i momentów na pobocznicę σ_{r0} , μ_{rz} oraz μ_{rr} nie zależą od zmiennej z . Z odpowiednich wzorów [1]:

$$(3.1) \quad \sigma_{r0} = (\mu + \alpha) u_{0,r} - (\mu - \alpha) \frac{1}{r} u_0 - 2\alpha \varphi_z,$$

$$(3.2) \quad \mu_{rz} = \gamma (\varphi_{r,z} - \varphi_{z,r}) - \varepsilon (\varphi_{r,z} - \varphi_{z,r}),$$

$$(3.3) \quad \mu_{rr} = 2\gamma \varphi_{r,r} + \beta \frac{1}{r} (r \varphi_r)_{,r} + \beta \varphi_{z,z},$$

otrzymamy, że wtedy φ_r , φ_z oraz u_0 nie zależą od z . Równania (1.2) przyjmą postać następującą:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} (\mu + \alpha) B_1 u_0 - 2\alpha \varphi_{z,r} &= 0, \\ (\gamma + \varepsilon) B_1 \varphi_r - 4\alpha \varphi_r + (\beta + \gamma - \varepsilon) \kappa_{,r} &= 0, \\ (\gamma + \varepsilon) B_0 \varphi_z - 4\alpha \varphi_z + (\beta + \gamma - \varepsilon) \kappa_{,z} + 2\alpha \frac{1}{r} (r u_0)_{,r} &= 0. \end{aligned}$$

Ponieważ w rozważanym przypadku

$$(3.5) \quad \kappa = \frac{1}{r} (r \varphi_r)_{,r},$$

otrzymamy, że

$$(3.6) \quad \kappa_{,r} = B_1 \varphi_r, \quad \kappa_{,z} = 0.$$

Po zróżniczkowaniu równania (3.4)₃ względem r i przekształceniach dostaniemy układ równań różniczkowych w następującej postaci:

$$(3.7) \quad 2\mu B_1 u_0 - (\gamma + \varepsilon) B_1 \varphi_{z,r} = 0,$$

$$(3.8) \quad B_1 \varphi_r - \sigma^2 \varphi_r = 0,$$

$$(3.9) \quad B_1 \varphi_{z,r} - \frac{1}{l^2} \varphi_{z,r} = 0.$$

Rozwiązując równania (3.8) i (3.9), a następnie (3.7) otrzymamy

$$(3.10) \quad \varphi_r = A_1 I_1(\sigma r) + C_1 K_1(\sigma r),$$

$$(3.11) \quad \varphi_{z,r} = A_2 I_1\left(\frac{r}{l}\right) + C_2 K_1\left(\frac{r}{l}\right),$$

$$(3.12) \quad \varphi_z = l A_2 I_0\left(\frac{r}{l}\right) - l C_2 K_0\left(\frac{r}{l}\right) + C,$$

$$(3.13) \quad 2\mu u_0 = (\gamma + \varepsilon) \left[A_2 I_1\left(\frac{r}{l}\right) + C_2 K_1\left(\frac{r}{l}\right) \right] + A_3 r + \frac{1}{r} C_3,$$

$$\text{gdzie } \sigma^2 = \frac{4\alpha}{4\gamma + \beta}, \quad l^2 = \frac{(\mu + \alpha)(\gamma + \varepsilon)}{4\alpha\mu}.$$

Z warunków brzegowych na składową normalną naprężenia momentowego otrzymamy

$$(3.14) \quad A_1 = \frac{m_a K(b) - m_b K(a)}{I(a) K(b) - I(b) K(a)},$$

$$(3.15) \quad C_1 = \frac{m_a I(b) - m_b I(a)}{I(a) K(b) - I(b) K(a)},$$

gdzie

$$m_a = \mu_{rr}(a), \quad m_b = \mu_{rr}(b),$$

$$I(x) = (2\gamma + \beta) \sigma I_0(\sigma x) - \frac{2\gamma}{x} I_1(\sigma x),$$

$$K(x) = (2\gamma + \beta) \sigma K_0(\sigma x) + \frac{2\gamma}{x} K_1(\sigma x).$$

Po wykorzystaniu warunków brzegowych na składową styczną tensora naprężeń momentowych $\mu_{rz}(a) = n_a$ oraz $\mu_{rz}(b) = n_b$, obliczymy kolejne dwie stałe całkowania:

$$(3.16) \quad A_2 = \frac{1}{\gamma - \varepsilon} \frac{n_b K_1\left(\frac{a}{l}\right) - n_a K_1\left(\frac{b}{l}\right)}{I_1\left(\frac{a}{l}\right) K_1\left(\frac{b}{l}\right) - I_1\left(\frac{b}{l}\right) K_1\left(\frac{a}{l}\right)},$$

$$(3.17) \quad C_2 = \frac{1}{\gamma - \varepsilon} \frac{n_a I_1\left(\frac{b}{l}\right) - n_b I_1\left(\frac{a}{l}\right)}{I_1\left(\frac{a}{l}\right) K_1\left(\frac{b}{l}\right) - I_1\left(\frac{b}{l}\right) K_1\left(\frac{a}{l}\right)}.$$

Pozostałe dwie stałe wyznaczmy z warunku na składową styczną naprężenia siłowego na pobocznicy walca $\sigma_{r0}(a) = \tau_a$, $\sigma_{r0}(b) = \tau_b$. Otrzymamy

$$(3.18) \quad C_3 = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \{ \tau_b - \tau_a + [a] - [b] \},$$

$$(3.19) \quad \alpha \left(\frac{1}{\mu} A_3 - 2C \right) = \frac{1}{b^2 - a^2} \{ b^2 \tau_b - a^2 \tau_a + a^2 [a] - b^2 [b] \},$$

gdzie przyjęliśmy następujące oznaczenie:

$$(3.20) \quad [r] = \frac{1}{2} (\gamma + \varepsilon) \left\{ A_2 \left[\frac{1}{l} I_0\left(\frac{r}{l}\right) - \frac{1}{r} I_1\left(\frac{r}{l}\right) \right] - C_2 \left[\frac{1}{l} K_0\left(\frac{r}{l}\right) - \frac{1}{r} K_1\left(\frac{r}{l}\right) \right] \right\} + \\ + \frac{\alpha}{2\mu l} (\gamma + \varepsilon) \left[A_2 I_0\left(\frac{r}{l}\right) + C_2 K_0\left(\frac{r}{l}\right) \right] - 2\alpha l \left[A_2 I_0\left(\frac{r}{l}\right) - C_2 K_0\left(\frac{r}{l}\right) \right].$$

Normalne naprężenia momentowe w kierunku osi z nie mogą być przyjęte w sposób dowolny i są określone poprzednimi wzorami, przyjmując postać następującą:

$$(3.21) \quad \mu_{zz} = \beta \frac{1}{l} A_1 I_0\left(\frac{r}{l}\right) - \beta \frac{1}{l} C_1 K_0\left(\frac{r}{l}\right);$$

wynika stąd, że μ_{zz} zależą od r . W podobny sposób otrzymamy

$$(3.22) \quad \sigma_{z0} = 2\alpha \left[A_1 I_1\left(\frac{r}{l}\right) + C_1 K_1\left(\frac{r}{l}\right) \right].$$

W rozwiązaniu przedstawionym wzorami (3.10), (3.12) i (3.13) występuje 7 stałych całkowania, z których 6 wyznaczyliśmy z warunków brzegowych, siódmą wyznaczmy poszukując tylko takich rozwiązań układu równań (3.7)–(3.9), które zarazem spełniają równanie (3.4)₃. Dodatkowa stała wynika z podwyższenia rzędu równania, w trakcie rozseparowywania układu, na skutek różniczkowania równania (3.4)₃. W ten sposób otrzymamy związek

$$(3.23) \quad 2\alpha A_3 + \mu C = 0.$$

Jeżeli $n_a = n_b = 0$, stałe A_2 i C_2 znikają. Jeżeli ponadto $\tau_a = \tau_b = 0$, rozwiązanie układu równań różniczkowych redukuje się do φ_r w postaci podanej w (3.10); u_0 oraz φ_z znikają wtedy tożsamościowo.

4. Rozwiązanie w przypadku $\mu_{zz} = \text{const}$.

Rozwiązanie otrzymane w poprzednim punkcie zawierało tę niedogodność, że naprężenia momentowe w kierunku osi z nie były stałe, lecz dane wzorem (3.21). Załóżmy obecnie, że $\mu_{zz} = \text{const} = C$. Warunek ten będzie spełniony, gdy

$$(4.1) \quad (2\gamma + \beta)\varphi_{z,z} = D, \quad \beta \frac{1}{r} (r\varphi_r)_{,r} = C - D.$$

Przy założeniu, że C_1 i D_1 nie zależą od z , otrzymamy następujące wzory

$$(4.2) \quad \varphi_r = \frac{C-D}{2} r + \frac{1}{r} C_1,$$

$$(4.3) \quad \varphi_z = \frac{D}{2\gamma + \beta} z + D_1,$$

$$(4.4) \quad \kappa = \frac{(2\gamma + \beta)C - 2\gamma D}{(2\gamma + \beta)\beta}.$$

Podstawiając powyższe wzory do układu równań różniczkowych (1.2) otrzymamy

$$(4.5) \quad \left(B_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_0 = 0,$$

$$(4.6) \quad u_{0,z} = -2\varphi_r,$$

$$(4.7) \quad (ru_0)_{,r} = 2r\varphi_z.$$

Równania (4.6) i (4.7) będą spełnione, gdy u_0 przyjmie postać następującą:

$$(4.8) \quad u_0 = \frac{D-C}{\beta} zr - 2C_1 \frac{z}{r} + D_1 r,$$

oraz gdy

$$(4.9) \quad 2\gamma D = (2\gamma + \beta)C,$$

skąd wynika, że $\kappa \equiv 0$. Ponadto otrzymamy

$$(4.10) \quad \varphi_r = -\frac{1}{4\gamma} Cr + \frac{1}{r} C_1,$$

$$(4.11) \quad \varphi_z = \frac{1}{2\gamma} Cz + D_1,$$

$$(4.12) \quad u_0 = \frac{1}{2\gamma} Crz + D_1 r - \frac{2}{r} C_1 z,$$

$$(4.13) \quad \sigma_{r0} = \frac{4\mu}{r^2} C_1 z,$$

$$(4.14) \quad \mu_{rr} = -\frac{1}{2} C - 2C_1 \frac{\gamma}{r^2},$$

$$(4.15) \quad \mu_{00} = -\frac{1}{2} C + 2C_1 \frac{\gamma}{r^2}.$$

Wynika stąd następujący związek:

$$(4.16) \quad \mu_{rr} + \mu_{00} = -C,$$

otrzymujemy również, że:

$$(4.17) \quad \mu_{rz} = \mu_{zr} = 0, \quad \sigma_{z0} = \mu u_{0,z}.$$

Po wykorzystaniu warunków brzegowych na składowe normalne naprężeń momentowych $\mu_{rr}(a) = m_a$, $\mu_{rr}(b) = m_b$ otrzymamy

$$(4.18) \quad 2\gamma C_1 = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} (m_b - m_a),$$

$$(4.19) \quad C = 2 \frac{m_a a^2 - m_b b^2}{b^2 - a^2},$$

$$(4.20) \quad \mu_{rr} = \frac{m_b b^2 - m_a a^2}{b^2 - a^2} - \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} (m_b - m_a) \frac{1}{r^2},$$

$$(4.21) \quad \mu_{00} = \frac{m_b b^2 - m_a a^2}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} (m_b - m_a) \frac{1}{r^2}.$$

Funkcje (4.10)—(4.12) będą rozwiązaniem układu równań różniczkowych (1.2), jeżeli pochodna składowej stycznej naprężenia względem zmiennej z przyjmie następujące wartości na powierzchniach walcowych:

$$(4.22) \quad \sigma_{r0,z}(a) = \frac{2\mu}{\gamma} \frac{b^2}{b^2 - a^2} (m_a - m_b),$$

$$\sigma_{r,z} b = \frac{2\mu}{\gamma} \frac{a^2}{b^2 - a^2} (m_b - m_a)$$

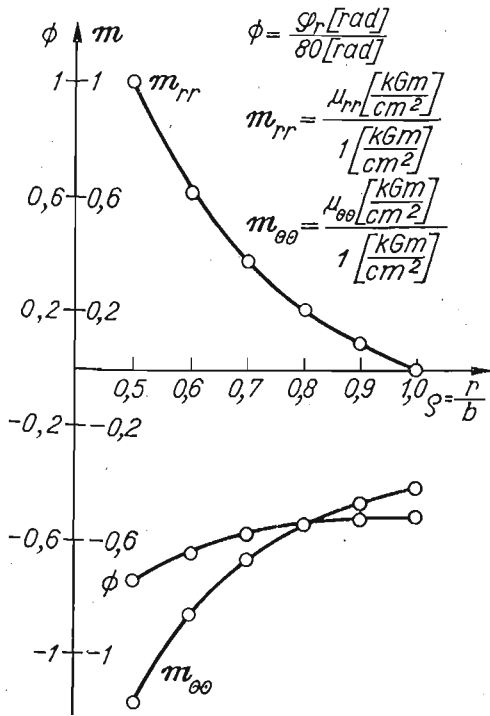
oraz gdy

$$(4.23) \quad \mu_{zz} = C = 2 \frac{m_a a^2 - m_b b^2}{b^2 - a^2}.$$

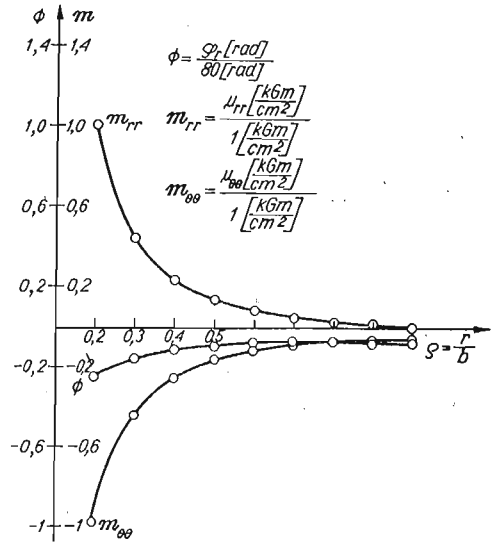
Stała D_1 , występująca we wzorach (4.11) i (4.12) nie odgrywa żadnej roli, jeżeli warunki brzegowe są dane w naprężeniach i naprężeniach momentowych.

5. Uwagi końcowe

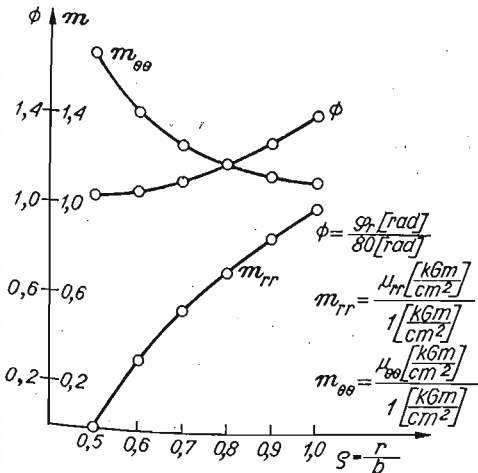
Założenia wprowadzone przy rozwiązywaniu poszczególnych przypadków wpływają na liczbę możliwych do spełnienia warunków brzegowych. W przypadku a) (p. 2) możliwe były do spełnienia tylko warunki na σ_{rr} (lub u_r), z kolei w przypadku b) jeden z warunków na σ_{rz} , na powierzchni walcowej $r = a$, lub $r = b$, musiał wynikać z rozwiązania, w przeciwnym razie nie byłoby spełnione założenie, że naprężenia nie zależą od współrzędnej z .



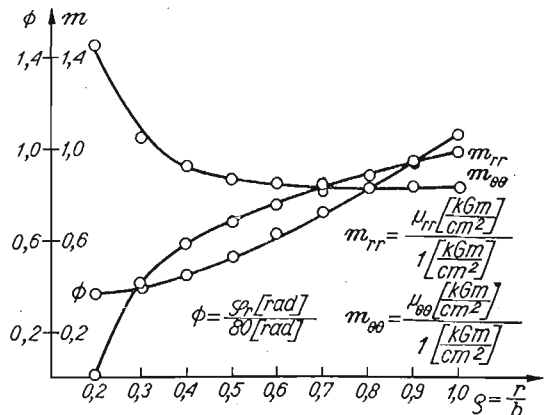
Rys. 1. μ_{rr} przyłożone na powierzchni wewnętrznej, $a/b = 0,5$



Rys. 2. μ_{rr} przyłożone na powierzchni wewnętrznej, $a/b = 0,2$



Rys. 3. μ_{rr} przyłożone na powierzchni zewnętrznej, $b/a = 2$



Rys. 4. μ_{rr} przyłożone na powierzchni zewnętrznej, $b/a = 5$

Założenie, w p. 4, że $\mu_{zz} = \text{const}$ oraz że wielkości C_1 i D_1 są stałymi pozwoliło na dowolne dysponowanie tylko dwoma warunkami brzegowymi z trzech, np. $\mu_{rr}(a)$ i $\mu_{rr}(b)$. Z podanych rozwiązań widać, że przy danych stałych normalnych naprężeniach momentowych na powierzchniach walca muszą wystąpić określone naprężenia momentowe i styczne w przekroju poprzecznym, prostopadłym do osi walca; obok naprężeń momentowych μ_{rr} wystąpi dodatkowo składowa styczna naprężenia siłowych σ_{r0} .

Warto również zwrócić uwagę na to, że stałe całkowania C_1 i C , w zagadnieniu z p. 4, nie zależą od stałych materiałowych, podobnie jak w zagadnieniu Lamégo. Inaczej rzecz się dzieje w przypadku zagadnienia rozpatrywanego w p. 3, gdzie μ_{rr} zależy od stałych materiałowych.

Na załączonych rysunkach podaliśmy wykresy naprężeń momentowych μ_{rr} i μ_{00} oraz składowej promieniowej wektora obrotu φ_r wzdłuż promienia rury, w przypadku zadania rozpatrywanego w p. 3 i znikania pozostałych składowych naprężeń na powierzchniach walcowych. Rozpatrzono cztery przypadki dla dwóch stosunków promienia zewnętrznego i wewnętrznego walca ($b/a = 2$, $b/a = 5$) oraz dla naprężeń momentowych μ_{rr} danych na zewnętrznej powierzchni walca i zerowych na powierzchni wewnętrznej lub na odwrót. Jak było do przewidzenia, naprężenia momentowe μ_{rr} zanikają szybciej wraz z głębokością w porównaniu z zagadnieniem z p. 4, gdzie charakter wykresów jest identyczny, jak w zagadnieniu Lamégo. Rysunki sporządzono we współrzędnych bezwymiarowych, a normalne bezwymiarowe naprężenia momentowe $\left(\frac{1}{2\gamma}\mu_{rr}\right)$ na odpowiednich powierzchniach są równe jedności. Stałe materiałowe wynoszą odpowiednio $\sigma = 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$, $2\gamma = 1$, $\beta = 0$.

Literatura cytowana w tekście

1. W. NOWACKI, *Teoria niesymetrycznej sprężystości*, PWN, Warszawa 1971, *Theory of micropolar elasticity*, CISM-25, Springer Verlag, 1970.
2. W. NOWACKI, *Propagation of rotation waves in asymmetric elasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Tech., 7, 16 (1968) 309.
3. W. KOITER, *Couple-stresses in the theory of elasticity I, II*, Proc. Ned. Akad. Wet., (1964), 17 - 44.
4. M. SOKOŁOWSKI, *Couple-stresses in problems of torsion of prismatic bars*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Tech., 8, 13 (1965).
5. M. SOKOŁOWSKI, *O teorii naprężeń momentowych w ośrodkach ze związanymi obrotami*, PWN Warszawa 1972.
6. A. C. SMITH *Torsion and vibrations of cylinders of a micropolar elastic solid*. W: *Recent Advances in Eng. Sciences*, tom 5/II, Gordon & Breach, 1970.
7. D. IEŞAN, *Torsion of micropolar elastic beams*, Int. J. Engng. Sci., 11 (1971), 9.
8. A. J. WILLSON, *The micropolar elastic vibrations of a circular cylinder*, Int. J. Engng. Sci., 10, (1972), 17 - 22.
9. C. USIDUS, *Wpływ naprężeń momentowych w dwóch modelach ciał mikropolarnych na rozwiązania zagadnień płaskich oraz teorii skręcania*, Rozprawa doktorska, IPPT PAN (1973).
10. C. USIDUS, *Naprężenia momentowe w tarczy kołowej*, Rozpr. Inż., 1, 21 (1973).
11. Z. OLESIAK, M. WĄGROWSKA, *Micropolar, elastic, thick-walled tube*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Tech. (w druku).

Резюме

РЕШЕНИЕ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ В ПОСТАНОВКЕ МИКРОПОЛЯРНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В рамках микрополярной моментной теории упругости рассматривается задача толстостенной трубы, нагруженной по цилиндрическим поверхностям. Обсуждены три случая, отвечающие обобщенной задаче Ляме, обобщенному кручению и распределению моментов, нормальных к боковым поверхностям. Результаты даны также в виде диаграмм.

Summary

THE PROBLEM OF A MICROPOLAR ELASTIC THICK-WALLED TUBE

Within the frames of the micropolar theory of elasticity with free rotations, the problem of a thick-walled tube is considered under tractions applied to the cylindrical surfaces. Three cases are examined corresponding to the generalized Lamé problem, generalized torsion and the torsion due to a distribution of moments normal to the surfaces. The results are presented also in the diagrams.

UNIWERSYTET WARSZAWSKI
INSTYTUT MECHANIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 31 października 1975 r.
