MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1, 13 (1975)

ANALIZA KONWEKCYJNEGO REKUPERATORA PĘTLICOWEGO Z KRZYŻOWYM PRZEPŁYWEM CZYNNIKÓW

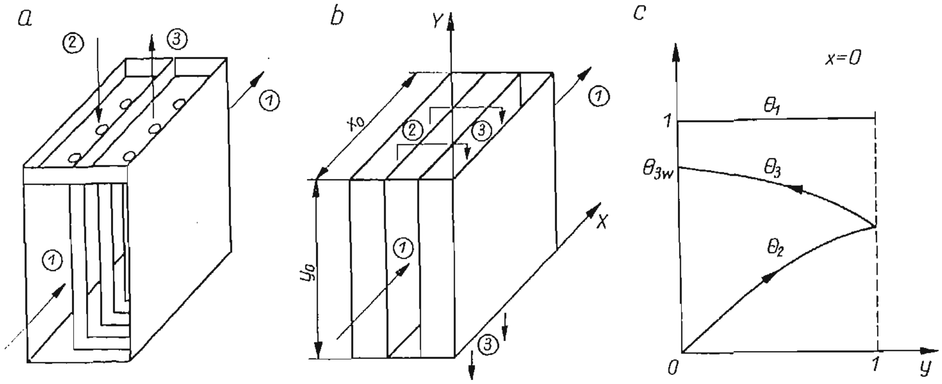
JAN SKŁADZIEŃ (GLIWICE)

1. Wstęp

Przy rozpatrywaniu dowolnego rekuperatora z przepływem krzyżowym można w odniesieniu do każdego z czynników przyjąć dwa krańcowe założenia określające jego zachowanie się. W klasycznych rekuperatorach krzyżowo-prądowych zakłada się przepływ adiabatycznymi, nie mieszającymi się strugami, pomiędzy którymi nie ma wymiany ani ciepła, ani masy. Można też przyjąć całkowite wymieszanie w płaszczyznach poprzecznych do kierunku przepływu i temperatura danego czynnika jest wówczas funkcją tylko jednej zmiennej. Przypadki takie występują również przy rozpatrywaniu rekuperatora pętlicowego z przepływem krzyżowym, którego schemat wraz z modelem teoretycznym jest pokazany na rys. 1. Przypadek całkowitego wymieszania obu czynników wydaje się nie mieć większego znaczenia praktycznego. Założenie wymieszania czynnika ogrzewanego ma sens w przypadku rekuperatora składającego się z pojedynczego, względnie grupy równolegle ustawionych elementów. W przypadku większej ilości elementów ustawionych w kilku rzędach słuszne wydaje się być założenie przepływu czynnika chłodniejszego adiabatycznymi strugami. W odniesieniu do medium grzejącego można teraz przyjąć dwa przeciwstawne założenia, w rzeczywistości zaś będzie panował pewien stan pośredni. Przypadek całkowitego wymieszania tego czynnika jest znacznie łatwiejszy do rozwiązania [4]. Przypadek «czystego» przepływu krzyżowego bez wymieszania, dla jednego szczególnego przypadku ($k_{1-2} = k_{1-3}$), również został rozwiązany [2]. Wyniki obliczeń, choć otrzymane w stosunkowo prosty sposób, poprzez transformację Laplace'a równań bilansu energii, niezbyt nadają się do obliczeń cyfrowych, zwłaszcza przeprowadzanych na maszynie matematycznej. Wynika to z konieczności rozwiązywania równań przestępnych. W niniejszej pracy podany jest inny, przy tym bardziej ogólny, sposób rozwiązania zagadnienia. Po sprowadzeniu układu równań bilansowych do równania całkowego określa się kształt rozwiązania. Po założeniu na tej podstawie szeregów określających przebieg temperatur poszczególnych strumieni znajduje się współczynniki funkcyjne występujące w tych szeregach. Ze względu na rekurencyjny charakter wyprowadzonych zależności, nadają się one do obliczeń przeprowadzanych na matematycznej maszynie cyfrowej.

2. Sformułowanie problemu

Model teoretyczny rozpatrywanego rekuperatora pokazany jest na rys. 1. Powierzchnia wymiany ciepła została rozbita na dwa prostokąty o wymiarach $x_0 y_0$. Gdyby zdarzył się przypadek różnych powierzchni po obu stronach punktu zwrotnego, w równaniach bilansu



Rys. 1. Wymiennik pętlicowy z krzyżowym przepływem czynników: a) schemat wymiennika, b) model teoretyczny, c) rozkład temperatur

występują zredukowane współczynniki przenikania ciepła. Dla stanu ustalonego, po pominięciu strat ciepła oraz przepływu ciepła wzdłuż przegród, otrzymuje się z bilansu energii dla klasycznego przepływu krzyżowego układ równań różniczkowych:

$$k_{1-2}(t_1-t_2)+k_{1-3}(t_1-t_3) = -\frac{W_1}{y_0}\frac{\partial t_1}{\partial X},$$

(2.1)
$$k_{1-2}(t_1-t_2) = \frac{W_2}{x_0}\frac{\partial t_2}{\partial Y},$$

$$k_{1-3}(t_1-t_3) = -\frac{W_3}{x_0}\frac{\partial t_3}{\partial Y},$$

gdzie:

k_{i-j} — współczynnik przenikania ciepła od strumienia i-tego do j-tego,
t_i — temperatura i-tego strumienia,
W_i — pojemność cieplna i-tego strumienia,
x_0, y_0 — wymiary powierzchni wymiany ciepła,
X, Y — współrzędne bezwzględne.

Zakładając $W_2 = W_3$ oraz przyjmując współrzędne bezwymiarowe

(2.2)
$$x = \frac{X}{x_0}, \quad y = \frac{Y}{y_0},$$

otrzymuje się:

(2.3a)
$$(\varkappa+1)\theta_1 + \frac{1}{(K_{1-2})}\frac{\partial\theta_1}{\partial x} = \theta_2+\varkappa\theta_3,$$

(2.3b)
$$\theta_2 + \frac{1}{(K_{2-1})}\frac{\partial\theta_2}{\partial y} = \theta_1,$$

(2.3c)
$$\theta_3 - \frac{1}{(K_{3-1})}\frac{\partial\theta_3}{\partial y} = \theta_1,$$

gdzie

$$\varkappa = \frac{k_{1-3}}{k_{1-2}}; \quad (K_{1-2}) = \frac{k_{1-2}x_0 y_0}{W_1}; \quad (K_{2-1}) = \frac{k_{1-2}x_0 y_0}{W_2};$$

$$(K_{3-1}) = \frac{k_{1-3}x_0 y_0}{W_3} = \frac{k_{1-3}x_0 y_0}{W_2}. \tag{2.4}$$

θ_i jest bezwymiarowo wyrażoną temperaturą i-tego strumienia

$$\theta_i = \frac{t_i - t_{2d}}{t_{1d} - t_{2d}}; \quad t_{1d} = t_1|_{x=0}; \quad t_{2d} = t_2|_{y=0}. \tag{2.5}$$

Warunki brzegowe dla układu równań (2.3) przyjmują postać

$$\theta_1|_{x=0} = 1; \quad \theta_2|_{y=0} = 0; \quad \theta_2|_{y=1} = \theta_3|_{y=1}. \tag{2.6}$$

W dalszych rozważaniach zakłada się stałość wielkości k_{i-j} i W_i, a tym samym stałość $\varkappa$, (K_{1-2}), (K_{2-1}) i (K_{3-1}).

3. Rozwiązanie zagadnienia

Układ równań różniczkowych (2.3) można sprowadzić do jednego równania całkowego z jedną niewiadomą. W tym celu należy wyznaczyć funkcje θ_2 i θ_3 z równań (2.3b) i (2.3c). Z równania (2.3b) po zastosowaniu warunku $\theta_2|_{y=0} = 0$ otrzymuje się

$$\theta_2 = (K_{2-1})e^{-(K_{2-1})y} \int_0^y e^{(K_{2-1})\bar{y}}\, \theta_1(x, \bar{y})d\bar{y}. \tag{3.1}$$

Po przekształceniu równania (2.3c) i uwzględnieniu warunku równości temperatur θ_2 i θ_3 w punkcie $y = 1$ otrzymuje się

$$\theta_3 = e^{(K_{3-1})y}\left[(K_{2-1})e^{-(\varkappa+1)(K_{2-1})} \int_0^1 e^{(K_{2-1})\bar{y}}\, \theta_1(x, \bar{y})d\bar{y} + (K_{3-1}) \int_y^1 e^{-(K_{3-1})\bar{y}}\theta_1(x, \bar{y})d\bar{y}\right]. \tag{3.2}$$

Zastosowanie warunku $\theta_1|_{x=0} = 1$ po odpowiednich przekształceniach równania (2.3a) daje:

$$\theta_1 = e^{-(\varkappa+1)(K_{1-2})x}\left\{1 + (K_{1-2}) \int_0^x e^{(\varkappa+1)(K_{1-2})\bar{x}}[\theta_2(\bar{x}, y) + \varkappa\theta_3(\bar{x}, y)]\, d\bar{x}\right\}. \tag{3.3}$$

Aby dostać jedno równanie z jedną niewiadomą należy wstawić zależności (3.1) i (3.2) do (3.3)

$$\theta_1 = e^{-(\varkappa+1)(K_{1-2})x}\Big(1 + (K_{1-2}) \int_0^x e^{(\varkappa+1)(K_{1-2})\bar{x}}\Big\{(K_{2-1})e^{-(K_{2-1})y} \int_0^y e^{-(K_{2-1})\bar{y}}\theta_1(\bar{x}, \bar{y})d\bar{y} +$$

$$+ \varkappa e^{(K_{3-1})y}\left[(K_{2-1})e^{-(\varkappa+1)(K_{2-1})} \int_0^1 e^{(K_{2-1})\bar{y}}\theta_1(\bar{x}, \bar{y})d\bar{y} + (K_{3-1}) \int_y^1 e^{-(K_{3-1})\bar{y}}\theta_1(\bar{x}, \bar{y})d\bar{y}\right]\Big\}d\bar{x}\Big). \tag{3.4}$$

Równanie całkowe (3.4) rozwiązać można metodą kolejnych przybliżeń. Przyjmując jako zerowe przybliżenie

$$\theta_1^0 = 0 \tag{3.5}$$

otrzymuje się po wstawieniu (3.5) do prawej strony równania (3.4)

$$\theta_1^1 = e^{-(\varkappa+1)(K_{1-2})x}. \tag{3.6}$$

Pierwsze przybliżenie podstawione do (3.4) daje drugie przybliżenie

$$\theta_1^2 = e^{-(\varkappa+1)(K_{1-2})x}[1+xa_1(y)], \tag{3.7}$$

gdzie

$$a_1(y) = (K_{1-2})\{1-e^{-(K_{2-1})y}+\varkappa e^{(K_{3-1})y}[e^{-(K_{3-1})}-e^{-(\varkappa+1)(K_{2-1})}]+\varkappa[1-e^{-(K_{3-1})(1-y)}]\}. \tag{3.8}$$

Kolejne przybliżenia mają postać

$$\theta_1^3 = e^{-(\varkappa+1)(K_{1-2})x}[1+xa_1(y)+x^2a_2(y)], \tag{3.9}$$

$$\theta_1^4 = e^{-(\varkappa+1)(K_{1-2})x}[1+xa_1(y)+x^2a_2(y)+x^3a_3(y)]. \tag{3.10}$$

Ogólnie będzie zatem

$$\theta_1^n = e^{-(\varkappa+1)(K_{1-2})x}[1+xa_1(y)+x^2a_2(y)+\ \dots\ +x^{n-1}a_{n-1}(y)], \tag{3.11}$$

przy czym wyrażenia $a_1(y)$, $a_2(y)$, ..., mają nieregularny kształt i począwszy od $a_2(y)$ dość złożoną postać. Wstępne rozwiązanie równania całkowego (3.4) umożliwia na podstawie (3.11) założenie funkcji θ_1 w postaci szeregu

$$\theta_1 = e^{-(\varkappa+1)(K_{1-2})x}\Big[1+\sum_{n=1}^{\infty} A_{n+1}(y)x^n\Big], \tag{3.12}$$

lub

$$\theta_1 = e^{-(\varkappa+1)(K_{1-2})x}\sum_{n=1}^{\infty} A_n(y)x^{n-1}, \tag{3.13}$$

gdzie

$$A_1 = 1. \tag{3.14}$$

Widać przy tym, że spełniony jest już tu warunek $\theta_1|_{x=0} = 1$. Po wstawieniu (3.13) do równań (2.3b) i (2.3c) otrzymuje się kolejno:

$$\theta_2 = e^{-(\varkappa+1)(K_{1-2})x}\sum_{n=1}^{\infty} B_n(y)x^{n-1}, \tag{3.15}$$

$$\theta_3 = e^{-(\varkappa+1)(K_{1-2})x}\sum_{n=1}^{\infty} C_n(y)x^{n-1}, \tag{3.16}$$

przy czym zachodzą związki

$$B_n(y)+\frac{1}{(K_{2-1})}\frac{dB_n(y)}{dy} = A_n(y), \tag{3.17}$$

$$C_n(y)-\frac{1}{(K_{3-1})}\frac{dC_n(y)}{dy} = A_n(y). \tag{3.18}$$

Ze względu na warunki brzegowe (2.6) funkcje $B_n(y)$ oraz $C_n(y)$ muszą spełniać zależności

$$B_n|_{y=0} = 0; \quad B_n|_{y=1} = C_n|_{y=1}. \tag{3.19}$$

Nie wykorzystane dotąd równanie (2.3a) po wstawieniu doń zależności określających funkcje θ_1, θ_2 i θ_3 daje warunek

$$\bigwedge_{n=1,2,\ldots} A_{n+1}(y) = \frac{(K_{1-2})}{n}[B_n(y)+\varkappa C_n(y)]. \tag{3.20}$$

Kolejność rozwiązywania będzie zatem następująca: korzystając z (3.14) wyznacza się na podstawie (3.17)÷(3.19) funkcje $B_1(y)$ i $C_1(y)$, których znajomość na podstawie (3.20) umożliwia znalezienie funkcji $A_2(y)$. Mając $A_2(y)$ oblicza się następnie $B_2(y)$ i $C_2(y)$ z równań (3.17)÷(3.19) i potem w podobny sposób można wyznaczać kolejne wyrazy szeregów. Postępowanie według podanej kolejności prowadzi do otrzymania następujących wyników:

$$B_1(y) = 1+B_{1,1}e^{-(K_{2-1})y}; \quad B_{1,1} = -1; \tag{3.21}$$

$$C_1(y) = 1+C_{1,1}e^{(K_{3-1})y}; \quad C_{1,1} = -e^{-(K_{2-1})-(K_{3-1})} \tag{3.22}$$

oraz po wprowadzeniu

$$(K_{1-3}) = \frac{k_{1-3}x_0 y_0}{W_1}$$

otrzymamy

$$A_2(y) = (K_{1-2})+(K_{1-3})+(K_{1-2})B_{1,1}e^{-(K_{2-1})y}+(K_{1-3})C_{1,1}e^{(K_{3-1})y}, \tag{3.23}$$

$$\begin{gathered} B_2(y) = (K_{1-2})+(K_{1-3})+(B_{2,1}+B_{2,2}y)e^{-(K_{2-1})y}+B_{2,3}e^{(K_{3-1})y}, \\ B_{2,3} = \frac{(K_{1-3})}{\varkappa+1}C_{1,1}, \; B_{2,2} = (K_{1-2})(K_{2-1})B_{1,1}, \; B_{2,1} = -(K_{1-2})-(K_{1-3})-B_{2,3}; \end{gathered} \tag{3.24}$$

$$\begin{gathered} C_2(y) = (K_{1-2})+(K_{1-3})+(C_{2,1}+C_{2,2}y)e^{(K_{3-1})y}+C_{2,3}e^{-(K_{2-1})y}, \\ C_{2,3} = \frac{(K_{1-3})}{\varkappa+1}B_{1,1}, \quad C_{2,2} = -(K_{1-3})(K_{3-1})C_{1,1}, \\ C_{2,1} = (B_{2,1}+B_{2,2}-C_{2,3})e^{-(K_{2-1})-(K_{3-1})}+B_{2,3}-C_{2,2}; \end{gathered} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned} A_3(y) = {} & \frac{1}{2!}[(K_{1-2})+(K_{1-3})]^2+\frac{1}{2}[(K_{1-2})(B_{2,1}+B_{2,2}y)e^{-(K_{2-1})y}+ \\ & +(K_{1-2})B_{2,3}e^{(K_{3-1})y}+(K_{1-3})e^{(K_{3-1})y}(C_{2,1}+C_{2,2}y)+(K_{1-3})C_{2,3}e^{-(K_{2-1})y}]; \end{aligned} \tag{3.26}$$

$$B_3(y) = \frac{1}{2!}[(K_{1-2})+(K_{1-3})]^2+(B_{3,1}+B_{3,2}y+B_{3,3}y^2)e^{-(K_{2-1})y}+ \tag{3.27}$$

$$+(B_{3,4}+B_{3,5}y)e^{(K_{3-1})y}, \quad B_{3,5} = \frac{(K_{1-3})}{2(\varkappa+1)}C_{2,2}, \quad B_{3,4} = \frac{(K_{1-2})}{2(\varkappa+1)}(B_{2,3}+\varkappa C_{2,1})-$$

$$-\frac{B_{3,5}}{(K_{2-1})+(K_{3-1})}, \quad B_{3,3} = \frac{1}{2^2}(K_{1-2})(K_{2-1})B_{2,2}, \quad B_{3,2} = \frac{1}{2}(K_{1-2})(K_{2-1})\times$$

$$\times(B_{2-1}+\varkappa C_{2,3}), \quad B_{3,1} = -\frac{1}{2!}[(K_{1-2})+(K_{1-3})]^2-B_{3,4};$$

$$C_3(y) = \frac{1}{2!}[(K_{1-2})+(K_{1-3})]^2+(C_{3,1}+C_{3,2}y+C_{3,3}y^2)e^{(K_{3-1})y}+ \tag{3.28}$$

$$+(C_{3,4}+C_{3,5}y)e^{-(K_{2-1})y}, \quad C_{3,5} = \frac{(K_{1-3})}{2(\varkappa+1)}B_{2,2}, \quad C_{3,4} = \frac{(K_{1-3})}{2(\varkappa+1)}(B_{2,1}+\varkappa C_{2,3})+$$

$$+\frac{C_{3,5}}{(K_{2-1})+(K_{3-1})}, \quad C_{3,3} = -\frac{1}{2^2}(K_{1-3})(K_{3-1})C_{2,2}, \quad C_{3,2} = -\frac{1}{2}(K_{3-1})\times$$

$$\times(K_{1-2})(B_{2,3}+\varkappa C_{2,1}), \quad C_{3,1} = (B_{3,1}+B_{3,2}+B_{3,3}-C_{3,4}-C_{3,5})e^{-(K_{2-1})-(K_{3-1})}+$$

$$+B_{3,4}+B_{3,5}-C_{3,2}-C_{3,3};$$

$$A_4(y) = \frac{1}{3!}[(K_{1-2})+(K_{1-3})]^3+\frac{1}{3}\Big[(K_{1-2})e^{-(K_{2-1})y}\sum_{l=1}^{3}B_{3,l}y^{l-1}+ \tag{3.29}$$

$$+(K_{1-2})e^{(K_{3-1})y}\sum_{l=1}^{2}B_{3,3+l}y^{l-1}+(K_{1-3})e^{(K_{3-1})y}\sum_{l=1}^{3}C_{3,l}y^{l-1}+$$

$$+(K_{1-3})e^{-(K_{2-1})y}\sum_{l=1}^{2}C_{3,3+l}y^{l-1}\Big];$$

$$B_4(y) = \frac{1}{3!}[(K_{1-2})+(K_{1-3})]^3+e^{-(K_{2-1})y}\sum_{l=1}^{4}B_{4,l}y^{l-1}+e^{(K_{3-1})y}\sum_{l=1}^{3}B_{4,4+l}y^{l-1}, \tag{3.30}$$

$$B_{4,7} = \frac{(K_{1-3})}{3(\varkappa+1)}C_{3,3}, \quad B_{4,6} = \frac{(K_{1-2})}{3(\varkappa+1)}(B_{3,5}+\varkappa C_{3,2})-\frac{2B_{4,7}}{(K_{2-1})+(K_{3-1})},$$

$$B_{4,5} = \frac{(K_{1-2})}{3(\varkappa+1)}(B_{3,4}+\varkappa C_{3,1})-\frac{B_{4,6}}{(K_{2-1})+(K_{3-1})}, \quad B_{4,4} = \frac{1}{3^2}(K_{1-2})(K_{2-1})B_{3,3},$$

$$B_{4,3} = \frac{1}{3\cdot 2}(K_{1-2})(K_{2-1})(B_{3,2}+\varkappa C_{3,5}), \quad B_{4,2} = \frac{1}{3\cdot 1}(K_{1-2})(K_{2-1})(B_{3,1}+\varkappa C_{3,4}),$$

$$B_{4,1} = -\frac{1}{3!}[(K_{1-2})+(K_{1-3})]^3-B_{4,5};$$

$$(3.31)\qquad C_4(y) = \frac{1}{3!}[(K_{1-2})+(K_{1-3})]^3 + e^{(K_{3-1})y}\sum_{i=1}^{4} C_{4,i}y^{i-1} + e^{-(K_{2-1})y}\sum_{i=1}^{3} C_{4,i}y^{i-1},$$

$$C_{4,7} = \frac{(K_{1-3})}{3(\varkappa+1)}B_{3,3}, \qquad C_{4,6} = \frac{(K_{1-3})}{3(\varkappa+1)}(B_{3,2}+\varkappa C_{3,5}) + \frac{2C_{4,7}}{(K_{2-1})+(K_{3-1})},$$

$$C_{4,5} = \frac{(K_{1-3})}{3(\varkappa+1)}(B_{3,1}+\varkappa C_{3,4}) + \frac{C_{4,6}}{(K_{2-1})+(K_{3-1})}, \qquad C_{4,4} = -\frac{1}{3^2}(K_{1-3})(K_{3-1})C_{3,3},$$

$$C_{4,3} = -\frac{1}{3\cdot 2}(K_{3-1})(K_{1-2})(B_{3,5}+\varkappa C_{3,2}); \qquad C_{4,2} = -\frac{1}{3\cdot 1}(K_{3-1})(K_{1-2})(B_{3,4}+\varkappa C_{3,1}),$$

$$C_{4,1} = e^{-(K_{2-1})-(K_{3-1})}\left(\sum_{i=1}^{4} B_{4,i} - \sum_{i=1}^{3} C_{4,4+i}\right) + \sum_{i=1}^{3} B_{4,4+i} - \sum_{i=2}^{4} C_{4,i}.$$

Ogólnie dla $n = 2, 3 \dots$

$$(3.32)\qquad A_n = \frac{[(K_{1-2})+(K_{1-3})]^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{1}{n-1}\Bigg[(K_{1-2})e^{-(K_{2-1})y}\sum_{i=1}^{n-1} B_{n-1,i}y^{i-1} +$$

$$+(K_{1-2})e^{(K_{3-1})y}\sum_{i=1}^{n-2} B_{n-1,n-1+i}\,y^{i-1} + (K_{1-3})e^{(K_{3-1})y}\sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1,i}y^{i-1} +$$

$$+(K_{1-3})e^{-(K_{2-1})y}\sum_{i=1}^{n-2} C_{n-1,n-1+i}\,y^{i-1}\Bigg],$$

$$B_n = \frac{[(K_{1-2})+(K_{1-3})]^{n-1}}{(n-1)!} + e^{-(K_{2-1})y}\sum_{i=1}^{n} B_{n,i}y^{i-1} + e^{(K_{3-1})y}\sum_{i=1}^{n-1} B_{n,n+i}y^{i-1},$$

$$B_{n,2n-1} = \frac{(K_{1-3})C_{n-1,n-1}}{(n-1)(\varkappa+1)}, \qquad \bigwedge_{i=n-2,\,n-3,\dots,2,i} B_{n,n+i} = \frac{(K_{1-2})(B_{n-1,n-1+i}+\varkappa C_{n-1,i})}{(n-1)(\varkappa+1)} -$$

$$-\frac{iB_{n,n+1+i}}{(K_{2-1})+(K_{3-1})}, \qquad B_{n,n} = \frac{(K_{1-2})(K_{2-1})B_{n-1,n-1}}{(n-1)^2},$$

$$\bigwedge_{i=n-1,\,n-2,\dots,3,2} B_{n,i} = \frac{(K_{1-2})(K_{2-1})(B_{n-1,i-1}+\varkappa C_{n-1,n-2+i})}{(n-1)(i-1)},$$

$$B_{n,1} = -\frac{[(K_{1-2})+(K_{1-3})]^{n-1}}{(n-1)!} - B_{n,n+1},$$

$$C_n = \frac{[(K_{1-2})+(K_{1-3})]^{n-1}}{(n-1)!} + e^{(K_{3-1})y}\sum_{i=1}^{n} C_{n,i}\,y^{i-1} + e^{-(K_{2-1})y}\sum_{i=1}^{n-1} C_{n,n+i}\,y^{i-1},$$

$$C_{n,2n-1} = \frac{(K_{1-3})B_{n-1,n-1}}{(n-1)(\varkappa+1)}, \qquad \bigwedge_{i=n-2,\,n-3,\dots,2,1} C_{n,n+i} = \frac{(K_{1-3})(B_{n-1,i}+\varkappa C_{n-1,n-1+i})}{(n-1)(\varkappa+1)} +$$

$$+\frac{iC_{n,n+1+i}}{(K_{2-1})+(K_{3-1})}, \qquad C_{n,n} = -\frac{(K_{1-3})(K_{3-1})C_{n-1,n-1}}{(n-1)^2},$$

(3.32) [c.d.]

$$\bigwedge_{i=n-1,n-2,\dots,3,2} C_{n,i} = -\frac{(K_{3-1})(K_{1-2})(B_{n-1,n-2+i}+\varkappa C_{n-1,i-1})}{(n-1)(i-1)},$$

$$C_{n,1} = e^{-(K_{2-1})-(K_{3-1})}\left(\sum_{i=1}^{n} B_{n,i} - \sum_{i=1}^{n-1} C_{n,n+i}\right) + \sum_{i=1}^{n-1} B_{n,n+i} - \sum_{i=2}^{n} C_{n,i}.$$

Aby określić ilość przekazanego ciepła wystarczy znajomość temperatury czynnika ogrzewanego przy wypływie z wymiennika $\theta_{3w} = \theta_3|_{y=0}$. Ciepło pobrane przez czynnik ogrzewany wyraża się bowiem wzorem

$$\dot{Q} = W_2(t_{1d}-t_{2d})\theta_{3w_{śr}}, \tag{3.33}$$

gdzie

$$\theta_{3w_{śr}} = \int_0^1 \theta_3|_{y=0}(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(0)\int_0^1 e^{-(\varkappa+1)(K_{1-2})x}x^{n-1}dx, \tag{3.34}$$

(3.35)

$$C_1(0) = 1+C_{1,1},$$

$$C_2(0) = (K_{1-2})+(K_{1-3})+C_{2,1}+C_{2,3},$$

$$C_3(0) = \frac{1}{2!}[(K_{1-2})+(K_{1-3})]^2+C_{3,1}+C_{3,4},$$

$$C_4(0) = \frac{1}{3!}[(K_{1-2})+(K_{1-3})]^3+C_{4,1}+C_{4,5};$$

ogólnie

$$\bigwedge_{n=2,3,\dots} C_n(0) = \frac{1}{(n-1)!}[(K_{1-2})+(K_{1-3})]^{n-1}+C_{n,1}+C_{n,n+1}. \tag{3.36}$$

4. Rozwiązanie równań bilansu energii przy całkowitym wymieszaniu jednego z czynników

Zależności podane uprzednio odnoszą się do przypadku, gdy czynniki robocze płyną adiabatycznymi, nie mieszającymi się strugami. Jeśli w czasie przepływu czynnik grzejący ulega całkowitemu wymieszaniu $[\theta_1 = \theta_1(x)]$, wówczas [4] temperatury poszczególnych strumieni są określone wzorami:

$$\theta_1 = e^{-\gamma x}, \quad \theta_2 = \theta_1[1-e^{-(K_{2-1})y}], \quad \theta_3 = \theta_1[1-e^{-(K_{2-1})-(K_{3-1})(1-y)}], \tag{4.1}$$

gdzie

$$\gamma = \frac{W_2}{W_1}[1-e^{-(K_{2-1})-(K_{3-1})}] = \frac{(K_{1-2})}{(K_{2-1})}[1-e^{-(K_{2-1})-(K_{3-1})}]. \tag{4.2}$$

Średnią temperaturę czynnika ogrzewanego przy wypływie z wymiennika określa tu zależność

$$\theta_{3w_{śr}} = \frac{(K_{2-1})}{(K_{1-2})}(1-e^{-\gamma}). \tag{4.3}$$

W przypadku całkowitego wymieszania strumieni czynnika ogrzewanego $\theta_2 = \theta_2(y)$; $\theta_3 = \theta_3(y)$ układ równań bilansu energii przyjmuje postać

(4.4a) $$(\varkappa+1)\theta_1 + \frac{1}{(K_{1-2})}\frac{\partial\theta_1}{\partial x} = \theta_2+\varkappa\theta_3,$$

(4.4b) $$\theta_2 + \frac{1}{(K_{2-1})}\frac{d\theta_2}{dy} = \int_0^1 \theta_1 dx,$$

(4.4c) $$\theta_3 - \frac{1}{(K_{3-1})}\frac{d\theta_3}{dy} = \int_0^1 \theta_1 dx.$$

Układ (4.4) można otrzymać bądź bezpośrednio z bilansów energii, bądź też przez scałkowanie w granicach $0\div 1$ względem zmiennej x równań (2.3b) i (2.3c). Warunki brzegowe są tu opisane, podobnie jak uprzednio, równaniami (2.6). Z równania (4.4a) po zastosowaniu warunku $\theta_1|_{x=0} = 1$ otrzymuje się

(4.5) $$\theta_1 = \left(1 - \frac{\theta_2+\varkappa\theta_3}{\varkappa+1}\right)e^{-(\varkappa+1)(K_{1-2})x} + \frac{\theta_2+\varkappa\theta_3}{\varkappa+1}.$$

Po podstawieniu (4.5) do równań (4.4b) i (4.4c) otrzymuje się układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi:

(4.6) $$\theta_2 + \frac{1}{(K_{2-1})}\frac{d\theta_2}{dy} = C + \frac{1-C}{\varkappa+1}\theta_2 + \frac{1-C}{\varkappa+1}\varkappa\theta_3,$$

(4.7) $$\theta_2 + \frac{1}{(K_{2-1})}\frac{d\theta_2}{dy} = \theta_3 - \frac{1}{(K_{3-1})}\frac{d\theta_3}{dy},$$

gdzie

(4.8) $$C = \frac{1-e^{-(\varkappa+1)(K_{1-2})}}{(\varkappa+1)(K_{1-2})}.$$

Po wyznaczeniu θ_3 z (4.6) i podstawieniu otrzymanej zależności do (4.7) otrzymuje się równanie

(4.9) $$\frac{d^2\theta_2}{dy^2} - C(\varkappa-1)(K_{2-1})\frac{d\theta_2}{dy} - C\varkappa(K_{2-1})^2\theta_2 = -C\varkappa(K_{2-1})^2.$$

Rozwiązanie tego równania ma postać

(4.10) $$\theta_2 = M_1e^{\mu_1 y} + M_2e^{\mu_2 y}+1,$$

gdzie

(4.11) $$\mu_{1,2} = \frac{1}{2}C(K_{2-1})[\varkappa-1\mp\sqrt{(\varkappa-1)^2+4\varkappa/C}].$$

Podobny wygląd posiada funkcja określająca temperaturę θ_3

(4.12) $$\theta_3 = N_1e^{\mu_1 y} + N_2e^{\mu_2 y}+1.$$

Po wyznaczeniu na podstawie (4.6) stałych N_1 i N_2 jako funkcji stałych M_1 i M_2 oraz po uwzględnieniu dwóch nie wykorzystanych dotąd warunków brzegowych otrzymuje się ostatecznie

$$\theta_2 = 1 - \frac{\nu_2 e^{\nu_2} e^{\nu_1 y} - \nu_1 e^{\nu_1} e^{\nu_2 y}}{\nu_2 e^{\nu_2} - \nu_1 e^{\nu_1}} e^{-C(K_{2-1})y}, \tag{4.13}$$

$$\theta_3 = 1 - \frac{\nu_2 e^{\nu_1} e^{\nu_2 y} - \nu_1 e^{\nu_2} e^{\nu_1 y}}{\nu_2 e^{\nu_2} - \nu_1 e^{\nu_1}} e^{-C(K_{2-1})y}, \tag{4.14}$$

gdzie

$$\nu_{1,2} = \mu_{1,2} + C(K_{2-1}). \tag{4.15}$$

Temperatura czynnika ogrzewanego przy wypływie z wymiennika jest taka sama w każdym punkcie i wynosi

$$\theta_{3w} = \frac{2}{1 + \frac{\sqrt{(\varkappa-1)^2 + 4\varkappa/C}}{\varkappa+1} \operatorname{ctgh}\left[\frac{1}{2} C(K_{2-1}) \sqrt{(\varkappa-1)^2 + 4\varkappa/C}\right]}. \tag{4.16}$$

5. Uwagi końcowe

Podane powyżej rozwiązania równań bilansu energii, zarówno dla przypadku, gdy nie występuje wymieszanie, jak również dla całkowitego wymieszania jednego z czynników, posiadają charakter bezwymiarowy. Występują w nich bezwymiarowe temperatury oraz kryteria podobieństwa i sympleksy. Do jednoznacznego określenia zagadnienia konieczna jest znajomość trzech spośród sześciu charakterystycznych wielkości (cztery kryteria podobieństwa, stosunek pojemności cieplnych oraz stosunek współczynników przenikania ciepła).

Rozwiązanie podane dla klasycznego, czystego przepływu krzyżowego mimo pozornie dość skomplikowanej postaci dobrze nadaje się do obliczeń dokonywanych na cyfrowej maszynie matematycznej. Przykładowe obliczenia wykazały przy tym, że ciąg $C_n(0)$ jest szybko zbieżny do zera.

Literatura cytowana w tekście

1. J. MADEJSKI, *Teoria wymiany ciepła*, PWN, Warszawa 1963.
2. G. D. RABINOVICH, *On a Particular Case of Stationary Heat Transfer with Crossflow of Heat Agents* Int. Journal of Heat and Mass Transfer, 5 (1962), 409–412.
3. J. SKŁADZIEŃ, *Analiza rekuperatora Fielda przy krzyżowym przepływie czynników bez wymieszania*, ZNPŚ, Energetyka, 45 (1973).
4. J. SKŁADZIEŃ, *Rozkład temperatur w rekuperatorze Fielda przy krzyżowym przepływie czynników*, ZNPŚ, Energetyka, 39 (1971).
5. R. A. STEVENS, J. FERNANDEZ, J. R. WOOLF, *Mean Temperature Difference in One, Two and Three-Pass Crossflow Heat Exchangers*, Trans. ASME, 79 (1957) 287.

Резюме

АНАЛИЗ КОНВЕКЦИОННОГО ПЕТЛЕВОГО РЕКУПЕРАТОРА С ПЕРЕКРЕСТНЫМИ ПОТОКАМИ ТЕПЛОНОСИТЕЛЕЙ

В работе рассматривается тепловой поток в конвекционном петлевом рекуператоре с перекрестным течением без смешивания. Используются общепринятые при анализе конвекционных рекуператоров предположения. Вытекающая из энергетических балансов система уравнений решалась до настоящего времени [2] с помощью преобразования Лапласа. В настоящей работе постулируется решение в виде ряда, а впоследствии подбираются функциональные коэффициенты этого ряда. Полученное решение удобно для расчетов на цифровой вычислительной машине.

Summary

ANALYSIS OF THE CONVECTIVE CROSSFLOW LOOP RECUPERATOR

Heat exchange in the convective loop recuperator with unmixed crossflow is considered. The usual assumptions of the analysis of convective recuperators are accepted. In the paper [2] the energy balance equations were solved by means of the Laplace transformation. In this paper the approximate solution is obtained with the help of integral equations. This solution suggests a particular form of the solution, and a system of simple differential equations is derived. The solution obtained is suitable for computer-aided calculations.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 17 stycznia 1974 r.