MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
2, 13 (1975)

ROZWÓJ MECHANIKI ANALITYCZNEJ W PRACACH A. PRZEBORSKIEGO I A. WUNDHEILERA

ASZOT TIGRANOWICZ GRIGORIAN, BORYS NAUMOWICZ FRADLIN (MOSKWA)

Uczeni polscy A. PRZEBORSKI i A. WUNDHEILER wnieśli wybitny wkład do rozwoju mechaniki.

Udziałem A. PRZEBORSKIEGO jest rozszerzenie zasady d'Alemberta-Lagrange'a na dynamikę układów mechanicznych z nieliniowymi nieholonomicznymi więzami pierwszego rodzaju oraz sformułowanie dla tego rodzaju układu uogólnionych równań dynamicznych typu równań Maggi.

A. WUNDHEILER był jednym z twórców mechaniki analitycznej układów holonomicznych i nieholonomicznych, opartej na fundamentach współczesnej geometrii różniczkowej i rachunku tensorowego.

Intencją autorów niniejszej pracy jest przedstawienie czytelnikowi krótkiego przeglądu historycznego podstawowych prac A. PRZEBORSKIEGO i A. WUNDHEILERA w dziedzinie mechaniki analitycznej.

1. A. Przeborski jako jeden z twórców nieliniowej mechaniki nieholonomicznej. Rozwój idei A. Przeborskiego w pracach M. F. Szulgina

PRZEBORSKI [1, 5,6] rozpatruje ruch układu punktów materialnych, na które nałożone są holonomiczne lub nieholonomiczne więzy pierwszego lub drugiego rodzaju, których równania

$$f_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, p;\ p < 3n) \tag{1}$$

mogą być algebraicznymi związkami pomiędzy współrzędnymi x_j $(j = 1, 2, \ldots, 3n)$ punktów układu, lub też równaniami różniczkowymi pierwszego lub drugiego rzędu, liniowymi bądź nieliniowymi względem pochodnych $\dot{x}_j$ i $\ddot{x}_j$.

Zapisując równania ruchu w postaci Newtona

$$m_j\ddot{x}_j = X_j + R_j \tag{2}$$

lub w postaci d'Alemberta-Lagrange'a

$$(m_j\ddot{x}_j - X_j - R_j)\alpha_j = 0, \tag{3}$$

gdzie α_j są dowolnymi liczbami, i przyjmując, że znany jest charakter realizacji więzów, tak aby ich reakcje R_j można było rozpatrywać jako funkcje w postaci

$$\begin{gathered} R_j = R_j(t, x_k, \dot{x}_k, \ddot{x}_k, \lambda_r), \\ (k = 1, 2, \ldots, 3n;\ r = 1, 2, \ldots, s), \end{gathered} \tag{4}$$

gdzie λ_r są parametrami zależnymi od przyłożonych sił, rozpatrzymy zagadnienie określenia reakcji więzów i zbudowania różniczkowych równań ruchu układu.

Zagadnienie to oczywiście da się rozwiązać jedynie, gdy $s = p$. Jeżeli funkcje (4) są liniowe względem parametrów λ_r, to liniowymi w stosunku do nich będą również równania wyznaczające te parametry.

Niech

$$R_j\,\delta x_j = N_j\,\delta x_j, \tag{5}$$

gdzie wielkości

$$N_j = N_j(t, x_k, \dot{x}_k, \ddot{x}_k) \tag{6}$$

są znanymi funkcjami, a przemieszczenia wirtualne δx_r wyznaczone są przez pozostałe przemieszczenia wirtualne δx_ϱ ($\varrho = s+1, s+2, \ldots, 3n$) z równań

$$A_{rj}\,\delta x_j = 0, \tag{7}$$

gdzie wielkości

$$A_{rj} = A_{rj}(t, x_k, \dot{x}_k, \ddot{x}_k) \qquad (r = 1, 2, \ldots, s;\ s = p) \tag{8}$$

są znanymi funkcjami.

Z (5) i (7) wynika, że

$$R_j = N_j + \lambda_r A_{rj}. \tag{9}$$

Jeżeli związki (1) są holonomiczne lub nieholonomiczne pierwszego rzędu, lub nieholonomiczne drugiego rzędu, liniowe względem przemieszczeń $\ddot{x}_k$, to parametry λ_r wyznaczone są przez układ równań liniowych

$$\frac{1}{m_j}\frac{\partial f_r}{\partial \xi_j}(X_j + N_j + \lambda_i A_{ij}) + \omega_r = 0, \tag{10}$$

gdzie odpowiednio dla wskazanych rodzajów więzów

$$\xi_j = \begin{cases} x_j, \\ \dot{x}_j, \\ \ddot{x}_j, \end{cases} \tag{11}$$

a wielkość

$$\omega_r = \omega_r(t, x_j, \dot{x}_j) \tag{12}$$

przedstawia określoną funkcję.

Niech na więzy nałożone na układ składa się m holonomicznych, h nieholonomicznych pierwszego rzędu, g nieholonomicznych drugiego rzędu, liniowych względem składowych przyśpieszeń

$$f_\alpha = 0, \tag{13}$$

$$f_\beta = 0, \tag{14}$$

$$f_\gamma = 0, \tag{15}$$

($\alpha = 1, 2, \ldots, m$; $\beta = m+1, m+2, \ldots, m+h$; $\gamma = m+h+1, m+h+2, \ldots, m+h+g = p$), przy czym równania (15) na mocy związków

$$x_j = x_j(t, q_s) \tag{16}$$

można przedstawić w postaci

(17) $$\dot{q}_\omega = \dot{q}_\omega(t, q_\varepsilon, r_\lambda), \quad (\omega, \varepsilon = 1, 2, \ldots, \mu; \ \lambda = 1, 2, \ldots, \nu = \mu - h),$$

gdzie r_λ są pewnymi parametrami, które na mocy związków (15)–(17) określone są przy pomocy równań różniczkowych

(18) $$\dot{r}_l = \dot{r}_l(t, q_s, r_\lambda, s_u), \quad (l = 1, 2, \ldots, \nu; \ u = 1, 2, \ldots, \nu - g),$$

zależnych od innych parametrów s_u.

Skorzystajmy z ogólnego równania dynamiki (3), w których zgodnie ze związkami (7) położymy $\alpha_j = \delta x_j$, oraz dołączymy doń dowolne równania

(19) $$A_{p+v,j}\delta x_j = \delta\sigma_v, \quad (v = 1, 2, \ldots, 3n - p = \varrho),$$

gdzie $\delta\sigma_v$ są dowolnymi liczbami, a współczynniki

(20) $$A_{p+v,j} = A_{p+v,j}(t, x_k, \dot{x}_k, \ddot{x}_k)$$

na mocy (16)–(20) można rozpatrywać jako funkcje

(21) $$A_{p+v,j} = A_{p+v,j}(t, q_\varepsilon, r_\lambda, s_u).$$

Z (7) i (19) otrzymamy

(22) $$\delta x_j = a_{jv}\delta\sigma_v,$$

gdzie wielkości a_{jv} określane są z tożsamości

(23) $$A_{lj}a_{jv} = 0,$$

przy czym rząd macierzy $\|a_{ik}\|$, na mocy niezależności równań (7) i (19), równy jest $3n - p$.

Podstawiając do ogólnego równania mechaniki (3) za α_j — wyrażenia (22), uwzględniając (9) i (23), otrzymamy różniczkowe równania ruchu układu nieholonomicznego nie zawierające mnożników

(24) $$(m_j\ddot{x}_j - X_j - N_j)a_{jv} = 0.$$

Równania te na mocy związków (16)–(18) są zależnościami funkcyjnymi względem zmiennych q_s, r_λ, s_u. Jeżeli określić z nich parametry s_u i znalezione wyrażenia podstawić do równań (18) otrzymamy układ $\mu + \nu$ równań różniczkowych (17)–(18) z takąż liczbą niewiadomych funkcji

(25) $$q_\omega = q_\omega(t), \quad r_\lambda = r_\lambda(t).$$

W przypadku, gdy na układ nałożone są wyłącznie idealne nieholonomiczne więzy pierwszego rodzaju

(26) $$f_\beta = b_{\beta j}(t, x_k)\dot{x}_j + b_\beta(t, x_k) = 0,$$

tj. $q = 0$, otrzymane dynamiczne równania ruchu Przeborskiego przechodzą w równania Maggi.

Jeżeli w charakterze parametrów r_λ weźmie się uogólnione prędkości $\dot{q}^\lambda$, a w charakterze parametrów s_u — uogólnione przyspieszenia $\ddot{q}_\lambda$, to dla scharakteryzowania ruchu układu otrzymamy ν równań różniczkowych typu (24) i (18) drugiego rzędu względem q_ν i $\mu - \nu$

równań typu (17) pierwszego rzędu względem q_ε, razem układ μ równań na określenie μ niewiadomych funkcji:

$$q_\omega = q_\omega(t). \tag{27}$$

W przypadku $\nu = \mu$ spośród poszukiwanych μ równań ruchu wszystkie będą równaniami drugiego rzędu względem funkcji (27).

Okazuje się, że równania Przeborskiego (24) są niezmiennicze względem wyboru dowolnych funkcji (20) w związkach (19).

Gdy zależność pomiędzy składowymi prędkości punktów układu $\dot{x}_j$ i prędkościami Lagrange'a $\dot{q}_\varepsilon$ jest liniowa, tj.

$$\dot{x}_j = c_{j\omega}(t, q_\varepsilon)\dot{q}_\omega + c_j(t, q_\varepsilon), \tag{28}$$

z równań Przeborskiego (24) wynikają równania Appela wyrażone przez funkcję przyspieszeń.

Idee PRZEBORSKIEGO znalazły kontynuację w pracach uczonego radzieckiego M. F. SZULGINA.

SZULGIN otrzymał nader ogólne równania różniczkowe dynamiki nieholonomicznej we współrzędnych Lagrange'a, zawierające jedną funkcję — energię kinetyczną lub energię przyspieszeń. Podstawę wyprowadzenia tych równań stanowi aksjomat o możliwości uwolnienia od więzów oraz zasada najmniejszego wymuszenia Gaussa. Korzystając ze związków (7) i (9), zasadę Gaussa można zapisać w postaci

$$(m_j \ddot{x}_j - X_j - N_j)\delta\ddot{x}_j = 0. \tag{29}$$

Wariacje $\delta\ddot{x}_j$ nie są tu jednak niezależne, a do reakcji więzów wchodzą składowe N_j zależne od własności ruchu mechanicznego i przy znanym charakterze realizacji więzów stanowiące znane funkcje kinematycznych elementów ruchu, oraz składowe

$$N'_j = \lambda_r A_{rj} = \lambda_r \frac{\partial f_r}{\partial \xi_j}, \tag{30}$$

które, na mocy (7) mają własności reakcji i mogą być określone dopiero w wyniku badania ruchu. Zatem N_j i N'_j można nazwać odpowiednio częścią czynną i bierną reakcji R_j.

Przechodząc do niezależnych współrzędnych Lagrange'a q_μ ($\mu = 1, 2, \ldots, k$) wyrazimy zależność (29) w postaci

$$[L_\mu(T) - Q_\mu - P_\mu - Q'_\mu]\delta\ddot{q}_\mu = 0, \tag{31}$$

skąd

$$L_\mu(T) = Q_\mu + P_\mu + Q'_\mu, \tag{32}$$

gdzie

$$Q_\mu = X_j \frac{\partial x_j}{\partial q_\mu}, \quad P_\mu = N_j \frac{\partial x_j}{\partial q_\mu}, \quad L_\mu(T) = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\mu} - \frac{\partial T}{\partial q_\mu}, \tag{33}$$

przy czym, w wyniku badania własności ruchu, wielkości

$$P^*_\mu = P_\mu(t, q_\lambda, \dot{q}_\lambda, \ddot{q}_\lambda) \quad (\mu, \lambda = 1, 2, \ldots, k) \tag{34}$$

uważa się za znane.

Na podstawie równań węzłów nieholonomicznych, łatwo jest stwierdzić, że

$$\frac{\partial f_\varrho}{\partial \dot{q}_\mu}\ddot{q}_\mu+\varphi_\varrho = 0, \tag{35}$$

$$\frac{\partial f_\varrho}{\partial \xi_\mu}\delta\ddot{q}_\mu = 0, \tag{36}$$

$$(\varrho = m+1, m+2, \ldots, m+h; \quad r = m+1, m+2, \ldots, p),$$

gdzie, dla więzów (14) i (15), mamy odpowiednio

$$\xi_\mu = \dot{q}_\mu, \qquad \xi_\mu = \ddot{q}_\mu, \tag{37}$$

a φ_ρ jest wyrażeniem nie zawierającym przyspieszeń.

Wprowadzając mnożniki więzów na mocy (33) i (36), otrzymamy

$$Q'_\mu = P^*_\mu+\lambda_r\frac{\partial f_r}{\partial \xi_\mu}. \tag{38}$$

W ten sposób równania ruchu (32) ostatecznie przyjmują postać

$$L_\mu(T) = Q_\mu+P_\mu+P^*_\mu+\lambda_r\frac{\partial f_r}{\partial \xi_\mu}. \tag{39}$$

W celu pełnego scharakteryzowania ruchu układu, do równań tych należy dołączyć równania więzów nieholonomicznych (14)–(15) wyrażone we współrzędnych Lagrange'a.

Oczywistą jest rzeczą, że układ równań (39) jest równoważny układowi uogólnionych równań Gibbsa–Appela z nieokreślonymi mnożnikami

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_\mu} = Q_\mu+P_\mu+P^*_\mu+\lambda_r\frac{\partial f_r}{\partial \xi_\mu}. \tag{40}$$

SZULGIN stawia problem sprowadzenia równań ruchu do najmniejszej ich liczby. Wykazuje on, że z zależności zachodzących pomiędzy współrzędnymi kartezjańskimi i współrzędnymi Lagrange'a a składowymi prędkości i przyspieszeń otrzymać można związki

$$\ddot{x}_j = A_{j\nu}\ddot{q}_\nu+A_j, \tag{41}$$

$$\delta\ddot{x}_j = A_{j\nu}\delta\ddot{q}_\nu, \tag{42}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, r = k-h-g; \quad j = 1, 2, \ldots, 3n),$$

gdzie $\ddot{q}_\nu$ i $\delta\ddot{q}_\nu$ są wzajemnie niezależnymi przyspieszeniami Lagrange'a i ich wariacjami, a $A_{j\nu}$ i A_j są pewnymi określonymi funkcjami zmiennych t, q_ν i $\dot{q}_\nu$, przy czym z (41) wynika, że

$$A_{j\nu} = \frac{\partial \ddot{x}_j}{\partial \ddot{q}_\nu}. \tag{43}$$

Jeśli wprowadzić teraz do rozważań energię przyspieszeń, to zasada Gaussa (29) na mocy związków (42)–(43) przekształci się do postaci

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_\nu}-E_\nu-\Delta_\nu\right)\delta\ddot{q}_\nu = 0, \tag{44}$$

skąd otrzymamy równania ruchu układu bez mnożników więzów

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_\nu} = E_\nu + \Delta_\nu, \tag{45}$$

gdzie

$$E_\nu = A_{j\nu} X_j, \quad \Delta_\nu = A_{j\nu} N_j. \tag{46}$$

Równania te pozostają prawdziwe i w nieholonomicznych współrzędnych. Mogą one być przedstawione w postaci

$$\frac{\partial R}{\partial \ddot{q}_\nu} = 0, \quad R = S - E_\nu \ddot{q}_\nu \tag{47}$$

lub

$$L_\nu(T_0) + \frac{\partial S_1}{\partial \ddot{q}_\nu} = E_\nu + Q_\nu. \tag{48}$$

Równania (47) można uważać za uogólnioną zasadę Appela–Meiera, a równania (48) — za uogólnione równania Cenowa.

Jak wykazał to MASŁOW [6] otrzymane równania dają się uogólnić także na przypadek ruchu układów mechanicznych o nieliniowych więzach dowolnego rzędu.

2. Rozwój absolutnej mechaniki reonomicznej w pracach A. Wundheilera

Do WUNDHEILERA [2–4] należy priorytet w dziedzinie budowy absolutnej geometrii i mechaniki reonomicznej. Mając na uwadze potrzeby mechaniki klasycznej zachowuje on uprzywilejowaną rolę czasu i rozpatruje wielowymiarową geometrię odkształconej przestrzeni Riemanna (geometrię reonomiczną), która charakteryzuje się grupą transformacji współrzędnych

$$x^\lambda = x^\lambda(x^\nu, t). \tag{49}$$

Badając ruch nieholonomicznego reonomicznego układu o energii kinetycznej

$$T = \frac{1}{2} a_{\lambda\mu}(x^\nu, t)\dot{x}^\lambda \dot{x}^\mu + a_\lambda(x^\nu, t)\dot{x}^\lambda + \frac{1}{2} A(x^\nu, t), \tag{50}$$

otrzymujemy rozmaitość konfiguracji i czasu V_{n+1} o metryce

$$ds^2 = 2T dt^2 = a_{\lambda\mu} dx^\lambda dx^\mu + 2a_\lambda dx^\lambda dt + A\, dt^2. \tag{51}$$

Równanie t = const określa jednoparametrową rodzinę uprzywilejowanych powierzchni $V_n(t)$ w V_{n+1}.

Według WUNDHEILERA, ruch układu mechanicznego można rozpatrywać jako pewną krzywą w V_{n+1} lub jako ruch odwzorowującego punktu w odkształcalnej przestrzeni $V_n(t)$ o metryce

$$d\sigma^2 = a_{\lambda\mu} dx^\lambda dx^\mu. \tag{52}$$

WUNDHEILER uważa za niemożliwe identyfikowanie punktów w przestrzeni $V_n(t)$ po transformacji współrzędnych, w związku z tym bada niezmienność równań względem ogólnej transformacji o postaci (49). Jednakże ta forma transformacji, zawierająca parametr t, nie daje możliwości wykorzystania klasycznego rachunku tensorowego. Dlatego też WUNDHEILER proponuje odpowiednie zmodyfikowanie konwencjonalnego aparatu rachunku tensorowego, wprowadzając pojęcie silnych obiektów tensorowych.

Układ n wielkości nazwiemy silnym wektorem, jeżeli transformują się one według zwykłego prawa

$$V^{\varepsilon} = \frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x^{\omega}} V^{\omega}. \tag{53}$$

Ponieważ

$$dx^{\varepsilon} = \frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x^{\omega}} dx^{\omega} + \frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial t} dt, \tag{54}$$

więc dx^{ω} nie jest silnym wektorem.

Jeśli f jest silnym skalarem, to $\frac{\partial f}{\partial x^{\omega}}$ jest silnym wektorem kowariantnym; w tym przypadku

$$\frac{\partial f}{\partial x^{\varepsilon}} = \frac{\partial f}{\partial x^{\omega}} \cdot \frac{\partial x^{\omega}}{\partial x^{\varepsilon}}. \tag{55}$$

Kowariantny silny wektor

$$v_{\lambda} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^{\lambda}} = a_{\lambda\mu}\dot{x}^{\mu} + a_{\lambda} \tag{56}$$

nazywa się podłużną prędkością ruchu układu, a kowariantny silny tensor

$$a_{\lambda\mu} = \frac{\partial v_{\lambda}}{\partial \dot{x}^{\mu}} \tag{57}$$

— tensorem podstawowym.

Absolutną różniczką silnego wektora v^{λ} nazywa się wyrażenie

$$Dv^{\lambda} = dv^{\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} v^{\nu} dx^{\mu} + \Gamma^{\lambda}_{\nu} v^{\nu} dt. \tag{58}$$

Analogicznie

$$Dv_{\nu} = dv_{\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} v_{\lambda} dx^{\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu} v_{\lambda} dt, \tag{59}$$

gdzie

$$\begin{aligned} 2\Gamma_{\omega,\lambda\mu} &= \partial_{\lambda} a_{\mu\omega} + \partial_{\mu} a_{\omega\lambda} - \partial_{\omega} a_{\lambda\mu}, \\ 2\Gamma_{\omega\lambda} &= \partial_{t} a_{\mu\omega} + \partial_{\mu} a_{\omega} - \partial_{\omega} a_{\mu}, \\ \Gamma^{\omega}_{\lambda\mu} &= a^{\omega\lambda}\Gamma_{\nu\lambda\mu}, \quad \Gamma^{\omega}_{\mu} = a^{\omega\nu}\Gamma_{\nu\mu}. \end{aligned} \tag{60}$$

Pochodne silnych wektorów określa się za pomocą wzorów

$$\begin{aligned} \nabla_{\omega} v^{\lambda} &= \frac{\partial v^{\lambda}}{\partial x^{\omega}} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\omega} v^{\nu}, \\ \nabla_{t} v^{\lambda} &= \frac{\partial v^{\lambda}}{\partial t} + \Gamma^{\lambda}_{\nu} v^{\nu} - a^{\mu}\nabla_{\mu} v^{\lambda}. \end{aligned} \tag{61}$$

Na przykład dla silnego skalara f otrzymujemy zamiast $\frac{\partial f}{\partial t}$ wyrażenie

$$\nabla_{t} f = \frac{\partial f}{\partial t} - a^{\mu} \frac{\partial f}{\partial x^{\mu}}.$$

Wprowadzimy także pojęcie tensora rozciągania przestrzeni odkształcalnej $V_n(t)$

$$W_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}(\partial_t a_{\lambda\mu} - \nabla_\mu a_\lambda - \nabla_\lambda a_\mu). \tag{62}$$

Tensor ten w pewnym stopniu odzwierciedla specyfikę geometrii reonomicznej. Może być rozpatrywany jako miara rozciągania przestrzeni odkształcalnej $V_n(t)$, ponieważ znika on w przypadku ruchu sztywnego przestrzeni. Jednoczesne znikanie tensora rozciągania i wielkości $A - a_\lambda a^\lambda$ stanowi warunek konieczny i dostateczny skleronomiczności przestrzeni. Okazuje się, że znikanie tensora rozciągania jest warunkiem koniecznym i dostatecznym przemienności przemieszczeń w $V_n(t)$, ponieważ

$$(\delta\bar{\delta} - \bar{\delta}\delta)x^\lambda = W^\lambda_\nu(\bar{\delta}x^\nu dt - \delta x^\nu \bar{d}t).$$

Do tej chwili rozpatrywaliśmy holonomiczne parametry x^λ i odpowiednie transformacje w postaci (49). Określiliśmy geometrię reonomiczną jako teorię niezmienników grupy transformacji współrzędnych (49). WUNDHEILER rozpatruje również transformacje parametrów nieholonomicznych

$$dq^\lambda = b^\lambda_i(q^\nu, t)dq^i + b^\lambda(q^\nu, t)dt. \tag{63}$$

Teorię niezmienników grupy transformacji współrzędnych nieholonomicznych w postaci (63) nazywa on geometrią reonieholonomiczną. Przemieszczeniom, dla których $dt = 0$, odpowiadają równania

$$dq^\lambda = b^\lambda_i dq^i. \tag{64}$$

Przemieszczenia te tworzą wirtualną reonieholonomiczną podprzestrzeń. Wektor v^λ należy do tej podprzestrzeni wirtualnej, jeżeli daje się przedstawić w postaci

$$v^\lambda = b^\lambda_i v^i. \tag{65}$$

W zastosowaniach geometrii reonieholonomicznej w mechanice znaczną rolę odgrywa wektor

$$S_i = b^\lambda_i \left[\frac{1}{2}\partial_\lambda(B - b_i b^i) - \nabla_t B_\lambda - B^\omega \nabla_\omega B_\lambda - W_{\lambda\omega} B^\omega\right], \tag{66}$$

który WUNDHEILER nazywa absolutną siłą odśrodkową. We wskazanym wyrażeniu B^ω jest tak zwaną odwrotną prędkością układu reonieholonomicznego

$$B^\omega = b^\omega - b^\omega_i b^i, \tag{67}$$

a B i b_i określone są przez metrykę odpowiedniej przestrzeni

$$d\sigma^2 = b_{ij}(q^r, t)dq^i dq^j + 2b_i(q^r, t)dq^i dt + B(q^r, t). \tag{68}$$

Dla przestrzeni reonieholonomicznej tensor rozciągania wyraża się wzorem

$$W_{ij} = b^\lambda_i b^\mu_j W_{\lambda\mu} - B_l H^\lambda_{ji}, \tag{69}$$

gdzie $W_{\lambda\mu}$ jest tensorem rozciągania dla odpowiedniej nadrzędnej przestrzeni reonomicznej, a H^λ_{ji} — jednym z dwu tensorów krzywizny wymuszonej

$$H^\lambda_{ji} = b^\omega_i b^\nu_j \nabla_\nu b^\lambda_\omega, \quad H^\nu_i = b^\omega_i \nabla_t b^\nu_\omega. \tag{70}$$

Wychodząc z uogólnionej zasady Hamiltona–Ostrogradzkiego w postaci

$$\int_{t_1}^{t_2} (\overline{\delta}T + Q_i\overline{\delta}x^i)dt = 0, \tag{71}$$

gdzie

$$\overline{\delta} = \delta - \delta t \cdot \frac{d}{dt} \tag{72}$$

oznacza silną wariację przemienną z operacją silnej różniczki δ wzdłuż toru, WUNDHEILER otrzymuje ogólne różniczkowe równania ruchu nieholonomicznego, reonomicznego układu mechanicznego w quasi-współrzędnych w postaci

$$\frac{Dv^i}{dt} + W^i_k v^k = Q_i + S_i, \tag{73}$$

w których każdy człon ma sens mechaniczny i jest wielkością niezmienniczą. Na przykład, w przypadku wirującej płaszczyzny S_i oznacza odśrodkową siłę bezwładności. Stąd nazwa absolutny wektor odśrodkowej. Człon $W^i_k v^k$ można interpretować jako analog siły bezwładności Coriolisa.

Zauważymy na zakończenie, że wspólnie z J. SYNGE i G. VRANCEANU zasługą A. WUNDHEILERA jest zbadanie stateczności równowagi ruchu nieholonomicznego układu mechanicznego przy pomocy metod rachunku tensorowego i geometrii nieholonomicznej.

W ogólności należy zauważyć, że zasadnicze trudności powstałe na drodze do zbadania geometrii wewnętrznej nieholonomicznej rozmaitości udało się przezwyciężyć dopiero w końcu lat czterdziestych uczonemu radzieckiemu W. W. WAGNEROWI w pracy *Geometria rożniczkowa rozmaitości nieholonomicznych*, która otrzymała pierwszą nagrodę na VIII międzynarodowym konkursie im. N. I. Łobaczewskiego w Kazaniu w 1937 r.

Budowa geometryczno-różniczkowej aksjomatyki dynamiki klasycznej układów należy do ucznia W. W. WAGNERA — A. W. GOCHMANA (patrz: A. W. Gochman, *Geometryczno-różniczkowe podstawy klasycznej dynamiki ukladów*, wyd. Uniwersytetu Saratowskiego, Saratów 1969).

Literatura cytowana w tekście

1. A. PRZEBORSKI, *Die allgemeinsten Gleichungen der klassischen Dynamik*, Math. Zeitschr., **36** (1932), 184–194.
2. A. WUNDHEILER, *Ueber die Variationsgleichungen für affine geodätische Linien und nichtholonome, nichtkonservative dynamische Systeme*, Prace Mat.-Fiz., **38** (1931), 129–147.
3. A. WUNDHEILER, *Absolute Bewegungsgleichungen der Mechanik*, Verhandl. des intern. Math. Kongress, Zürich 1932, s. 264–265.
4. A. WUNDHEILER, *Rheonome Geometrie, Absolute Mechanik*, Prace Mat.-Fiz., **40** (1933), 97–142.
5. A. PRZEBORSKI, *Sur les forces dépendant des accélerations*, Compt. rend. d'Acad. Sci. de Paris, **197** (1933).
6. A. PRZEBORSKI, *Wyklady mechaniki teoretycznej*, t. I, II, Warszawa 1930–1935.

Резюме

РАЗВИТИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ В ТРУДАХ А. ПШЕБОРСКОГО И А. ВУНДХЕЙЛЕРА

В статье освещается выдающийся вклад двух видных польских ученых А. Пшеборского и А. Вундхейлера в развитие аналитической механики.

А. Пшеборский является одним из основоположников нелинейной неголономной механики. Он распространил на динамику механических систем с нелинейными неголономными связями первого порядка принцип Деламбера-Лагранжа и установил для систем указанного типа обобщенные динамические уравнения. Дальнейшее развитие идеи А. Пшеборского получили в исследованиях советского ученого М. Ф. Шульгина, который установил весьма общие дифференциальные уравнения неголономной динамики в лагранжевых координатах, содержащие одну функцию — кинетическую энергию, или энергию ускорений.

А. Вундхейлер — один из основателей построения аналитической механики голономных и неголономных систем на основе методов современной дифференциальной геометрии и тензорного исчисления. Ему принадлежит приоритет в построении абсолютной реономной геометрии и механики.

Summary

CONTRIBUTION OF A. PRZEBORSKI AND A. WUNDHEILER TO THE DEVELOPMENT OF ANALYTICAL MECHANICS

The considerable contributions of A. Przeborski and A. Wundheiler to the development of analytical mechanics are discussed in the paper. A. Przeborski is one of the founders of non-linear anholonomic mechanics: he generalized the d'Alembert-Lagrange principle to the dynamics and mechanical systems with non-linear anholonomic constraints of the first kind and thus derived the generalized dynamic equations for such systems. The ideas of A. Przeborski were further developed by a Soviet scientist M. F. Sulgin who succeeded in obtaining a rather general set of differential equations of non-holonomic dynamics in Lagrangean coordinates involving but one function — the kinetic energy or the acceleration energy.

A. Wundheiler is one of the co-founders of analytical mechanics of holonomic and non-holonomic systems on the basis of the methods of modern differential geometry and tensor calculus. He has to be considered as the first mechanician to construct the absolute rheonomic geometry and mechanics.

**INSTYTUT HISTORII PRZYRODOZNAWSTWA I TECHNIKI
AKADEMII NAUK ZSRR, MOSKWA**

Praca została złożona w Redakcji dnia 26 sierpnia 1974 r.