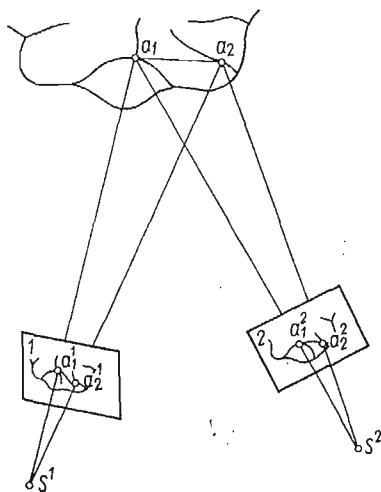


WYZNACZANIE KINEMATYKI PROCESÓW DEFORMACJI METODĄ  
STEREOFOTOGRAFICZNO-RZUTOWĄ\*)

TADEUSZ BEDNARSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Pomiary wielkości kinematycznych procesów mechanicznych, szczególnie procesów deformacji, zachodzących w przestrzeni trój- lub czterowymiarowej (czasoprzestrzeni) sprawiają na ogół wiele trudności. Jedną z metod pomiaru tych wielkości jest metoda fotografii lub filmu stereoskopowego, która pozwala na wyznaczenie elementów kinema-



Rys. 1

tyki procesu lub jego chwilowego stanu kinematycznego na podstawie dowolnej pary zdjęć obszaru przestrzennego, w którym ten proces zachodzi lub znajduje się obserwowany model, a wykonanych z dwu różnych punktów  $s^m$ , dla  $m = 1, 2$  tej przestrzeni (rys. 1). Przez dowolną parę zdjęć rozumiemy parę zdjęć o nieznanych elementach orientacji, a wykonanych w tym samym momencie. W pracach [1, 2, 3] opisana została klasyczna metoda opracowywania pary zdjęć przy znanych elementach orientacji, a stosowana w fotogrametrii, z tym, że dostosowana została do opracowywania filmowych zdjęć stereoskopowych na przykładzie deformacji powłoki. Znajomość elementów orientacji zdjęć

\*) Praca została nagrodzona na Ogólnopolskim Konkursie na prace doświadczalne z mechaniki technicznej — zorganizowanym przez Oddział PTMTS w Częstochowie, w 1974 r.

*a priori* wymaga dodatkowych pomiarów pozwalających na ich wyznaczenie, które są dosyć kłopotliwe [2, 6].

W przedstawionej pracy zaprezentowana została metoda nie wymagająca znajomości elementów orientacji *a priori* dla opracowania zdjęć stereoskopowych. Elementy te są obliczane w trakcie opracowywania wyników pomiarowych. Wykorzystuje się do tego punkty wzorcowe. Natomiast metoda ta, jak wykazuje praktyka obliczeń numerycznych, jest bardzo czuła na dokładność pomiaru materiału filmowego. Dokładność ta zależy w dużym stopniu od rozmieszczenia punktów kontrolnych i sposobu pomiaru filmu.

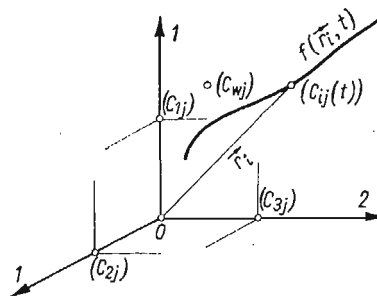
## 2. Sformułowanie problemu

Stereofotograficzno-rzutowa metoda pomiaru elementów kinematyki bez znajomości elementów orientacji polega na wyznaczaniu chwilowego położenia punktów materialnych na podstawie pary jednocześnie wykonanych zdjęć. Każde zdjęcie stanowi rzut środkowy trójwymiarowej przestrzeni materialnej na płaszczyznę zdjęcia (rys. 1). Na podstawie dwu takich rzutów, dokonanych z dwu różnych punktów nazywanych środkami rzutów  $s^m$  dla  $m = 1, 2$  odtwarzamy przestrzeń trójwymiarową. Nieznane są nam położenia zarówno środków rzutów  $s^m$ , jak i płaszczyzn zdjęć wyznaczonych układami współrzędnych  $x_i^m$  dla  $i, m = 1, 2$ . Są to tzw. elementy orientacji.

Jedna para zdjęć określa chwilowy stan kinematyczny badanego procesu, wiele zaś takich par wykonanych w jednakowych odstępach czasowych określa kinematykę procesu.

## 3. Punkty wzorcowe i płaszczyzna wzorcowa

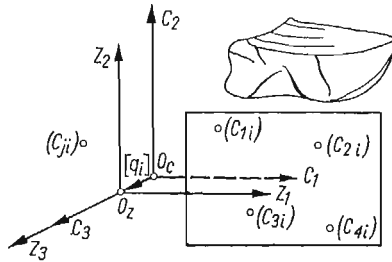
Materializacji przyjętego układu odniesienia  $c_i$  dla  $i = 1, 2, 3$  dokonujemy przy pomocy punktów wzorcowych (rys. 2)  $(c_{ji})$  dla  $j = 1, 2, \dots, J$ , które w zasadzie rozmieszczamy dowolnie w otoczeniu badanego procesu. Ze względu na odtwarzanie trójwymiarowej



Rys. 2

przestrzeni minimalna ilość tych punktów wynosi  $J = 6$  i nie mogą one leżeć w jednej płaszczyźnie. Ze względów dokładnościowych korzystniejszą jest, aby  $J > 6$ . Metoda rzutowa wymaga, aby większość punktów wzorcowych była zgrupowana na jednej płaszczyźnie, którą nazywać będziemy płaszczyzną wzorcową, punkty zaś ją wyznaczające oznaczymy znacznikiem  $w$ , czyli  $(c_{w,i})$  dla  $i = 1, 2, \dots, W$ , przy czym  $W \geq 4$ . Wybór płaszczyzny wzor-

cowej w zmaterializowanym układzie odniesienia  $c_i$  może być w zasadzie dowolny, byleby nie zawierały osi optycznych układu stereoskopowego i środków rzutów. Dla uproszczenia rachunków przyjmujemy za płaszczyznę wzorcową płaszczyznę prostopadłą do jednej z osi, np.  $c_{w,3} = \alpha = \text{const}$ . Nie ogranicza to ogólności rozważań, ponieważ poprzez

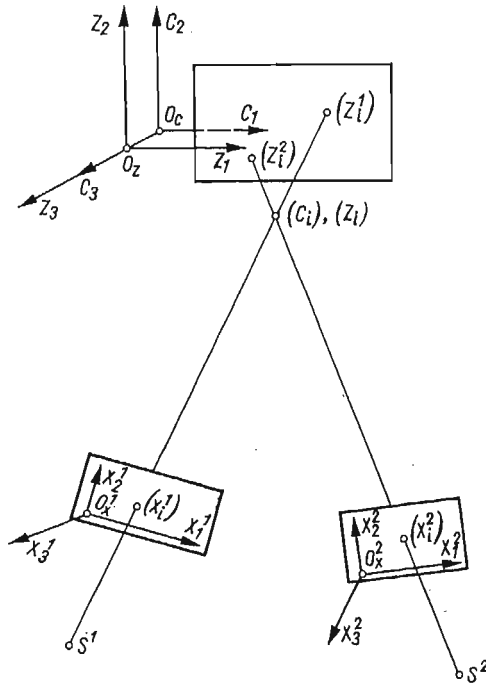


Rys. 3

transformację układu odniesienia postawiony warunek możemy spełnić. W celu uniknięcia nieporozumień wprowadzimy nowy układ odniesienia  $z_i$  dla  $i = 1, 2, 3$  związany bezpośrednio z płaszczyzną wzorcową (rys. 3) powstały przez translację

$$(1) \quad z_i = c_i - q_i, \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, 3,$$

gdzie wektor translacji  $q_i = [0, 0, \alpha]$ .



Rys. 4

## 4. Układy odniesienia

Proces badany rozpatrywać będziemy w kartezjańskim układzie odniesienia  $c_i$  dla  $i = 1, 2, 3$ , bezpośrednio związanym z otoczeniem badanego procesu poprzez punkty wzorcowe (rys. 1 i 3). Natomiast wyniki pomiarów otrzymujemy w dwóch układach współrzędnych instrumentu  $x_i^m$  dla  $m = 1, 2, i = 1, 2, 3$ , bezpośrednio związanych z płaszczyznami par zdjęć warunkiem  $x_3^m = 0$ . Dodatkowo wprowadziliśmy już pomocniczy układ współrzędnych przestrzennych  $z_i$  związany układem  $c_i$  poprzez translację (1). Natomiast współrzędne  $x_i^m$  i  $z_i^m$  są ze sobą związane poprzez rzuty środkowe (rys. 4).

## 5. Przekształcenia rzutowe płaszczyzn zdjęć na płaszczyznę wzorcową

Wprowadzimy na płaszczyznach obu zdjęć i na płaszczyźnie wzorcowej współrzędne jednorodne  $\{\bar{x}_i^m\}$  i  $\{\bar{z}_i\}$  dla  $m = 1, 2, i = 0, 1, 2$ , punktów o współrzędnych kartezjańskich  $(x_i^m)$  i  $(z_i)$  dla  $i, m = 1, 2$ , [5, 7]. Wtedy wzajemnie jednoznaczne przekształcenie jednej płaszczyzny na drugą zapisać można w postaci

$$(2) \quad \bar{z}_i = \sum_{j=0}^2 \bar{a}_{ij}^m \bar{x}_j^m, \quad \text{dla } m = 1, 2, \quad i = 0, 1, 2,$$

gdzie wyznacznik współczynników macierzy przekształcenia  $(\bar{a}_{ij}^m) \neq 0$ . Dla punktów właściwych rozpatrywanych płaszczyzn  $\bar{c}_0 \neq 0$  i  $\bar{x}_0^m \neq 0$  dla  $m = 1, 2$ , a ponieważ współrzędne kartezjańskie określone są wzorami

$$(3) \quad x_i^m = \frac{\bar{x}_i^m}{\bar{x}_0^m}, \quad z_i = \frac{\bar{z}_i}{\bar{z}_0} \quad \text{dla } i, m = 1, 2,$$

możemy przekształcenie (2) zapisać dla współrzędnych kartezjańskich w postaci

$$(4) \quad z_i = \frac{\sum_{j=0}^2 \bar{a}_{ij}^m x_j^m}{\sum_{j=0}^2 \bar{a}_{0j}^m x_j^m}, \quad \text{dla } m = 1, 2, \quad i = 1, 2.$$

Mając na uwadze, iż  $x_0^m = 1$ , możemy dzieląc licznik i mianownik przez  $\bar{a}_{00}^m \neq 0$  zapisać przekształcenie (4) w postaci

$$(5) \quad z_i = \frac{a_i^m + \sum_{j=1}^2 A_{ij}^m x_j^m}{1 + \sum_{j=1}^2 b_j^m x_j^m}, \quad \text{dla } i, m = 1, 2,$$

gdzie  $a_i^m, b_j^m, A_{ij}^m$  są macierzami przekształcenia współrzędnych  $x_i^m$  punktów  $(x_i^m)$  płaszczyzn par zdjęć dla  $m = 1, 2$  na współrzędne  $z_i$  punktów  $(z_i)$  płaszczyzny wzorcowej.

**5.1. Macierze przekształcenia.** Dla określenia przekształcenia rzutowego (5) wymagana jest znajomość macierzy tego przekształcenia  $a_i^m, b_j^m, A_{ij}^m$  dla  $i, j, m = 1, 2$ . Macierze te możemy wyznaczyć ze znajomości współrzędnych kartezjańskich  $c_j$   $i = z_{ji}$  dla  $i = 1, 2$  i  $j = 1, 2, \dots, J$  punktów wzorcowych, oraz współrzędnych instrumentu  $x_j^m$  obrazów tych punktów na obu zdjęciach, czyli dla  $m = 1, 2$ .

Punkty wzorcowe ( $c_{ji}$ ) leżące na płaszczyźnie wzorcowej (a ściślej — ją wyznaczające) oznaczamy dodatkowo literą  $w$ , czyli ( $c_{w_{w,i}}$ ) dla  $w = 1, 2, \dots, W$ , dla odróżnienia od pozostałych punktów wzorcowych, które nadal oznaczamy przez ( $c_{ji}$ ). Wtedy przekształcenie rzutowe (5) dla punktów wzorcowych zapiszemy w postaci:

$$(6) \quad z_{w_{w,i}} = \frac{a_i^m + \sum_{l=1}^2 A_{il}^m x_{w_{w,l}}^m}{1 + \sum_{l=1}^2 b_l^m x_{w_{w,l}}^m}, \quad \text{dla } i, m = 1, 2, \quad w = 1, 2, \dots, W.$$

W przekształceniu tym  $z_{w_{w,i}}$  i  $x_{w_{w,i}}^m$  są znane, więc przy dostatecznej ilości punktów wzorcowych  $W \geq 4$  macierze przekształcenia  $a_i^m$ ,  $b_l^m$  i  $A_{il}^m$  możemy wyznaczyć.

Przekształcenie (6) zapisujemy w postaci:

$$(7) \quad a_i^m + \sum_{l=1}^2 A_{il}^m x_{w_{w,l}}^m - z_{w_{w,i}} \sum_{l=1}^2 b_l^m x_{w_{w,l}}^m = z_{w_{w,i}}$$

dla  $i, m = 1, 2, w = 1, 2, \dots, W$ , które przedstawia układ  $4W$  równań z  $16$  niewiadomymi wyrazami macierzy przekształcenia (6). Układ ten jest rozłączny ze względu na wskaźnik  $m$  i możemy go rozbić na dwa układy dla  $m = 1, 2$ , po  $2W$  równań z ośmioma niewiadomymi każdy. Po uporządkowaniu układy równań (7) możemy zapisać w postaci

$$(8) \quad \sum_{p=1}^8 E_{n,p}^m u_p^m = e_n^m, \quad \text{dla } m = 1, 2, \quad n = 1, 2, \dots, 2W.$$

Należy zwrócić uwagę, że w ogólnym przypadku możemy macierze przekształcenia określać na podstawie jednej grupy punktów kontrolnych dla zdjęcia lewego ( $m = 1$ ), a na podstawie drugiej grupy punktów dla zdjęcia prawego ( $m = 2$ ). Możemy wykorzystać niektóre punkty wspólne, lub też wyznaczyć te macierze na podstawie wspólnych dla obu zdjęć punktów kontrolnych. Wtedy układ (8) możemy zapisać w postaci

$$(9) \quad \sum_{p=1}^8 E_{n,p}^m u_p^m = e_n, \quad \text{dla } m = 1, 2, \quad n = 1, 2, \dots, 2J(W).$$

Wektor wyrazów wolnych  $e_n$  ma postać:

$$(10) \quad e_n = \begin{cases} z_{w_{n,1}}, & \text{dla } n = 1, 2, \dots, W, \\ z_{w_{n-W,2}}, & \text{dla } n = W+1, \dots, 2W. \end{cases}$$

Natomiast macierze współczynników przy niewiadomych mają postać:

$$(11) \quad E_{n,p}^m = \begin{cases} \left. \begin{array}{ll} 1, & \text{dla } p = 1, \\ 0, & \text{dla } p = 2, 5, 6, \\ x_{w_{n,p-2}}^m, & \text{dla } p = 3, 4, \\ -z_{w_{n,1}} x_{w_{n,p-6}}^m, & \text{dla } p = 7, 8, \end{array} \right\} \text{dla } n = 1, 2, \dots, W, \\ \left. \begin{array}{ll} 0, & \text{dla } p = 1, 3, 4, \\ 1, & \text{dla } p = 2, \\ x_{w_{n-W,p-4}}^m, & \text{dla } p = 5, 6, \\ -z_{w_{n-W,2}} x_{w_{n-W,p-6}}^m, & \text{dla } p = 7, 8, \end{array} \right\} \text{dla } n = W+1, \dots, 2W. \end{cases}$$

Po rozwiązaniu układów równań (9) otrzymujemy macierz  $u_p^m$ , dla  $m = 1, 2$ ,  $p = 1, 2, 3, \dots, 8$ , która określa macierze przekształcenia rzutowego (7) następująco:

$$(12) \quad a_j^m = u_j^m, \quad \text{dla } j, m = 1, 2,$$

$$(13) \quad b_l^m = u_{l+6}^m, \quad \text{dla } l, m = 1, 2,$$

$$(14) \quad A_{i,l}^m = \begin{cases} u_{i+1}^m, & \text{dla } i = 1, \\ u_{i+2}^m, & \text{dla } i = 2, \end{cases} \quad l, m = 1, 2.$$

W przypadku  $W > 4$  sprawdzamy, korzystając z metody najmniejszych kwadratów, układy (9) do postaci

$$(15) \quad \sum_{l=1}^8 G_{p,l}^m u_l^m = g_p^m, \quad \text{dla } p = 1, 2, \dots, 8, \quad m = 1, 2,$$

gdzie:

$$(16) \quad G_{p,l}^m = \sum_{n=1}^{2W} E_{n,p}^m E_{n,l}^m, \quad \text{dla } m = 1, 2, \quad p, l = 1, 2, \dots, 8,$$

$$(17) \quad g_p^m = \sum_{n=1}^{2W} e_n E_{n,p}^m, \quad \text{dla } m = 1, 2, \quad p = 1, 2, \dots, 8,$$

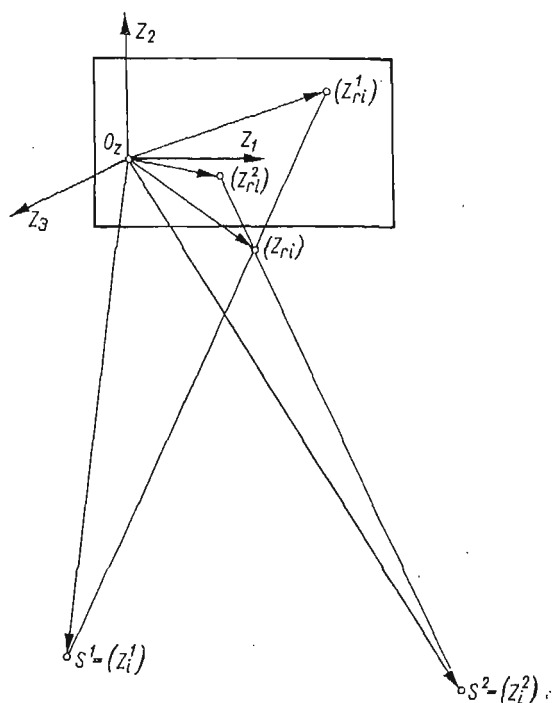
macierze przekształcenia (6) zaś określane są zależnościami (12), (13), (14).

**5.2. Para zdjęć pośrednich.** Wyznaczone macierze (12), (13) i (14) określają przekształcenia rzutowe (5) płaszczyzn zdjęć rzeczywistych dla  $m = 1, 2$ , na płaszczyznę wzorcową ( $c_3 = \alpha$  lub  $z_3 = 0$ ) wyznaczoną przez podgrupę punktów wzorcowych  $(c_{j,l}) = (c_{W_w,i})$  dla  $w = 1, 2, 3, \dots, W$ , które spełniają warunki rzutu środkowego. W wyniku przekształcenia zdjęć rzeczywistych na płaszczyznę wzorcową otrzymamy z obu przekształceń identyczne współrzędne  $z_i$  dla  $i = 1, 2$ , tylko dla punktów przestrzeni  $c_i$  lub  $z_i$  należących do płaszczyzny wzorcowej. Natomiast dla punktów nie należących do płaszczyzny wzorcowej otrzymamy po dwa obrazy na płaszczyźnie wzorcowej (rys. 4). Te dwie grupy obrazów punktów badanego obszaru na płaszczyźnie wzorcowej tworzą nową parę zdjęć leżącą w płaszczyźnie wzorcowej, którą nazywać będziemy parą zdjęć pośrednich. Dla otrzymania tych par oddzielnie przekształcenie (5) zapiszemy w postaci:

$$(18) \quad z_i^m = \frac{a_i^m + \sum_{j=1}^2 A_{i,j}^m x_j^m}{1 + \sum_{j=1}^2 b_j^m x_j^m}, \quad \text{dla } i, m = 1, 2.$$

## 6. Elementy orientacji zdjęć pośrednich

W postawionym problemie elementami orientacji zarówno wewnętrznej jak i zewnętrznej są współrzędne środków rzutów  $s^m$  dla  $m = 1, 2$ , które w układzie odniesienia  $z_i$  dla  $i = 1, 2, 3$ , oznaczają będziemy przez  $z_i^m$ . Do wyznaczenia tych elementów wykorzystamy punkty wzorcowe leżące poza płaszczyzną wzorcową dla  $j = 1, 2, \dots, J$ .



Rys. 5

Z kolinearności wektorów  $z_i^m - z_{j,i}^m$  i  $z_{j,i} - z_{j,i}^m$  dla  $m = 1, 2, i = 1, 2, 3, \dots, J$  (rys. 5), mamy:

$$(19) \quad z_i^m - z_{j,i}^m = k_j^m (z_{j,i} - z_{j,i}^m),$$

gdzie  $k_j^m$  macierz wielkości skalarnych. Z definicji przyjętego układu odniesienia  $z_i$  mamy warunek  $z_{j,3}^m = 0$ , więc dla  $i = 3$  mamy

$$(20) \quad z_3^m = k_j^m z_{j,3},$$

a ponieważ z założenia  $z_{j,3} \neq 0$ , więc

$$(21) \quad k_j^m = \frac{z_3^m}{z_{j,3}}.$$

Podstawiając (12) do (13) po przekształceniu otrzymamy:

$$(22) \quad z_{j,3} z_i^m - (z_{ji} - z_{j,i}^m) z_3^m = z_{j,3} z_{j,i}^m, \quad \text{dla } i = 1, 2.$$

Są to dwa układy równań, dla  $m = 1, 2$ , z trzema niewiadomymi, przy czym z jednego punktu wzorcowego leżącego poza płaszczyzną wzorcową otrzymujemy tylko po dwa równania. Zatem dla wyznaczenia elementów orientacji musimy mieć co najmniej 2 punkty wzorcowe poza płaszczyzną wzorcową. Dla zwiększenia dokładności obliczeń powiększamy liczbę tych punktów wzorcowych, a otrzymane układy zawierające więcej równań niż niewiadomych rozwiązujemy metodą najmniejszych kwadratów.

Układy równań (22) zapiszemy w postaci:

$$(23) \quad \sum_{i=1}^3 F_{j,i}^m z_i^m = f_j^m \quad \text{dla } m = 1, 2, \quad j = 1, 2, \dots, 2J,$$

gdzie macierz wyrazów wolnych:

$$(24) \quad f_j^m = \begin{cases} z_{j,3} z_{j,i}^m & \text{dla } j = 1, 2, \dots, J, \\ z_{j-J,3} z_{j-J,i}^m & \text{dla } j = J+1, \dots, 2J. \end{cases} \quad \text{dla } m = 1, 2,$$

Natomiast macierz współczynników przy niewiadomych:

$$(25) \quad F_{ji}^m = \begin{cases} \left. \begin{array}{l} z_{j,3} & \text{dla } i = 1, \\ 0 & \text{dla } i = 2, \\ z_{j,1}^m - z_{j,1} & \text{dla } i = 3, \end{array} \right\} & \text{dla } j = 1, 2, \dots, J, \\ \left. \begin{array}{l} 0 & \text{dla } i = 1, \\ z_{j-J,3} & \text{dla } i = 2, \\ z_{j-J,2}^m - z_{j-J,2} & \text{dla } i = 3, \end{array} \right\} & \text{dla } j = J+1, \dots, 2J. \end{cases} \quad m = 1, 2,$$

Aby rozwiązać układy (23) metodą najmniejszych kwadratów sprowadzamy je do postaci

$$(26) \quad \sum_{i=1}^3 H_{i,l}^m z_i^m = h_l^m, \quad \text{dla } m = 1, 2, \quad i = 1, 2, 3,$$

gdzie

$$(27) \quad h_i^m = \sum_{j=1}^{2J} f_j^m F_{j,i}^m \quad \text{dla } m = 1, 2, \quad i = 1, 2, 3,$$

oraz

$$(28) \quad H_{l,i}^m = \sum_{j=1}^{2J} F_{j,i}^m F_{j,l}^m \quad \text{dla } m = 1, 2, \quad i, l = 1, 2, 3.$$

W wyniku rozwiązania układu (26) otrzymujemy współrzędne  $z_i^m$  środków rzutów  $s^m$  dla  $m = 1, 2$ , i  $l = 1, 2, 3$ .

### 7. Współrzędne przestrzenne obserwowanych punktów

Położenie obserwowanych punktów  $r = 1, 2, \dots, R$  określone jest w kartezjańskim układzie odniesienia  $z_i$  przez współrzędne tych punktów  $(z_{r,i})$  dla  $i = 1, 2, 3$ , rys. 6. Przy znajomości elementów orientacji w postaci współrzędnych rzutów punktu  $(z_{r,i})$  na płaszczyznę kontrolną  $(z_{r,i}^n)$  wyznaczmy współrzędne  $z_{r,i}$  punktu  $(z_{r,i})$ . Ponieważ wektory  $[z_i^n - z_{r,i}^n]$  i  $[z_{r,i} - z_{r,i}^n]$  dla  $m = 1, 2$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $r = 1, 2, \dots, R$ , są wektorami współliniowymi (rys. 6), więc z warunku współliniowości otrzymujemy układ równań:

$$(29) \quad (z_{r,i} - z_{r,i}^m) = k_r^m (z_i^m - z_{r,i}^m),$$

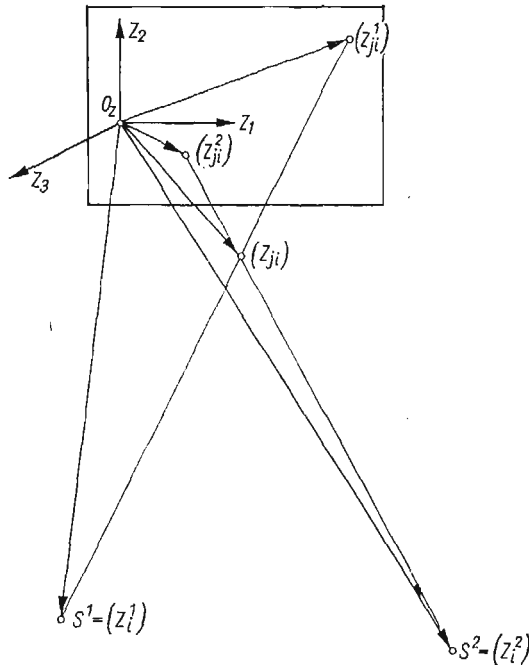


gdzie  $k_r^m$  dla  $m = 1, 2$ ,  $r = 1, 2, \dots, R$  jest macierzą współczynników skali. Z definicji współrzędnych  $z_{r,i}^m$  mamy warunek  $z_{r,3}^m = 0$ , zatem dla  $i = 3$  otrzymujemy

$$(30) \quad z_{r,3} = k_r^m z_3^m,$$

a stąd

$$(31) \quad k_r^m = \frac{z_{r,3}}{z_3^m}.$$



Rys. 6

Podstawiając (31) do (29) otrzymamy po przekształceniu

$$(32) \quad (z_{r,i} - z_{r,i}^m) z_i^m = (z_i^m - z_{r,i}^m) z_{r,3}, \quad \text{dla } m, i = 1, 2,$$

a po zgrupowaniu wyrazów otrzymamy

$$(33) \quad z_i^m z_{r,i} + (z_{r,i}^m - z_i^m) z_{r,3} = z_{r,i}^m z_i^m, \quad \text{dla } m, i = 1, 2.$$

Jest to układ 4 równań z 3 niewiadomymi  $z_{r,i}$  dla  $i = 1, 2, 3$ . Układ ten zapiszemy w postaci

$$(34) \quad \sum_{i=1}^3 Q_{r,k,i} z_{r,i} = q_{r,k}, \quad \text{dla } k = 1, 2, 3, 4,$$

gdzie macierz wyrazów wolnych:

$$(35) \quad q_{rk} = \begin{cases} z_{r,1}^k z_1^k, & \text{dla } k = 1, 2, \\ z_{r,2}^{k-2} z_2^{k-2}, & \text{dla } k = 3, 4, \end{cases}$$

i macierz współczynników przy niewiadomych:

$$(36) \quad Q_{rki} = \begin{cases} \begin{cases} z_i^k, & \text{dla } i = 1, \\ 0, & \text{dla } i = 2, \\ z_{r,i-2}^k - z_{i-2}^k, & \text{dla } i = 3, \end{cases} & \text{dla } k = 1, 2, \\ \begin{cases} 0, & \text{dla } i = 1, \\ z_i^{k-2}, & \text{dla } i = 2, \\ z_{r,i-1}^k z_{i-1}^{k-2}, & \text{dla } i = 3. \end{cases} & \text{dla } k = 3, 4. \end{cases}$$

Układ równań (34) sprowadzamy, korzystając z metody najmniejszych kwadratów, do układu 3 równań z trzema niewiadomymi postaci

$$(37) \quad \sum_{l=1}^3 P_{r,i,l} z_{r,l} = p_{r,i}, \quad \text{dla } i = 1, 2, 3, \quad r = 1, 2, \dots, R,$$

gdzie

$$(38) \quad P_{r,i,l} = \sum_{k=1}^4 q_{r,k} Q_{r,k,i}, \quad \text{dla } i = 1, 2, 3, \quad r = 1, 2, \dots, R,$$

oraz

$$(39) \quad P_{r,i,l} = \sum_{k=1}^4 Q_{r,k,i} Q_{r,k,l},$$

dla  $i, l = 1, 2, 3, \quad r = 1, 2, \dots, R$ .

W wyniku rozwiązania układu równań (37) otrzymujemy macierz współrzędnych  $z_r$  obserwowanych punktów  $r = 1, 2, \dots, R$ . Współrzędne tych punktów w układzie  $c_i$  obliczamy z zależności

$$(40) \quad c_{r,i} = \begin{cases} z_{r,i}, & \text{dla } i = 1, 2, \\ z_{r,i} - \alpha, & \text{dla } i = 3. \end{cases}$$

### 8. Dokładność metody pomiarowej

Dokładność przedstawionej metody pomiarowej sprawdzimy porównując wartości liczbowe współrzędnych punktów wzorcowych obliczonych tą metodą z odpowiednimi wartościami liczbowymi współrzędnych tychże punktów wynikającymi z ich rzeczywistego rozmieszczenia. W tym celu ze współrzędnych  $xw_w^m$  i  $x_{j_r}^m$  dla  $w = 1, 2, \dots, W, j = 1, 2, \dots, J, i, m = 1, 2$ , obliczamy współrzędne zdjęć pośrednich  $zw_w^m$  i  $z_{j,i}^m$  posługując się przekształceniem rzutowym (18). Następnie obliczamy współrzędne przestrzenne  $zw_{w,i}$  i  $z_{j,i}$  oraz współrzędne  $cw_{w,i}$  i  $c_{j,i}$ . Mając dane współrzędne rzeczywiste  $Cw_{w,i}$  i  $C_{j,i}$  obliczamy różnice:

$$(41) \quad \left. \begin{aligned} \Delta c_{w,i} &= Cw_{w,i} - cw_{w,i}, & \text{dla } w = 1, 2, \dots, W, \\ \Delta c_{j,i} &= C_{j,i} - c_{j,i}, & \text{dla } j = 1, 2, \dots, J, \end{aligned} \right\} i = 1, 2, 3.$$

Skrajne wartości  $\max \Delta c_i$  i  $\min \Delta c_i$  świadczą o dokładności bezwzględnej metody pomiarowej.

9. Przeskalowanie przestrzeni  $z_i$ 

Przejścia z układu  $z_i$  do układu  $c_i$  dokonamy przy pomocy przekształcenia afinicznego w celu zwiększenia dokładności wyników pomiarowych. W przekształceniu postaci

$$(42) \quad c_{k,i} = z_{0,i} + \sum_{j=1}^3 Z_{i,j} z_{k,i} \quad \text{dla } i = 1, 2, 3$$

dla dowolnego punktu  $k = 1, 2, \dots, K$  nie znamy macierzy  $Z_{i,j}$  oraz  $z_{0,i}$ .

Wyznaczenia macierzy przekształcenia  $Z_{i,j}$  dokonamy za pomocą znajomości współrzędnych  $c_{k,i}$  i  $z_{k,i}$  punktów wzorcowych, natomiast wektor  $z_{0,i} = (0, 0, \alpha)$ . Zatem należy rozwiązać układ równań

$$(43) \quad \sum_{j=1}^9 R_{i,j} y_j = r_i, \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, 3J,$$

gdzie  $J$  jest ilością punktów wzorcowych.

Wektor:

$$(44) \quad r_i = \begin{cases} c_{i,r}, & \text{dla } i = 1, 2, \dots, J, \\ c_{i-J,2}, & \text{dla } i = J+1, \dots, 2J, \\ c_{i-2J,3} - \alpha, & \text{dla } i = 2J+1, \dots, 3J, \end{cases}$$

natomiast macierz współczynników przy niewiadomych:

$$(45) \quad R_{i,j} = \begin{cases} \left. \begin{array}{l} z_{i,j}, \quad \text{dla } j = 1, 2, 3, \\ 0, \quad \text{dla } j = 4, 5, \dots, 9, \end{array} \right\} & i = 1, 2, \dots, J, \\ \left. \begin{array}{l} 0, \quad \text{dla } j = 1, 2, 3, \\ z_{i,j-3}, \quad \text{dla } j = 4, 5, 6, \\ 0, \quad \text{dla } j = 7, 8, 9, \end{array} \right\} & i = J+1, \dots, 2J, \\ \left. \begin{array}{l} 0, \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, 6, \\ z_{i,j-6}, \quad \text{dla } j = 7, 8, 9, \end{array} \right\} & i = 2J+1, \dots, 3J. \end{cases}$$

Ponieważ układ (43) dla  $J > 3$  zawiera więcej równań niż niewiadomych, więc przy rozwiązywaniu skorzystamy z metody najmniejszych kwadratów rozwiązując układ równań:

$$(46) \quad \sum_{k=1}^9 S_{j,k} j_k = s_j, \quad j = 1, 2, \dots, 9,$$

gdzie

$$(47) \quad s_j = \sum_{i=1}^{3J} R_{i,j} r_i, \quad j = 1, 2, \dots, 9,$$

$$(48) \quad S_{j,k} = \sum_{i=1}^{3J} R_{i,j} R_{i,k}, \quad j = 1, 2, \dots, 9.$$

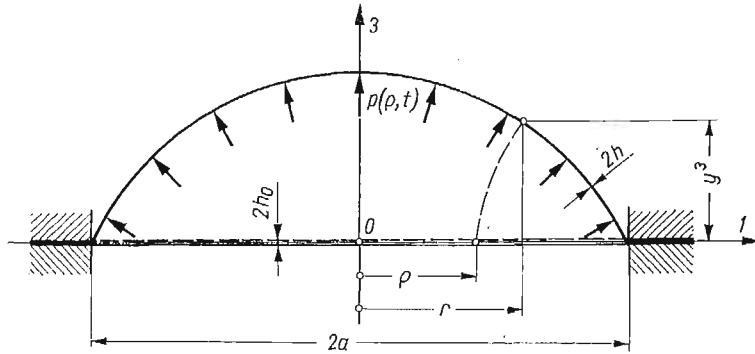
Po rozwiązaniu układu (46) otrzymujemy wektor  $y_k$  dla  $k = 1, 2, \dots, 9$ , a stąd macierz przekształcenia (42)

$$(49) \quad Z_{i,j} = \begin{cases} y_j, & \text{dla } i = 1, \\ y_{j+3}, & \text{dla } i = 2, \\ y_{j+6}, & \text{dla } i = 3. \end{cases} \quad j = 1, 2, 3,$$

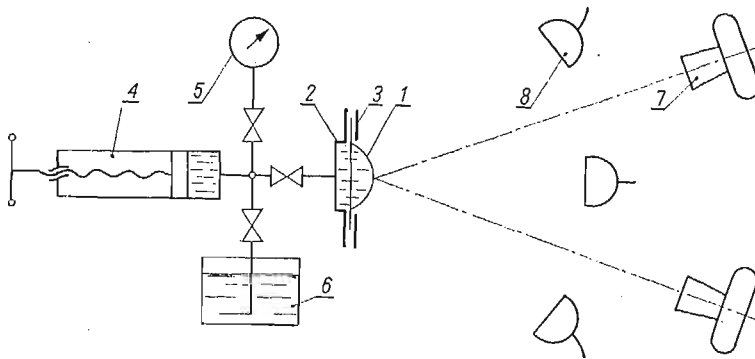
Następnie dokonujemy przekształcenia współrzędnych  $z_{l,i}$  na współrzędne  $c_{l,i}$  dla wszystkich obserwowanych punktów i dokonujemy sprawdzenia dokładności metody w sposób omówiony w rozdziale 8.

### 10. Przykład zastosowania metody

Zastosowanie i możliwości zaprezentowanej metody stereofotograficzno-rzutowej pokazane zostaną na przykładzie pomiarów kinematyki statycznie wypuklanej membrany kołowej obciążonej równomiernie ciśnieniem zgodnie ze schematem na rys. 7.



Rys. 7

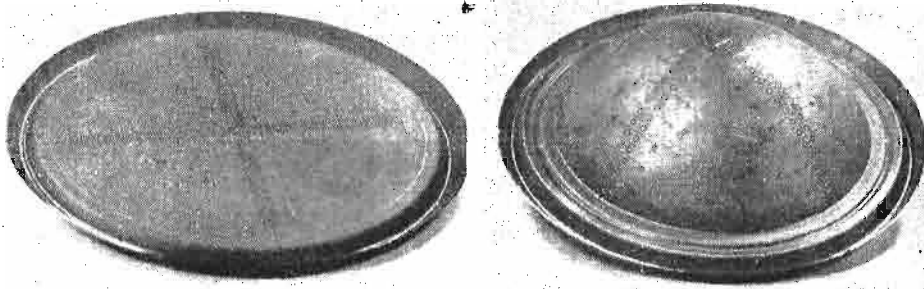


Rys. 8

Schemat procesu pokazany jest na rys. 8. Membrana 1 w postaci krążka blachy aluminiowej (gat. 99,5% w stanie miękkim) o grubości 1 mm jest utwierdzona na obwodzie za pomocą pierścienia 3, przykręcanego śrubami do komory ciśnieniowej 2, do której włącza się olej z pompy 4, powodujący plastyczne wypuklenie powłoki. Na pierścieniu naniesione są znaczki wzorcowe. Próbka oświetlona reflektorami 8 była fotografowana za pomocą dwu aparatów fotograficznych «Pentacon six TL» 7. Zdjęcia były robione w odstępach ciśnienia 1 kG/cm<sup>2</sup>, a do dalszej analizy wykorzystano zdjęcia wykonane w odstępach 3 kG/cm<sup>2</sup>.

Ogólny widok próbki i po zakończeniu procesu pokazany jest na rys. 9, pary zaś zdjęć wykonane w trakcie procesu i dalej opracowywane widoczne są na rys. 10.

Pomiarów otrzymanych negatywów dokonano na uniwersalnym mikroskopie warsztatowym z dokładnością odczytu 0,0002 mm, a uzyskane wyniki opracowano metodą stereofotogrametryczno-rzutową.



Rys. 9

### 11. Kinematyka procesu deformacji powłoki

**11.1. Kształt powłoki.** W wyniku obliczeń otrzymujemy współrzędne przestrzenne punktów materialnych powłoki  $c_{n,r,i}$  dla  $i = 1, 2, 3$ ,  $r = 0, 1, \dots, R$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, N$ , gdzie  $R$  jest liczbą punktów na promieniu. Ze względu na osiową symetrię procesu przechodzimy do współrzędnych walcowych obliczając macierze współrzędnych

$$(50) \quad R_{n,r} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (c_{n,r,i})^2},$$

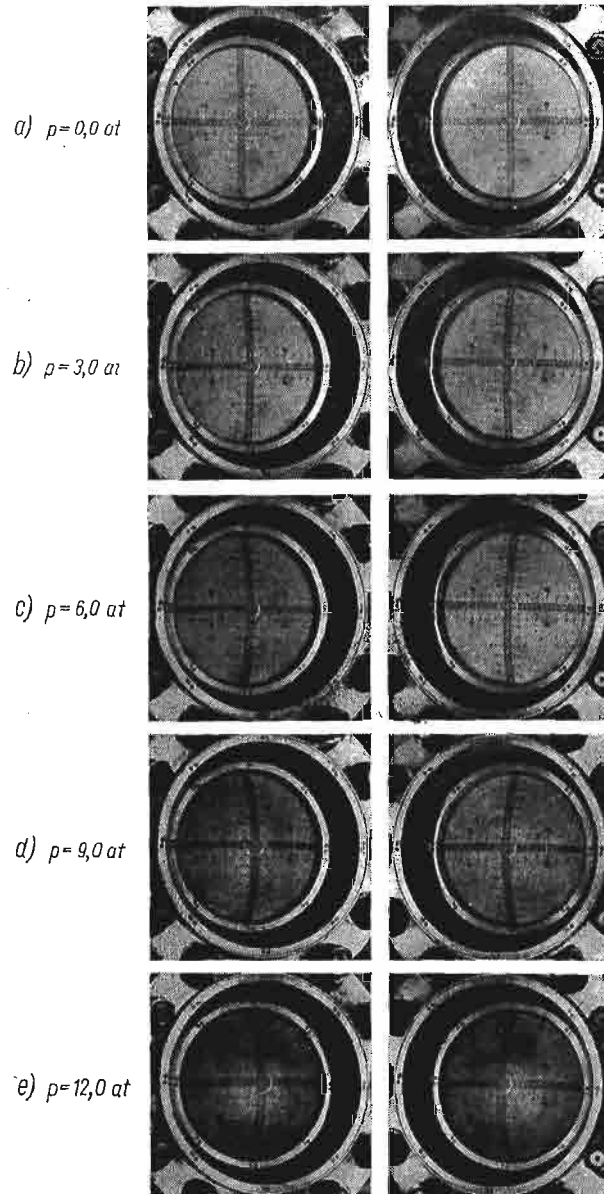
$$Y_{n,r} = c_{n,r,3}.$$

Otrzymane wyniki aproksymujemy wielomianami postaci:

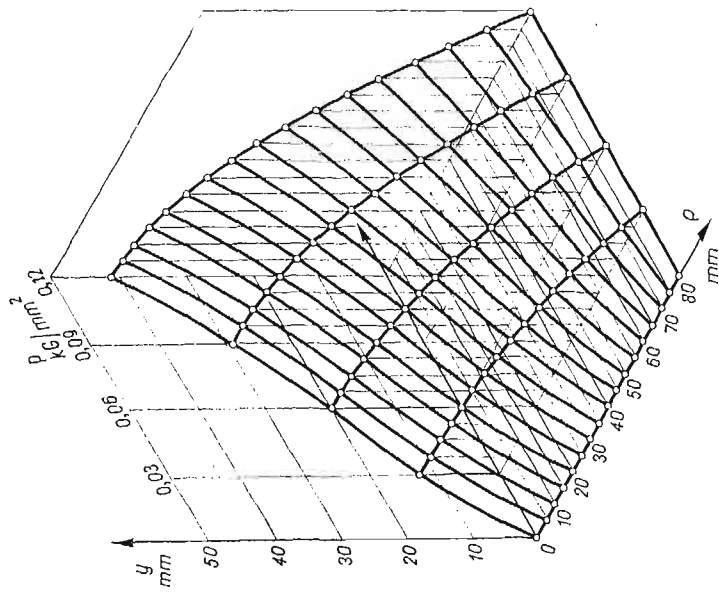
$$(51) \quad r_n = \sum_{k=1}^K A_{n,k} \varrho^k, \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, K = 2p+1,$$

$$(52) \quad y_n = \sum_{j=1}^J B_{n,j} \varrho^j, \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, J = 2q,$$

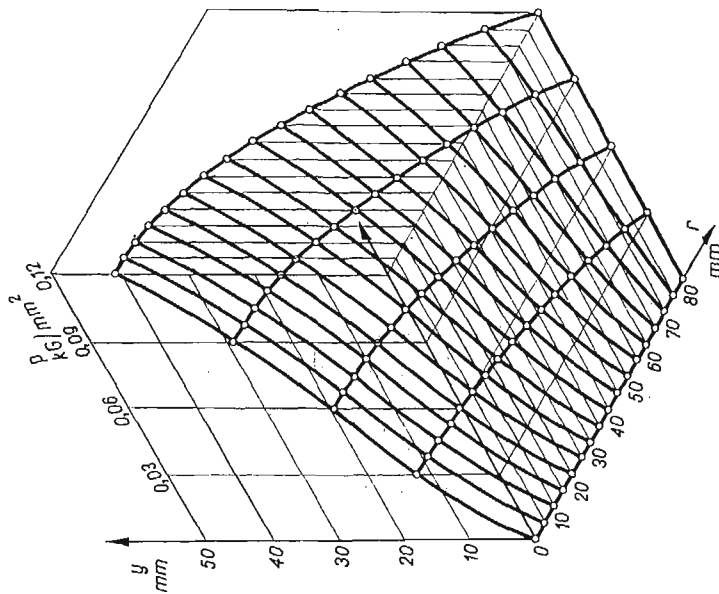
gdzie  $p, q$  są liczbami naturalnymi, zaś  $K, J$  rzędami wielomianów odpowiednich wielomianów, zaś  $\varrho$  jest współrzędną materialną (rys. 7). Macierze współczynników  $A_{n,k}$  i  $B_{n,j}$  wyznaczamy metodą najmniejszych kwadratów wykorzystując dane macierze  $R_{n,r}$  i  $Y_{n,r}$ . Wartości stopni wielomianów ustalone zostały na  $J = 8$  i  $K = 9$ . Podwyższanie stopni wielomianów (51) i (52) powodowało nieznaczne obniżenie wartości odchyłeń średniokwadratowych, zaś czas obliczeń wydłużał się dość znacznie. Wyniki obliczeń zestawiono w postaci tablic, które zilustrowano graficznie. Przebieg zmiany kształtu powłoki  $y(r, p)$



Rys. 10

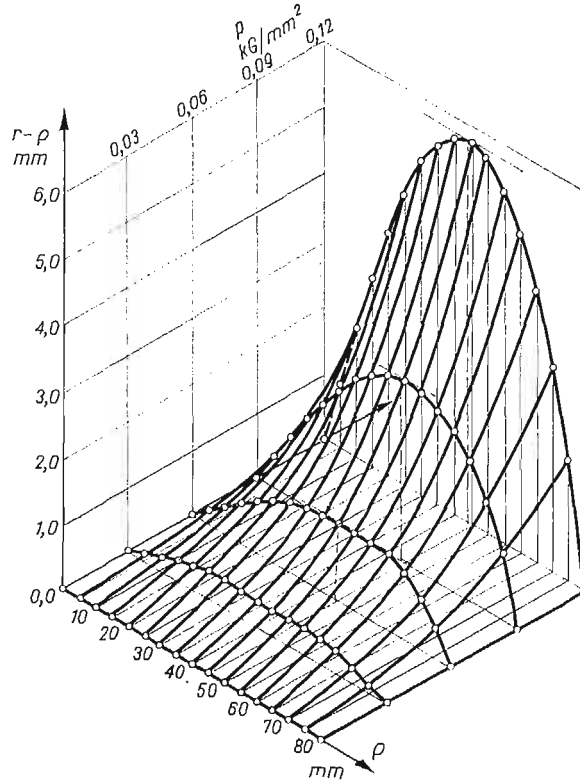


Rys. 12



Rys. 11

przedstawiono na rys. 11, zmianę zaś współrzędnych przestrzennej  $y$  w funkcji współrzędnej materialnej  $y(\varrho, \rho)$  przedstawiono na rys. 12. Przebieg drugiej współrzędnej przedstawiono w postaci jej przyrostu  $r(\varrho, \rho) - \varrho$  na rys. 13.



Rys. 13

11.2. Stan odkształceń deformowanej powłoki. Obliczając pochodne funkcji aproksymującej (51) i (52) możemy obliczyć rozciągnięcia w kierunkach głównych:

$$(53) \quad \begin{aligned} \lambda_{n,i,1} &= \sqrt{(r_{n,i})^2 + (y_{n,i})^2}, \\ \lambda_{n,i,2} &= \begin{cases} \lambda_{n,i,1}, & \text{dla } i = 0, \\ \frac{r_{n,i}}{\varrho_i}, & \text{dla } i = 0, \end{cases} \\ \lambda_{n,i,3} &= (\lambda_{n,i,1} \cdot \lambda_{n,i,2})^{-1}, \end{aligned}$$

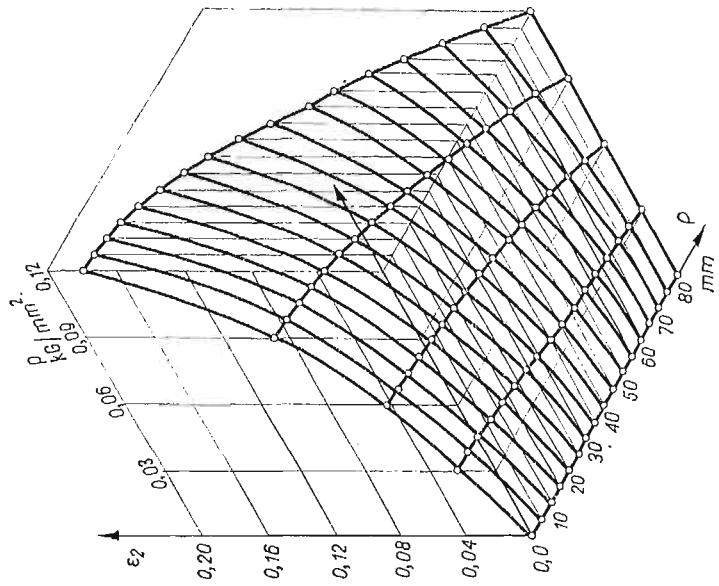
gdzie przez  $i$  oznaczyliśmy punkty

$$(54) \quad \varrho_i = i \cdot \Delta \varrho.$$

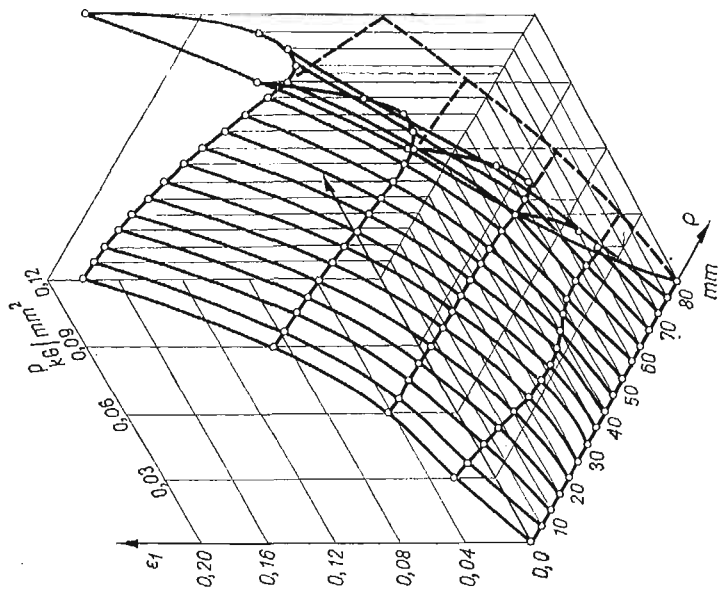
Wtedy składowe odkształceń w kierunkach głównych w mierze logarytmicznej obliczamy z zależności

$$(55) \quad \varepsilon_{n,i,j} = \ln(\lambda_{n,i,j}), \quad \text{dla } j = 1, 2, 3.$$

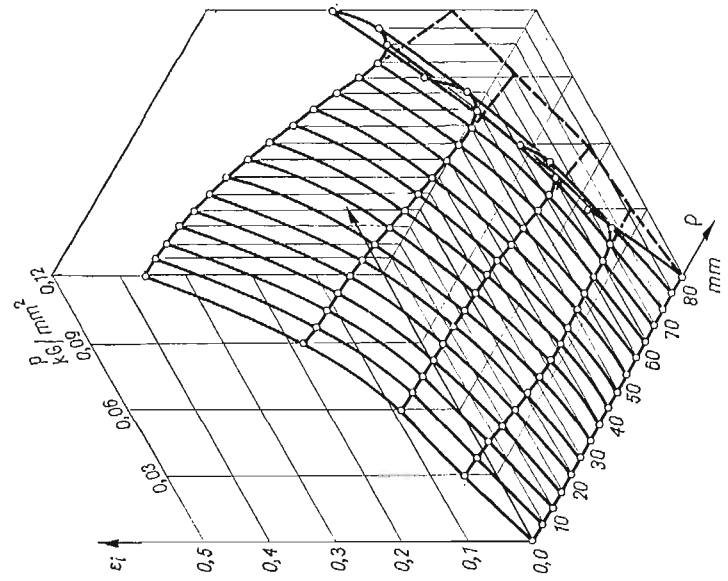




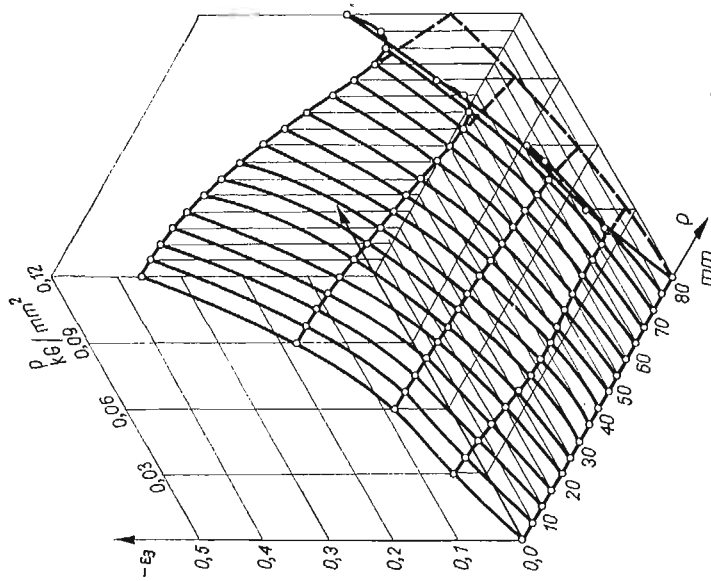
Rys. 15



Rys. 14



Rys. 17



Rys. 16

Otrzymane wyniki w postaci tablicy zilustrowane są graficznie na rys. 14, rys. 15 i rys. 16. Natomiast odkształcenie zastępcze obliczamy z zależności

$$(56) \quad \varepsilon_{n,i}^i = \sqrt{\frac{2}{3} \sum_{j=1}^2 (\varepsilon_{n,i,j})^2}.$$

Wyniki obliczeń otrzymane w postaci tablicy zilustrowane są graficznie na rys. 17.

Mając macierze  $r_{n,i}$  oraz  $y_{n,i}$  i ich pochodnych  $r'_{n,i}$  i  $y'_{n,i}$  możemy obliczyć przyrosty z definicji

$$(57) \quad dr_{n,i} = r_{n,i} - r_{n-1,i}, \quad dr'_{n,i} = r'_{n,i} - r'_{n-1,i}, \quad dy'_{n,i} = y'_{n,i} - y'_{n-1,i},$$

dla  $n = 1, 2, \dots, N$ , gdzie przez  $i$  oznaczono punkty określone przez zależność (54). Macierz przyrostów intensywności odkształceń obliczamy z zależności:

$$(58) \quad d\varepsilon_{n,i} = 2 \frac{dr'_{n,i}}{r_{n,i}}, \quad \text{dla } i = 0,$$

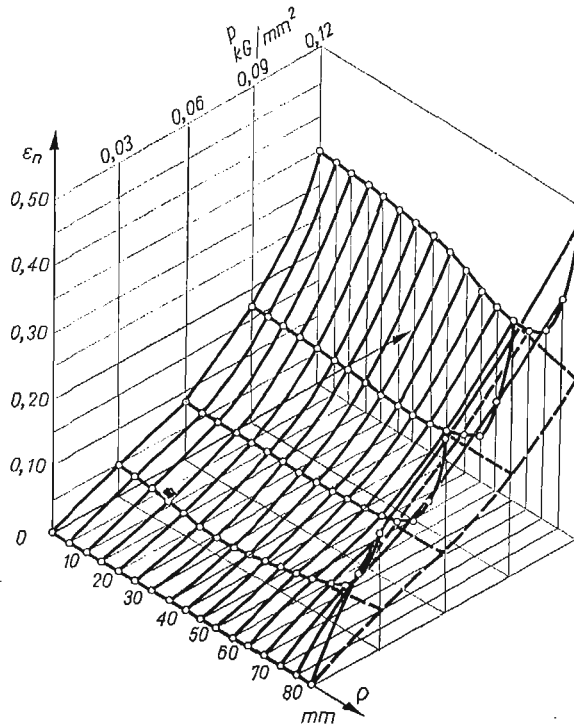
$$(58) \quad d\varepsilon_{n,i} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[ \left( \frac{r'_{n,i} dr'_{n,i} + y'_{n,i} dy'_{n,i}}{(r'_{n,i})^2 + (y'_{n,i})^2} \right)^2 + \left( \frac{dr_{n,i}}{r_{n,i}} \right)^2 + \frac{r'_{n,i} dr'_{n,i} + y'_{n,i} dy'_{n,i}}{(r'_{n,i})^2 + (y'_{n,i})^2} \frac{dr_{n,i}}{r_{n,i}} \right]^{1/2},$$

dla  $i > 0$ .

Macierz intensywności odkształcenia obliczamy sumując kolejno przyrosty (58) dla ustalonego punktu  $i$

$$(59) \quad \varepsilon_{n,i} = \sum_{n=1}^n d\varepsilon_{n,i}, \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots, N.$$

Otrzymane wyniki w postaci tablicy zilustrowane są graficznie na rys. 18.



Rys. 18

## 12. Dynamika deformowanej powłoki

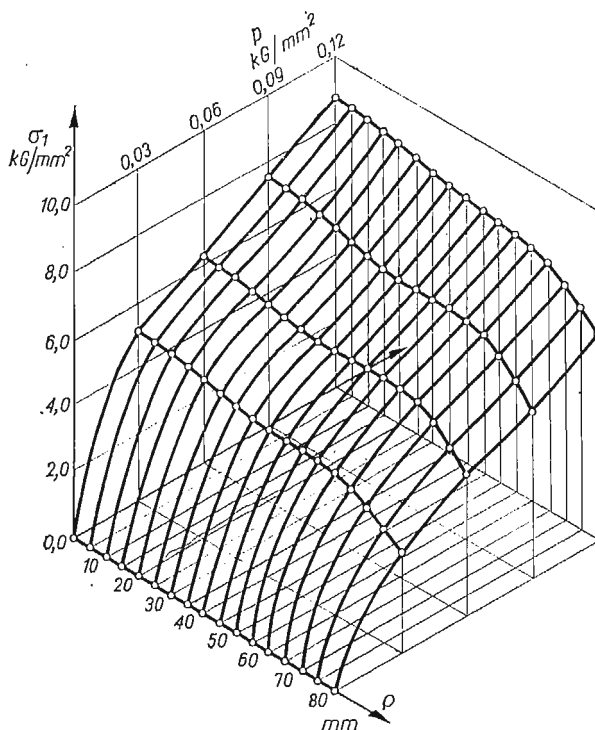
W postawionym zagadnieniu obciążenie jest równomiernie rozłożone na powierzchni wewnętrznej membrany i jest dane w postaci macierzy  $p_n$  dla  $n = 1, 2, \dots, N$ . Rozkład naprężeń wyznaczmy z równań równowagi. Pierwsze z równań jest równaniem różniczkowym, którego rozwiązanie numeryczne jest możliwe przy znajomości pełnej kinematyki deformowanej powłoki. Ma ono postać:

$$(60) \quad \sigma_{1,n,i} = -\frac{(r'_{n,i})^4}{4ho y'_{n,i}}, \quad \text{dla } i = 0,$$

$$\frac{d}{d\rho}(\sigma_{1,n,i}) = \left[ \frac{r'_{n,i} r''_{n,i} + y'_{n,i} y''_{n,i}}{(r'_{n,i})^2 + (y'_{n,i})^2} - \frac{1}{\rho} - \frac{y''_{n,i}}{y'_{n,i}} \right] \sigma_{1,n,i} + \frac{r_{n,i} r'_{n,i}}{2ho y'_{n,i}} [(r'_{n,i})^2 + (y'_{n,i})^2] p_n,$$

dla  $i > 0$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ .

W wyniku rozwiązania otrzymujemy macierz naprężeń południkowych  $\sigma_{1,n,i}$  w postaci tablicy, której interpretacja graficzna przedstawiona jest na rys. 19.



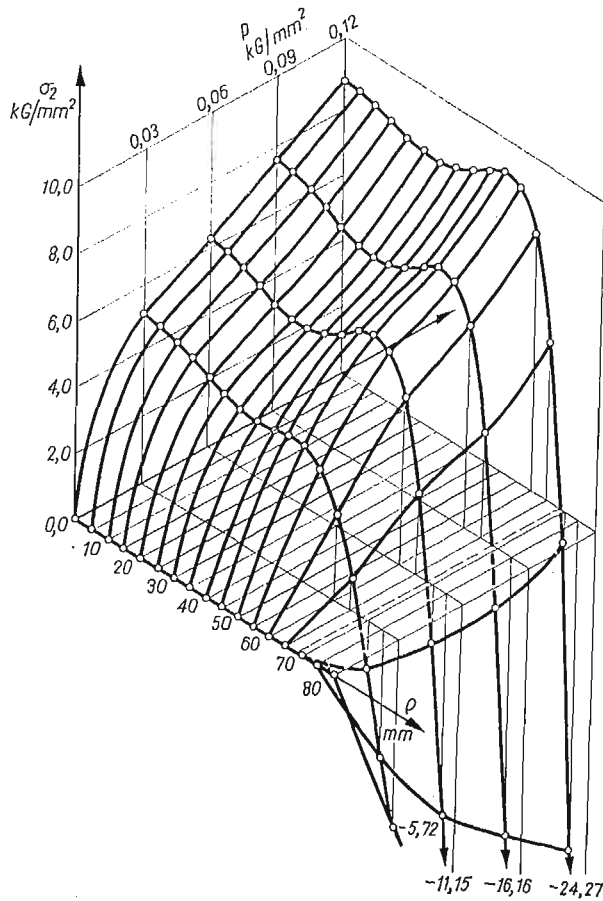
Rys. 19

Mając macierz naprężeń południkowych  $\sigma_{1,n,i}$  możemy z drugiego równania równowagi wyznaczyć naprężenie równoleżnikowe. Równanie to ma postać:

$$(61) \quad \sigma_{2,n,i} = \sigma_{1,n,i}, \quad \text{dla } i = 0,$$

$$\sigma_{2,n,i} = -\frac{r_{n,i}}{r'_{n,i}} \frac{y''_{n,i}}{y'_{n,i}} \sigma_{1,n,i} - \frac{r_{n,i}^2}{2ho y'_{n,i}} [(r'_{n,i})^2 + (y'_{n,i})^2] p_n, \quad \text{dla } i > 0,$$

dla  $n = 1, 2, \dots, N$ .



Rys. 20

W wyniku rozwiązania tego równania algebraicznego otrzymujemy macierz naprężeń południkowych  $\sigma_{2,n,i}$  w postaci tablicy, której interpretację graficzną przedstawia rys. 20.

Macierz zastępczych naprężeń obliczamy z zależności

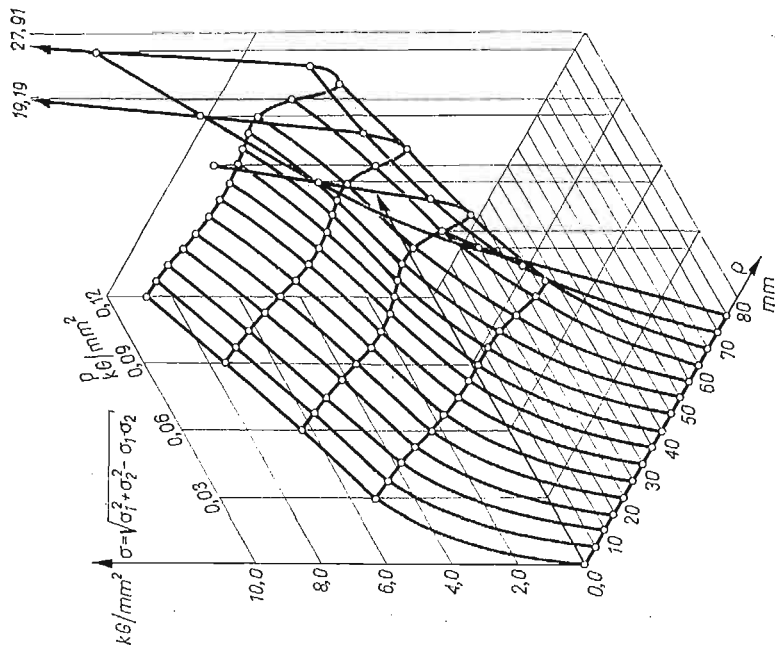
$$(62) \quad \sigma_{n,i} = \sqrt{(\sigma_{1,n,i})^2 + (\sigma_{2,n,i})^2} - \sigma_{1,n,i} \sigma_{2,n,i}$$

dla  $n = 1, 2, \dots, N$ , a wyniki otrzymujemy w postaci tablicy, której interpretację graficzną przedstawia rys. 21.

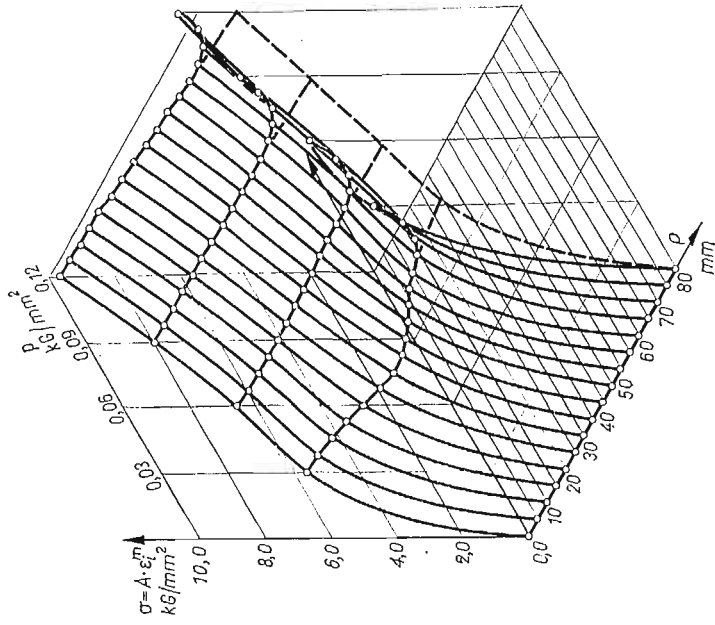
Macierz naprężeń zastępczych możemy obliczyć ze związku fizycznego w postaci wzoru wykładniczego postaci

$$\sigma_{n,i} = A(\varepsilon_{n,i})^m \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots, N,$$

gdzie  $A$  i  $m$  stałe materiałowe uzyskane z próby jednoosiowego rozciągania próbek płaskich, zaś  $\varepsilon_{n,i}$  jest macierzą intensywności odkształcenia (59), a sens wskaźnika  $i$  wyjaśnia zależność (54). Wyniki obliczeń otrzymujemy w postaci tablicy przedstawionej graficznie na rys. 22.



Rys. 21



Rys. 22

## 13. Wnioski

Fotogrametryczno-rzutowa metoda w porównaniu z klasycznymi metodami fotogrametrycznymi jest metodą dogodną w pomiarach wielkości kinematycznych, gdyż nie wymaga znajomości elementów orientacji układu stereoskopowego, a możliwość pomiaru filmu na uniwersalnym mikroskopie warsztatowym czyni tę metodę bardziej dostępną szerszemu gronu mechaników zajmujących się kinematycznymi pomiarami. Z przytoczonego przykładu zastosowania tej metody widać, że pozwala ona na uzyskanie pełnej informacji o kinematyce deformowanej powłoki. Znajomość tej kinematyki i obciążenia pozwala wyznaczyć stan naprężenia. Znany stan naprężenia i odkształcenia, a w przypadku procesów dynamicznych również stan prędkości odkształcenia, umożliwia zestawienie związków fizykalnych  $\sigma(\epsilon)$ , bądź  $\sigma(\epsilon, \dot{\epsilon})$  z próby wypuklania membran. Uzyskane wyniki wykazują w niektórych przypadkach znaczne zakłócenia na utwierdzonym obrzeżu. Wynika to z niemożności zapewnienia idealnych warunków brzegowych w procesie deformacji powłoki.

Przedstawiona metoda może służyć do badań innych procesów, szczególnie tam gdzie zastosowanie innych metod nie zapewnia dostatecznej dokładności, bezpieczeństwa aparatury pomiarowej, a nawet niekiedy bezpieczeństwa obsługi.

## Literatura cytowana w tekście

1. T. BEDNARSKI, *The dynamic deformation of a circular membrane*, Inter. J. Mech. Sci., 12, 11, (1969), 949 - 959.
2. T. BEDNARSKI, *Stereofotogrametryczna metoda pomiaru przemieszczeń i odkształceń przy pomocy szybko-bieżącej kamery filmowej*, Sprawozdanie dla IMP, Politechnika Warszawska, Warszawa 1969.
3. T. BEDNARSKI, *Pomiar odkształceń plastycznych membrany kołowej obciążonej impulsem ciśnienia*, Mech. Teoret. i Stos., 3, 8 (1970).
4. T. BEDNARSKI, A. MAJDE, *The spatial restitution of terrestrial photographs on the basis of projective transformations*, Societe Francaise de Photogrammetrie-Bulletin, 42 (1971), 55 - 62.
5. K. BORSUK, *Geometria analityczna wielowymiarowa*, PWN, Warszawa 1964.
6. А. Н. ЛОВАНОВ, *Фотомонография*, Издательство Недра, Москва 1968.
7. Е. ОТТО, *Nomografia*, PWN, Warszawa 1964.

## Р е з ю м е

## СТЕРЕОФОТОГРАММЕТРИЧЕСКИЙ ПРОЕКТИВНЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ КИНЕМАТИКИ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМАЦИИ

В работе представлен, основанный на проективных преобразованиях, метод измерения перемещений. Введение этих преобразований в фотограмметрическую обработку стереоснимков позволяет измерять перемещения с помощью стереоскопического фотографирования или же стереокиносъемки, не зная элементов ориентации снимков. Метод представлен в алгоритмическом виде облегчающим программирование на электронно-вычислительные машины. Представлен пример применения этого метода для определения кинематики деформации пластической круглой мембраны. Добавочные знание нагрузки, соответствующей кинематическому состоянию, позволяют определить поля напряжений в оболочке. Известность полей деформаций и напряжений позволяет определить физические соотношения  $\sigma(\varphi)$  при двухосном напряженном состоянии. Результаты представлены графически.

## S u m m a r y

DETERMINATION OF THE KINEMATICS OF DEFORMATION PROCESSES BY  
STEREOPHOTOGRAMMETRIC PROJECTIVE METHOD

The stereophotogrammetric method of measuring the displacements based on the projective transformations has been presented in this paper. These transformations are used for the photogrammetric elaboration of the stereoscopic photographs of the processes. It makes possible to measure the displacements by stereoscopic photographing or filming the processes without the knowledge of orientation elements of the stereophoto-frames. This method has been presented in algorithmic form suitable for computer programming. The example of application of this method for calculation the kinematic elements during the plastic deformation process in a circular membrane has been presented. Additional knowledge of pressure corresponding to the actual kinematic state has allowed for the determination of the stress field. The knowledge of the stress and strain fields enables the determination of constitutive equations  $\sigma(\varphi)$  in two-dimensional state of stress. The results obtained are presented graphically.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA, WARSZAWA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 16 grudnia 1974 r.*

---