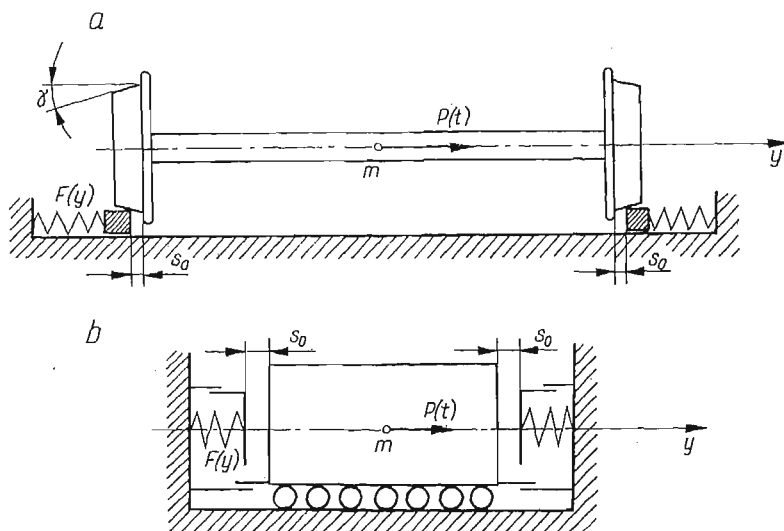


STATECZNOŚĆ TECHNICZNA DRGAŃ BOCZNYCH POJEDYNCZEGO ZESTAWU
KOŁOWEGO PORUSZAJĄCEGO SIĘ WZDŁUŻ TORU Z NIELINIOWĄ SPRĘŻYSTOŚCIĄ
POPZECZNĄ

ALICJA PIENIAŻEK, WIESŁAW PIENIAŻEK (KRAKÓW)

1. Wstęp

W niniejszej pracy zastosujemy przedstawioną w [1] teorię badania stateczności technicznej nieliniowych układów nieautonomicznych, do badania pewnego układu o jednym stopniu swobody, którego schemat i model dynamiczny jest przedstawiony na rys. 1.



Rys. 1

Modelem takim można zastąpić np. pojedynczy zestaw kołowy pojazdu szynowego poruszający się wzdłuż toru i wykonujący drgania boczne w pionowej płaszczyźnie przechodzącej przez jego oś obrotu, bez uwzględnienia sił wynikających z tzw. poślizgów sprężystych, które zachodzą w strefie kontaktu koła z szyną. Siły te będą uwzględnione w następnych pracach, w których będą rozpatrywane układy o dwóch stopniach swobody, uwzględniające drgania wspomnianego zestawu w płaszczyźnie poziomej przechodzącej przez jego oś obrotu.

Przyjmijmy dalej, że zderzenia występujące po przekroczeniu luzu są plastyczne; tzn. koło po dotknięciu szyny swoim obrzeżem porusza się dalej wraz z nią jako jedno ciało.

Przyjmijmy także, że charakterystyka bocznej sprężystości szyny jest nieliniowa i zostanie określona później.

Dla tak opisanego układu określimy stateczność techniczną względem pewnych obszarów i zaburzeń stale działających, z punktu widzenia poprzecznego oddziaływania zestawu na tor, w celu określenia dopuszczalnych prędkości ruchu poprzecznego zestawu lub odpowiedniej sztywności poprzecznej ramy toru (szyn wraz z podkładami). Obszary stateczności będą przyjęte z praktycznego punktu widzenia. Zaburzenia stale działające zostaną wprowadzone do równań ruchu, aby uwzględnić ciągłe zmiany bocznej sztywności toru, spowodowane chociażby warunkami atmosferycznymi, niejednorodnością materiału, czy też zmiennym przekrojem poprzecznym szyny.

Do analizy przyjmijmy stały kąt γ nachylenia profilu koła (rys. 1), w związku z czym składowa pozioma siły tarcia, występująca w równaniu ruchu, jest wielkością stałą. W rzeczywistości profil ma kształt krzywoliniowy i składowa ta jest zmienna, ponieważ zmienny jest kąt γ nachylenia płaszczyzny stycznej do profilu i szyny w punkcie ich styku. Zmiany te będą dalej uwzględniane także w postaci zaburzeń stale działających.

Zaburzenia stale działające, pochodzące od zmiennej sztywności szyn i zmiennej składowej siły tarcia, przyjmijmy jako jedną funkcję przemieszczenia bocznego i prędkości tego przemieszczenia $R(y, \dot{y})$, której przebiegu nie możemy określić ściśle, ale wiemy o niej, że jest ograniczona i nie przekracza pewnej wielkości, co można ująć zależnością

$$|R(y, \dot{y})| \leq \varrho, \quad \varrho > 0.$$

Zaburzenia stale działające będą miały charakter siły.

W dalszym ciągu pracy podamy warunki stateczności technicznej dla naszego układu, przy czym zażądamy, aby boczne przemieszczenie szyn nie przekraczało pewnej wielkości, gwarantującej odkształcenia sprężyste.

2. Określenie charakterystyki sprężystej układu i obszarów stateczności. Równanie różniczkowe ruchu

Nieliniową charakterystykę sprężystą układu przyjmijmy w postaci

$$(2.1) \quad F(y) = \frac{C_0}{b_0} \operatorname{tg}[b_0(|y| - s_0)] \delta^{-1} (|y| - s_0) \operatorname{sgn} y,$$

gdzie

C_0 — współczynnik sztywności poprzecznej toru w przybliżonym przypadku liniowym,

b_0 — współczynnik przeliczeniowy, określony wzorem

$$(2.2) \quad b_0 = \frac{\pi}{2d_0},$$

$2d_0$ — odległość między asymptotami tangensoidy,

s_0 — luz szynowy,

y — przemieszczenie poprzeczne,

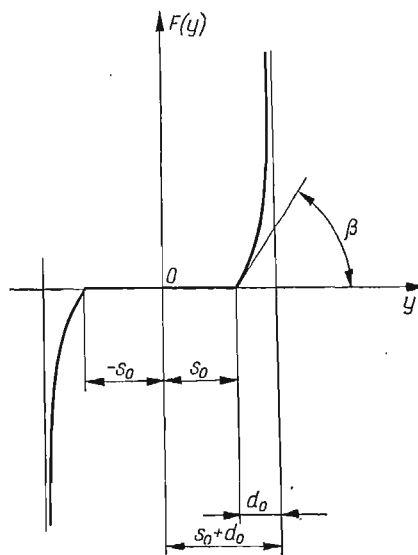
$\delta^{-1}(|y| - s_0)$ — funkcja określona następująco:

$$(2.3) \quad \delta^{-1}(|y| - s_0) = \begin{cases} 0, & \text{dla } (|y| - s_0) < 0, \\ 1, & \text{dla } (|y| - s_0) \geq 0, \end{cases} \quad s_0 > 0.$$

W celu określenia współczynnika sztywności C_0 (w przybliżonym przypadku liniowym), należy obliczyć prawostronną pochodną funkcji (2.1) w punkcie $y = s_0$ (lub jej pochodną lewostronną w punkcie $y = -s_0$). Po obliczeniu pochodnej prawostronnej funkcji (2.1) otrzymujemy zależność

$$(2.4) \quad F'(s_0+) = C_0 = \operatorname{tg} \beta.$$

Charakterystyka sprężysta układu jest przedstawiona na rys. 2



Rys. 2

Równanie różniczkowe drgań poprzecznych, dla układu przedstawionego na rys. 1, ma postać

$$(2.5) \quad m\ddot{y} + (T \cos \gamma) \operatorname{sgn} \dot{y} + (T \cos \gamma) \delta^{-1}(|y| - s_0) \operatorname{sgn} \dot{y} = -\frac{C_0}{b_0} \operatorname{tg}[b_0(|y| - s_0)] \times \\ \times \delta^{-1}(|y| - s_0) \operatorname{sgn} y - T_1 \delta^{-1}(|y| - s_0) \operatorname{sgn} \dot{y} + P_0 \sin pt + R_0(y, \dot{y}),$$

gdzie

- m — masa zestawu kołowego,
- T — siła tarcia między szyną i kołem,
- T_1 — siła tarcia między szyną i podłożem,
- P_0 — siła wymuszająca,
- p — częstość siły wymuszającej,
- $R_0(y, \dot{y})$ — zaburzenia stale działające,

$\delta_1^{-1}(|y| - s_0)$ — funkcja, określona w sposób następujący:

$$(2.6) \quad \delta_1^{-1}(|y| - s_0) = \begin{cases} 1, & \text{dla } (|y| - s_0) < 0, \\ 0, & \text{dla } (|y| - s_0) \geq 0, \end{cases} \quad s_0 > 0.$$

Zauważmy, że funkcja ta «gasi» siłę tarcia koła o jedną z szyn z chwilą przekroczenia luzu szynowego.

Równanie (2.5) można sprowadzić do postaci bezwymiarowej, wygodnej w dalszej analizie. Zrobimy to przez wprowadzenie podstawień

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \tau = pt, \quad \frac{y}{s_0} = x, \quad \frac{d_0}{s_0} = d, \quad b_0 s_0 = b, \quad c = mp^2 s_0, \quad Tc^{-1} \cos \gamma = H, \\ T_1 c^{-1} = H_1, \quad P_0 c^{-1} = P, \quad R_0 c^{-1} = R, \quad C_0 b_0^{-1} c^{-1} = C. \end{aligned}$$

Funkcje $\delta^{-1}(|y| - s_0)$ i $\delta_1^{-1}(|y| - s_0)$ mają obecnie postać:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \delta^{-1}(|x| - 1) &= \begin{cases} 0, & \text{dla } (|x| - 1) < 0, \\ 1, & \text{dla } (|x| - 1) \geq 0, \end{cases} \\ \delta_1^{-1}(|x| - 1) &= \begin{cases} 1, & \text{dla } (|x| - 1) < 0, \\ 0, & \text{dla } (|x| - 1) \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu (2.7) i (2.8) otrzymujemy równanie różniczkowe ruchu w bezwymiarowej postaci

$$(2.9) \quad \ddot{x} + H[\delta_1^{-1}(|x| - 1) + 1] \operatorname{sgn} \dot{x} = -C \operatorname{tg}[b(|x| - 1)] \delta^{-1}(|x| - 1) \operatorname{sgn} x - \\ - H_1 \delta^{-1}(|x| - 1) \operatorname{sgn} \dot{x} + P \sin \tau + R(x, \dot{x}),$$

lub, po wprowadzeniu nowych zmiennych $x = x_1$, $\dot{x}_1 = x_2$ równoważny układ równań pierwszego rzędu:

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -C \operatorname{tg}[b(|x| - 1)] \delta^{-1}(|x| - 1) \operatorname{sgn} x_1 - H[\delta_1^{-1}(|x| - 1) + 1] \operatorname{sgn} x_2 - \\ &\quad - H_1 \delta^{-1}(|x| - 1) \operatorname{sgn} x_2 + P \sin \tau + R(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Przyjmijmy obecnie obszary stateczności. Z uwagi na występujący luz, ruch zestawu możemy podzielić na dwie fazy:

I — od położenia początkowego do wyczerpania luzu,

II — od chwili zetknięcia się jednego koła zestawu z szyną (luz szynowy wyczerpany), do momentu, gdy prędkość boczno-ruchu zmaleje do zera (szyna osiągnie maksymalne boczne odkształcenie sprężyste).

W związku z powyższym przyjmijmy następujące obszary stateczności:

— dla pierwszej fazy ruchu:

obszar warunków początkowych:

$$(2.11) \quad Q_0^I(x_1, x_2) = \{(x_1, x_2): |x_1| < x_{10}, |x_2| < v\};$$

obszar domknięty warunków ruchu:

$$(2.11a) \quad Q^I = \{(x_1, x_2): |x_1| \leq 1, |x_2| \leq v\},$$

— dla drugiej fazy ruchu:

obszar warunków początkowych:

$$(2.12) \quad Q_0^I = \{(x_1, x_2): |x_1| < 1, |x_2| < v\},$$

obszar domknięty warunków ruchu:

$$(2.12a) \quad Q^I = \{(x_1, x_2): |x_1| \leq a, |x_2| \leq v\},$$

obszar zewnętrzny:

$$(2.12b) \quad Q_z = \{(x_1, x_2): |x_1| < (1+d), |x_2| < v_1\}, \quad v_1 > v.$$

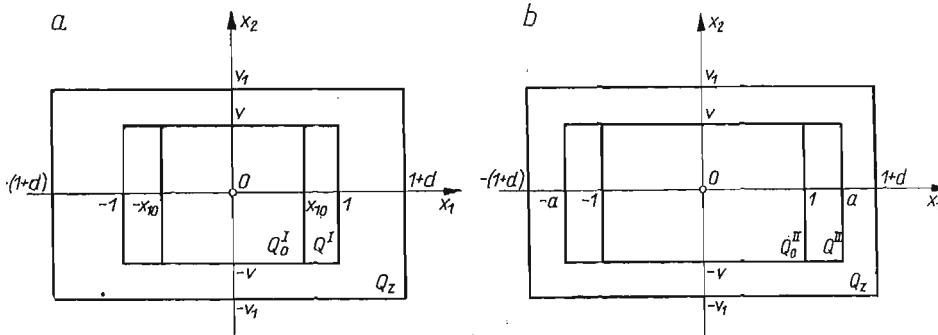
W powyższych zależnościach, określających obszary, mamy:

$$v = \frac{v_0}{s_0}, \quad a = \frac{a_0}{s_0},$$

gdzie

v_0 — maksymalna prędkość bocznego ruchu zestawu,

a_0 — maksymalna amplituda bocznego ruchu zestawu.



Rys. 3

Na rys. 3 obszary stateczności są przedstawione na płaszczyźnie fazowej (x_1, x_2) . Z rysunku widać, że obszar ruchu dla pierwszej fazy ruchu jest obszarem warunków początkowych w drugiej fazie.

W dalszym ciągu zajmiemy się drugą fazą ruchu z uwagi na odkształcenia szyny jakie w niej zachodzą. W takim razie, w układzie (2.10) należy przyjąć: $\delta^{-1}(|x_1| - 1) = 1$, $\delta_1^{-1}(|x_1| - 1) = 0$. Do dalszej analizy mamy zatem układ

$$(2.10a) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -H \operatorname{sgn} x_2 - H_1 \operatorname{sgn} x_2 - C \operatorname{tg}[b(|x_1| - 1)] \operatorname{sgn} x_1 + P \sin \tau + R(x_1, x_2). \end{cases}$$

3. Analiza stateczności technicznej układu (2.10a)

Jedną z metod badania stateczności technicznej układów nieliniowych jest zmodyfikowana, druga metoda Lapunowa. Dla badanego układu dobieramy odpowiednią funkcję skalarną i na podstawie jej własności oceniamy stateczność techniczną układu.

W naszym przypadku przyjmiemy funkcję dwóch zmiennych $V(x_1, x_2)$, niezależną od czasu w sposób jawny, klasy C^1 i określimy warunki wystarczające stateczności technicznej.

Jeżeli przyjęta funkcja $V(x_1, x_2)$ spełnia następujące warunki:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} 1^\circ & V(x_1, x_2) > 0 \quad \text{dla} \quad x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, \\ 2^\circ & \dot{V}(x_1, x_2) \leq 0 \quad \text{dla} \quad (x_1, x_2) \in Q_z \setminus Q_0^{\text{II}}, \\ 3^\circ & \sup_{(x_1, x_2) \in Q_0^{\text{II}}} V(x_1, x_2) < \inf_{(x_1, x_2) \in Q_z \setminus Q^{\text{II}}} V(x_1, x_2), \end{aligned}$$

to układ jest technicznie stateczny ze względu na obszary Q_0^{II} , Q^{II} i zaburzenia stale działające.

Dla układu (2.10a) przyjmiemy obecnie funkcję $V(x_1, x_2)$ w postaci

$$(3.2) \quad V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + \int_1^{x_1} \{C \operatorname{tg}[b(|u|-1)] \operatorname{sgn} u \delta^{-1}(|u|-1)\} du.$$

Pochodna funkcji (3.2) względem czasu, wynosi:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \frac{dV}{dt} = \dot{V} &= x_2 \{ \dot{x}_2 + C \operatorname{tg}[b(|x_1|-1)] \delta^{-1}(|x_1|-1) \operatorname{sgn} x_1 \} = \\ &= x_2 \{ -(H+H_1) \operatorname{sgn} x_2 + P \sin \tau + R(x_1, x_2) \}. \end{aligned}$$

Oszacujemy pochodną (3.3), zakładając, że:

$$(3.4) \quad |P \sin \tau| \leq \tilde{P}, \quad |R(x_1, x_2)| \leq \varrho.$$

Otrzymujemy:

$$(3.5) \quad \frac{dV}{dt} \leq |x_2| [-(H_1+H) + \tilde{P} + \varrho],$$

skąd wynika, że pochodna względem czasu będzie niedodatnia, gdy

$$(3.6) \quad \tilde{P} \leq (H+H_1) - \varrho.$$

Czyli, maksymalna amplituda siły wymuszającej nie powinna przekraczać tłumienia pomniejszonego o największą wartość zaburzeń stale działających. Drugi warunek z (3.1) jest więc spełniony.

Sprawdzimy obecnie trzeci z warunków (3.1). Obliczymy funkcję $V(x_1, x_2)$ z (3.2). Po scałkowaniu otrzymujemy

$$(3.2a) \quad V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{C}{b} \ln |\cos b(|x_1|-1)|.$$

Z powyższego widać, że $V(x_1, x_2)$ jest dodatnia, ponieważ drugi człon przyjmuje wartości tylko ujemne, a dla: $|x_1| = 1$ zeruje się.

Aby był spełniony trzeci warunek (3.1) powinno być

$$(3.7) \quad \sup_{(x_1, x_2) \in Q_0^{\text{II}}} V(x_1, x_2) = V_1 < \inf_{(x_1, x_2) \in Q_z \setminus Q^{\text{II}}} V(x_1, x_2) = V_2.$$

Wartość V_1 na brzegu ∂Q_0^{II} wynosi

$$(3.8) \quad V_1 \Big|_{\partial Q_0^{\text{II}}} = \frac{1}{2}x_2 = \frac{1}{2}v^2.$$

Wartość V_2 na brzegu ∂Q^{II} wynosi ($v = 0$)

$$(3.9) \quad V_2 \Big|_{\partial Q^{\text{II}}} = \frac{C}{b} \ln |\cos b(|x_1| - 1)| = \frac{C}{b} \ln |\cos b(|a| - 1)|.$$

W zależności (3.9) uwzględniliśmy, że $\ln |\cos b(|x_1| - 1)|$ przyjmuje tylko ujemne wartości.

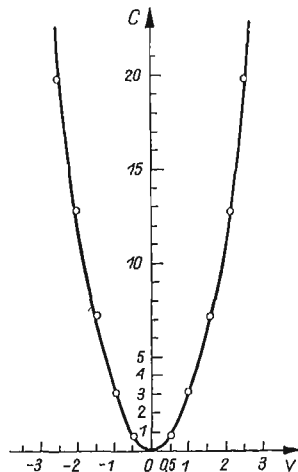
Wobec powyższego z (3.7) otrzymujemy, po uwzględnieniu (3.8) i (3.9)

$$(3.10) \quad C > \frac{b}{\ln [\cos^2 b(|a| - 1)]} v^2.$$

Szywność poprzeczna toru powinna, przy założonej wielkości dopuszczalnego odkształcenia poprzecznego toru i danej prędkości ruchu poprzecznego zestawu, przyjmować wartości spełniające zależność (3.10).

4. Przykład liczbowy

Na podstawie [3], przyjmijmy następujące dane liczbowe: $m = 1500$ [kg], $s_0 = 0,005$ [m], $\gamma = 0,05$ [rd], $p = 10,676$ [s⁻¹], $a_0 = 0,01$ [m], nacisk koła na szynę $G_k = 50\,000$ [N], $d_0 = 0,002$ [m].



Rys. 4

Wartości sztywności poprzecznej szyn dla różnych prędkości poprzecznego ruchu zestawu są ujęte w tablicy 1.

Zależność (3.10) można przedstawić graficznie, z wykorzystaniem danych w tablicy 1. Jest to pokazane na rys. 4.

Tablica 1

$v_0 \left[\frac{m}{s} \right]$	0,00025	0,0005	0,0075	0,001	0,00125	0,0015
v	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
v^2	0,25	1,0	2,25	4,0	6,25	9,0
C	0,799	3,199	7,198	12,796	19,994	28,791
$C_0 \cdot 10^6 \left[\frac{N}{m} \right]$	0,537	2,149	4,837	8,599	13,430	19,351

5. Wnioski i uwagi końcowe

Z podanych warunków stateczności (3.6) i (3.10) wynika, że układ jest technicznie stateczny, gdy maksymalna amplituda siły wymuszającej nie przekroczy siły tarcia tłumiącej drgania, pomniejszonej o maksymalną wartość zaburzeń stale działających. Z drugiego warunku wynika ponadto, że boczna sztywność toru jest uzależniona od maksymalnej prędkości ruchu poprzecznego zestawu. Zależność ta (rys. 4) określa tę sztywność lub ogranicza prędkość «plastycznego» uderzenia w szynę. I tak, przy danej bocznej sztywności toru można określić maksymalną prędkość v , przekształcając odpowiednio zależność (3.10). Odwrotnie, przy danej prędkości bocznego ruchu zestawu, można określić boczna sztywność toru, przy założeniu, że maksymalne wychylenie szyn nie przekroczy zakresu odkształcenia sprężystego. Mając sztywność można określić inne parametry toru (rozstaw podkładów, typ szyny itp.).

Analiza została przeprowadzona dla zakresu ruchu poprzecznego, w którym luz został przekroczony. W pierwszym zakresie ruchu, do wyczerpania luzu, ruch jest niestateczny. Po przekroczeniu luzu zestaw przechodzi w drugi zakres i gdy spełniona jest nierówność (3.10), jego ruch jest technicznie stateczny.

Literatura cytowana w tekście

1. W. BOGUSZ, *Stateczność techniczna*, PWN, Warszawa 1972.
2. B. SKALMIERSKI, A. TYLIKOWSKI, *Stabilność układów dynamicznych*, PWN, Warszawa 1973.
3. Т. А. Тивилов, *Асимптотические методы исследования колебаний подвижного состава*, Труды Ростовского-на-Дону Института Инженеров Железнодорожного Транспорта, Издательство Транспорт, Москва 1970.

Резюме

ТЕХНИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ БОКОВЫХ КОЛЕБАНИЙ ЕДИНИЧНОГО ПОДВИЖНОГО СОСТАВА, ДВИЖУЩЕГОСЯ ПО РЕЛЬСАМ С НЕЛИНЕЙНОЙ ПОПЕРЕЧНОЙ УПРУГОСТЬЮ

В работе рассматривается техническая устойчивость некоторой механической системы с одной степенью свободы, с нелинейной упругой характеристикой, с зазором и с демпфированием посредством сухого трения, совершающей вынужденные колебания вызываемые гармонической силой.

На характеристики этой системы (упругость и демпфирование) влияют непрерывно действующие возмущения. Области устойчивости рассматриваются с практической точки зрения. Для решения задачи применяется второй метод Ляпунова.

Полученные зависимости, (2.6) и (3.11) определяющие условия устойчивости, содержат коэффициент упругости, демпфирование и скорость поперечного движения. Одна из этих зависимостей (3.11) представлена графически.

Summary

TECHNICAL STABILITY OF LATERAL VIBRATIONS OF A SINGLE WHEEL SET MOVING ALONG THE RAIL WITH NON-LINEAR LATERAL ELASTICITY

The technical stability of the mechanical system with one degree of freedom, with non-linear characteristic of elasticity, play and damping by dry friction, is considered. This system performs forced lateral vibrations produced by a harmonic force. The system is acted on by constantly acting perturbations of the characteristics of elasticity and damping. The regions of the stability were considered from the practical point of view. The problem is analysed by means of the second method of Lapunov. Relations (2.6) and (3.11), obtained by this procedure, contain: damping, the coefficient of rigidity and the velocity of lateral motion of the body. These relations are conditions of the technical stability. Relation (3.11) is shown graphically in Fig. 4.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 2 sierpnia 1974 r.
