MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3, 13 (1975)

IZOTROPIA JAKO PRZYPADEK GRANICZNY WIELOSKŁADNIKOWEGO OŚRODKA ORTOTROPOWEGO

ALICJA GOŁĘBIEWSKA-LASOTA, ANDRZEJ P. WILCZYŃSKI
(WARSZAWA)

1. Wstęp

Ośrodki rzeczywiste, w większości przypadków dobrze opisywane przez przyjęcie założenia continuum materialnego, w rzeczywistości stanowią zazwyczaj zbiór spójnych elementów przestrzennych, z których każdy daje się opisywać przy pomocy anizotropowych związków konstytutywnych. Takimi przypadkami są w szczególności materiały polikrystaliczne czy nawet monokryształy rzeczywiste. Szczególnym zainteresowaniem cieszą się jednak obecnie kompozycje materiałowe, a wśród nich coraz to większe zastosowanie znajdują wzmacniane tworzywa sztuczne, laminaty, kompozycje wzmacniane whiskersami i betony zbrojone szkłem. Materiały te, w przypadku uporządkowanego ułożenia wzmocnień są opisywane z zadowalającą dokładnością przy użyciu jednej z wielu obecnie istniejących teorii wzmocnienia. Problem staje się jednak nierozwiązalny w sposób ścisły, jeżeli elementy wzmacniające rozłożone są bezładnie w przestrzeni. Przypadek taki zachodzi przy stosowaniu termoplastycznych tworzyw sztucznych, wzmacnianych krótkimi włóknami, znajdujących coraz to szersze zastosowanie w technice.

Jedyną znaną autorom pracę na temat własności ośrodka o takiej strukturze podano w spisie literatury [1]. Tematem niniejszego artykułu jest propozycja metody wyznaczania stałych materiałowych kompozycji, wzmacnianych bezładnie ułożonymi wtrąceniami. Rozważono tu przypadek szczególny ciała, składającego się ze spojnych elementów monotropowych, ułożonych bezładnie w przestrzeni. Zakładając, że znane są własności elementów ciała, identyczne w każdym jego punkcie, lecz różnie ukierunkowane, postawiono problem wyznaczenia własności makroskopowych ciała jako całości. Do tego celu przyjęto, że określona własność mierzona $\overline{X}$ związana jest z odpowiednią własnością X w elemencie ciała zależnością

$$\overline{X} = C \underbrace{\int \dots \int}_{n} X \prod_{1}^{n} p(\varphi_i)\, d\varphi_i,$$

gdzie stałą C wyznacza się z warunku normalizacji, a $p(\varphi_i)$ są rozkładami zmiennych φ w przestrzeni. Można oczekiwać, zgodnie z podstawowym twierdzeniem fizyki statystycznej, że tak otrzymany wynik powinien być zbliżony do wielkości mierzonej.

W przypadku przestrzeni dwuwymiarowej wykonanie powyższej operacji nie nastręcza specjalnych trudności i zostało to dokonane uprzednio [2]. Podejście to jednak w przypadku przestrzeni trójwymiarowej nastręcza poważne trudności obliczeniowe. Poniżej zaproponowano nieco inną metodę podejścia, jak się wydaje o wiele prostszą i prowadzącą do wyników w postaci zamkniętej.

Można dodać, że szczególny, rozważany tu rodzaj anizotropii jest zbliżony do anizotropii układów heksagonalnych i powinien z dobrym przybliżeniem opisywać własności polikryształów tak zbudowanych. Należy wyraźnie zaznaczyć, że proponowana metoda postępowania nie może być stosowana w takich przypadkach jak ocena własności wytrzymałościowych, odporności na pękanie czy podobnych, gdzie wartości średnie nie mają sensu fizycznego.

2. Sformułowanie zagadnienia

Rozważmy szczególny przypadek ośrodka anizotropowego, w którym istnieje oś monotropii skierowana wzdłuż osi OZ układu współrzędnych; tak więc każda płaszczyzna równoległa do płaszczyzny OXY jest płaszczyzną izotropii. W takim ośrodku związki między składowymi tensora naprężeń σ i tensorem odkształceń ε mają postać:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= a_{11}\sigma_{xx}+a_{12}\sigma_{yy}+a_{13}\sigma_{zz},\\
\varepsilon_{yy} &= a_{12}\sigma_{xx}+a_{11}\sigma_{yy}+a_{13}\sigma_{zz},\\
\varepsilon_{zz} &= a_{13}\sigma_{xx}+a_{13}\sigma_{yy}+a_{33}\sigma_{zz},\\
\varepsilon_{yz} &= a_{44}\sigma_{yz},\\
\varepsilon_{xz} &= a_{44}\sigma_{xz},\\
\varepsilon_{xy} &= 2(a_{11}-a_{12})\sigma_{zz}
\end{aligned} \tag{1}$$

lub używając stałych technicznych:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E_0}(\sigma_{xx}-\nu_0\sigma_{yy})-\frac{\nu_1}{E_1}\sigma_{zz},\\
\varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E_0}(\sigma_{yy}-\nu_0\sigma_{xx})-\frac{\nu_1}{E_1}\sigma_{zz},\\
\varepsilon_{zz} &= -\frac{\nu_1}{E_1}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})+\frac{1}{E_1}\sigma_{zz},\\
\varepsilon_{yz} &= \frac{1}{G_1}\sigma_{yz},\\
\varepsilon_{xz} &= \frac{1}{G_1}\sigma_{xz},\\
\varepsilon_{xy} &= \frac{1}{G_0}\sigma_{xy} = \frac{1+\nu_0}{E_0}\sigma_{xy}.
\end{aligned} \tag{2}$$

W ogólnym przypadku, dla dowolnego ośrodka anizotropowego, związek między σ i ε ma postać

$$\varepsilon_{ij} = c_{ijkl}\sigma_{kl}, \qquad i,j,k,l = 1,2,3. \tag{3}$$

c_{ijkl} jest tensorem czwartego rzędu w przestrzeni trójwymiarowej, tak więc wzór (3) jest wyjątkowo wygodny w sytuacjach, w których mamy do czynienia z transformacjami obiektów do nowych układów współrzędnych. Oczywiście, porównanie wzorów (1), (2) i (3) ustala natychmiast jednoznaczne zależności między współczynnikami a_{ij}, stałymi technicznymi i składowymi tensora c_{ijkl}. Rozpatrywany ośrodek jest scharakteryzowany przez 5 niezależnych stałych. Związki między współczynnikami a_{ij} i niezerowymi składowymi tensora c_{ijkl} mają postać:

$$
\begin{aligned}
&c_{1111} = c_{2222} = a_{11}; \quad c_{3333} = a_{33};\\
(4)\quad &c_{1122} = c_{2211} = a_{12}; \quad c_{1133} = c_{3311} = a_{13};\\
&c_{1313} = c_{3113} = c_{3131} = c_{1331} = c_{2323} = c_{3232} = c_{2332} = c_{3223} = 1/4a_{44}.
\end{aligned}
$$

Analogiczne związki między współczynnikami a_{ij} i stałymi technicznymi otrzymuje się bezpośrednio ze wzorów (1) i (2).

Dowolną transformację tensora c można zapisać w postaci:

$$(5) \qquad c_{i'j'k'l'} = A^i_{i'}, A^j_{j'}, A^k_{k'}, A^l_{l'}, c_{ijkl},$$

gdzie $A^i_{i'}$, oznaczają odpowiednie macierze transformacyjne. Jeśli żądaną transformacją jest obrót o kąt φ wokół którejś osi układu współrzędnych, to macierze transformacyjne są funkcjami tylko tego kąta, a składowe obróconego tensora c wyrażają się przez stare składowe c i tenże kąt φ. Po uśrednieniu nowych składowych względem kąta φ, otrzymamy składowe nowego tensora, zależne liniowo od wyjściowych składowych. Tak więc obrót uśredniony jest zdefiniowany wzorem

$$(6) \qquad c^{(L)}_{i'j'k'l'} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} A^i_{i'}(\varphi)A^j_{j'}(\varphi)A^k_{k'}(\varphi)A^l_{l'}(\varphi)\,c_{ijkl}\,d\varphi.$$

Litera w nawiasie u góry oznacza oś, wokół której dokonywane są obroty. Sam obrót może być interpretowany na dwa sposoby: jako obrót tensora o kąt φ lub jako przejście do nowego układu współrzędnych, w którym jedna z osi pokrywa się z odpowiednią osią starego układu, a dwie pozotałe powstały przez obrót odpowiednich starych osi o kąt φ wokół niezmienionej osi. Wiąże się to także z interpretacją uśredniania, albo względem wszystkich dopuszczalnych obróconych układów współrzędnych, albo dla każdej składowej tensora względem wszystkich możliwych wartości danej składowej, otrzymanych w wyniku jej obrotu o dowolne kąty, w przedziale od 0 do π.

Trzy kolejno po sobie następujące obroty uśrednione wokół osi OX, OY, OZ będziemy nazywać obrotem uogólnionym, dopiero bowiem po wprowadzeniu takiego obrotu będzie można otrzymać odpowiednie wzory rekurencyjne dla składowych tensora c_{ijkl} (a co się z tym wiąże, dla stałych technicznych); a z nich, za pomocą pewnych przekształceń, wartości graniczne przy dążącej do nieskończoności liczby obrotów uogólnionych.

3. Obroty uśrednione i uogólnione

Zajmijmy się obrotem wokół osi OX. Macierz $A^i_{j'}$ ma postać:

$$(7) \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix},$$

a niezerowe składowe tensora c_{ijkl} obliczone na podstawie wzoru (5) są następujące:

$$
\begin{aligned}
c_{1'1'1'1'} &= c_{1111},\\
c_{1'1'2'2'} &= \cos^2\varphi c_{1122}+\sin^2\varphi c_{1133},\\
c_{1'1'3'3'} &= \sin^2\varphi c_{1122}+\cos^2\varphi c_{1133},\\
c_{1'1'2'3'} &= \sin\varphi\cos\varphi[c_{1122}-c_{1133}],\\
c_{2'2'2'2'} &= \cos^4\varphi c_{2222}+\sin^4\varphi c_{3333}+2\sin^2\varphi\cos^2\varphi(c_{2233}+2c_{2323}),\\
c_{2'2'3'3'} &= (\sin^4\varphi+\cos^4\varphi)c_{2233}+\sin^2\varphi\cos^2\varphi(c_{2222}+c_{3333}-4c_{2323}),\\
c_{2'2'2'3'} &= \sin\varphi\cos\varphi[\cos^2\varphi c_{2222}-\sin^2\varphi c_{3333}+(\sin^2\varphi-\cos^2\varphi)(c_{2233}+2c_{2323})],\\
c_{3'3'3'3'} &= \cos^4\varphi c_{3333}+\sin^4\varphi c_{2222}+2\sin^2\varphi\cos^2\varphi(c_{2233}+2c_{2323}),\\
c_{3'3'2'3'} &= \sin\varphi\cos\varphi[\sin^2\varphi c_{2222}-\cos^2\varphi c_{3333}+(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)(c_{2233}+2c_{2323}),\\
c_{1'2'1'2'} &= \cos^2\varphi c_{1212}+\sin^2\varphi c_{1313},\\
c_{1'2'1'3'} &= \sin\varphi\cos\varphi(c_{1212}-c_{1313}),\\
c_{1'3'1'3'} &= \sin^2\varphi c_{1212}+\cos^2\varphi c_{1313},\\
c_{2'3'2'3'} &= \sin^2\varphi\cos^2\varphi(c_{2222}+c_{3333}-2c_{2233})+(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)^2c_{2323}.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Uśredniając te składowe względem kąta φ, otrzymuje się:

$$
\begin{aligned}
c^{(x)}_{1'1'1'1'} &= c_{1111},\\
c^{(x)}_{1'1'2'2'} &= c^{(x)}_{1'1'3'2'} = \frac{1}{2}(c_{1122}+c_{1133}),\\
c^{(x)}_{2'2'2'2'} &= c^{(x)}_{3'3'3'3'} = \frac{3}{8}(c_{2222}+c_{3333})+\frac{1}{4}c_{2233}+\frac{1}{2}c_{2323},\\
c^{(x)}_{2'2'3'3'} &= \frac{1}{8}(c_{2222}+c_{3333})+\frac{3}{4}c_{2233}-\frac{1}{2}c_{2323},\\
c^{(x)}_{1'2'1'2'} &= c^{(x)}_{1'3'1'3'} = \frac{1}{2}(c_{1212}+c_{1313}),\\
c^{(x)}_{2'3'2'3'} &= \frac{1}{2}(c^{(x)}_{2'2'2'2'}-c^{(x)}_{2'2'3'3'}) = \frac{1}{3}(c_{2222}+c_{3333})-\frac{1}{4}c_{2233}+\frac{1}{2}c_{2323}.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Jak widać, w wyniku obrotu uśrednionego wokół osi OX, otrzymaliśmy znowu pięć niezerowych niezależnych składowych wyrażających się przez odpowiednie składowe początkowe. Dopiero po uśrednieniu wystąpiły pewne symetrie i liczba niezależnych składowych zredukowała się do pięciu: np. $c_{2'2'2'2'} \neq c_{3'3'3'3'}$ ale $c^{(x)}_{2'2'2'2'} = c^{(x)}_{3'3'3'3'}$. Co więcej, także dopiero po uśrednieniu, wartości pewnych niezerowych składowych są równe zeru, np. $c_{1'1'2'3'}$. Analogiczne uwagi dotyczą obrotów uśrednionych wokół osi OY i OZ.

Podobnie jak w przypadku osi OX, dokonamy następnie obrotów uśrednionych wokół osi OY, a potem OZ, tzn. najpierw składowe $c^{(x)}_{i'j'k'l'}$ zostaną przekształcone przy pomocy macierzy

$$
\begin{bmatrix}
\cos\varphi & 0 & -\sin\varphi\\
0 & 1 & 0\\
\sin\varphi & 0 & \cos\varphi
\end{bmatrix},
$$

a następnie uśrednione. W wyniku otrzymuje się:

$$c^{(y)}_{1''1''1''1''} = c^{(y)}_{3''3''3''3''} = \frac{3}{8}(c^{(x)}_{1'1'1'1'}+c^{(x)}_{2'2'2'2'})+\frac{1}{4}c^{(x)}_{1'1'2'2'}+\frac{1}{2}c^{(x)}_{1'2'1'2'},$$

$$c^{(y)}_{2''2''2''2''} = c^{(x)}_{2'2'2'2'},$$

$$c^{(y)}_{1''1''2''2''} = c^{(y)}_{2''2''3''3''} = \frac{1}{2}(c^{(x)}_{1'1'2'2'}+c^{(x)}_{2'2'3'3'}),$$

$$c^{(y)}_{1''1''3''3''} = \frac{1}{8}(c^{(x)}_{1'1'1'1'}+c^{(x)}_{3'3'3'3'})+\frac{3}{4}c^{(x)}_{1'1'3'3'}-\frac{1}{2}c^{(x)}_{1'3'1'3'}, \tag{10}$$

$$c^{(y)}_{1''2''1''2''} = c^{(y)}_{2''3''2''3''} = \frac{1}{2}(c^{(x)}_{1'2'1'2'}+c^{(x)}_{2'3'2'3'}),$$

$$c^{(y)}_{1''3''1''3''} = \frac{1}{2}(c^{(y)}_{1''1''1''1''}-c^{(y)}_{1''1''3''3''}) = \frac{1}{8}c^{(x)}_{1111}+c^{(x)}_{3'3'3'3'})-$$

$$-\frac{1}{4}c^{(x)}_{1'1'3'3'}+\frac{1}{2}c^{(x)}_{1'3'1'3'}.$$

Z kolei obrót uśredniony wokół osi OZ daje:

$$c^{(z)}_{1'''1'''1'''1'''} = c^{(z)}_{2'''2'''2'''2'''} = \frac{3}{8}(c^{(y)}_{1''1''1''1''}+c^{(y)}_{2''2''2''2''})+$$

$$+\frac{1}{4}c^{(y)}_{1''1''2''2''}+\frac{1}{1}c^{(y)}_{1''2''1''2''},$$

$$c^{(z)}_{3'''3'''3'''3'''} = c^{(y)}_{3''3''3''3''},$$

$$c^{(z)}_{1'''1'''2'''2'''} = \frac{1}{8}(c^{(y)}_{1''1''1''1''}+c^{(y)}_{2''2''2''2''})+\frac{3}{4}c^{(y)}_{1''1''2''2''}-\frac{1}{2}c^{(y)}_{1''2''1''2''},$$

$$c^{(z)}_{1'''1'''3'''3'''} = c^{(z)}_{2'''2'''3'''3'''} = \frac{1}{2}(c^{(y)}_{1''1''3''3''}+c^{(y)}_{2''2''3''3''}), \tag{11}$$

$$c^{(z)}_{1'''2'''1'''2'''} = \frac{1}{2}(c^{(z)}_{1'''1'''1'''1'''}-c^{(z)}_{1'''1'''2'''2'''}) = \frac{1}{8}(c^{(y)}_{1''1''1''1''}+c^{(y)}_{2''2''2''2''})-$$

$$-\frac{1}{4}c^{(y)}_{1''1''2''2''}+\frac{1}{4}c^{(y)}_{1''2''1''2''},$$

$$c^{(z)}_{1'''3'''1'''3'''} = c^{(z)}_{2'''3'''2'''3'''} = \frac{1}{2}(c^{(y)}_{1''3''1''3''}+c^{(y)}_{2''3''2''3''}).$$

Widać, że pewne prawidłowości wystąpią dopiero po trzech kolejnych obrotach; jeśli początkowe składowe c_{ijkl} oznaczymy przez $c^{(0)}_{ijkl}$, a otrzymane po tych trzech obrotach $c^{(1)}_{ijkl}$ i wyrazimy je poprzez początkowe $c^{(0)}_{ijkl}$, to po następnych trzech obrotach wokół osi OX, OY, OZ (uśrednionych), postać zależności $c^{(z)}_{ijkl} = f(c^{(1)}_{mnrp})$ będzie taka sama, jak $c^{(1)}_{ijkl} = f(c^{(0)}_{mnpr})$. Dlatego wprowadzamy pojęcie obrotu uogólnionego, jako operacji będącej złożeniem trzech kolejnych obrotów uśrednionych wokół osi OX, OY, OZ. A więc utożsamiamy składowe $c^{(z)}_{i'''j'''k'''l'''}$ ze składowymi otrzymanymi po jednym obrocie uogólnionym:

$$c^{(z)}_{i'''j'''k'''l'''} = c^{(1)}_{ijkl}.$$

Korzystając ze wzorów (11), (10), (9) wyrażamy je poprzez początkowe składowe $c^{(0)}_{ijkl}$:

$$(12)\quad \begin{aligned}
c^{(1)}_{1111} &= \frac{1}{64}\left[31\frac{3}{8}c^{(0)}_{1111}+15\frac{3}{8}c^{(0)}_{3333}+17\cdot\frac{1}{4}(c^{(0)}_{1133}+2c^{(0)}_{1313})\right],\\
c^{(1)}_{2222} &= c^{(0)}_{1111},\\
c^{(1)}_{3333} &= \frac{1}{64}[41c^{(0)}_{1111}+9c^{(0)}_{3333}+14(c^{(0)}_{1133}+2c_{1313})],\\
c^{(1)}_{1122} &= \frac{1}{64}\left[5\frac{1}{8}(c^{(0)}_{1111}+c^{(0)}_{3333}-4c^{(0)}_{1313})+16c^{(0)}_{1122}+37\frac{3}{4}c^{(0)}_{1133}\right],\\
c^{(1)}_{1133} &= \frac{1}{64}\left[3\frac{1}{2}(c^{(0)}_{1111}+c^{(0)}_{3333}-4c^{(0)}_{1313})+24c^{(0)}_{1122}+33c^{(0)}_{1133}\right],\\
c^{(1)}_{1313} &= \frac{1}{64}\left[15\frac{1}{2}c^{(0)}_{1111}+3\frac{1}{2}c^{(0)}_{3333}+26c^{(0)}_{1313}-12c^{(0)}_{1122}-7c^{(0)}_{1133}\right].
\end{aligned}$$

Na podstawie wzorów (12) można napisać ogólne wzory rekurencyjne: wskaźnik (1) wystarczy zastąpić przez (n) a (0) przez $(n-1)$. Interesują nas jednak wartości stałych technicznych. Wzory rekurencyjne można dla nich napisać korzystając ze wzorów (1), (2) i (4) oraz wzorów rekurencyjnych dla składowych tensora c_{ijkl}:

$$(13a)\quad \frac{1}{E^{(n)}_0} = \frac{1}{64}\left\{31\frac{3}{8}\frac{1}{E^{(n-1)}_0}+15\frac{3}{8}\frac{1}{E^{(n-1)}_1}+17\frac{1}{4}\left[-\left(\frac{\nu_1}{E_1}\right)^{(n-1)}+\frac{1}{2}\frac{1}{G^{(n-1)}_1}\right]\right\},$$

$$(13b)\quad \frac{1}{E^{(n)}_1} = \frac{1}{64}\left\{41\frac{1}{E^{(n-1)}_1}+9\frac{1}{E^{(n-1)}_1}+14\left[-\left(\frac{\nu_1}{E_1}\right)^{(n-1)}+\frac{1}{2}\frac{1}{G^{(n-1)}_1}\right]\right\},$$

$$(13c)\quad \left(\frac{\nu_0}{E_0}\right)^{(n)} = \frac{1}{64}\left\{5\frac{1}{8}\left[\frac{1}{G^{(n-1)}_1}-\frac{1}{E^{(n-1)}_0}-\frac{1}{E^{(n-1)}_1}\right]+16\left(\frac{\nu_0}{E_0}\right)^{(n-1)}+37\frac{3}{4}\left(\frac{\nu_1}{E_1}\right)^{(n-1)}\right\},$$

$$(13d)\quad \left(\frac{\nu_1}{E_1}\right)^{(n)} = \frac{1}{64}\left\{3\frac{1}{2}\left[\frac{1}{G^{(n-1)}_1}-\frac{1}{E^{(n-1)}_0}-\frac{1}{E^{(n-1)}_1}\right]+24\left(\frac{\nu_0}{E_0}\right)^{(n-1)}+33\left(\frac{\nu_1}{E_1}\right)^{(n-1)}\right\},$$

$$(13e)\quad \frac{1}{G^{(n)}_1} = \frac{1}{16}\left\{15\frac{1}{2}\frac{1}{E^{(n-1)}_0}+3\frac{1}{2}\frac{1}{E^{(n-1)}_1}+12\left(\frac{\nu_0}{E_0}\right)^{(n-1)}+7\left(\frac{\nu_1}{E_1}\right)^{(n-1)}+6\frac{1}{2}\frac{1}{G^{(n-1)}_1}\right\}.$$

Jak widać, postać wzorów jest raczej skomplikowana, ponieważ każda z wielkości ze wskaźnikiem n zależy od czterech lub pięciu wielkości ze wskaźnikiem $(n-1)$. Szukamy więc takich kombinacji tych wielkości, aby dla nich wzory rekurencyjne miały postać

$$(14)\quad \alpha_n = f(\alpha_{n-1}).$$

Wprowadzamy oznaczenia

$$(15)\quad \begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{E^{(n)}_0}-\frac{1}{E^{(n)}_1}, \qquad k_n = \frac{1}{E^{(n)}_0}+\frac{1}{E^{(n)}_1},\\
b_n &= \frac{1}{E^{(n)}_1}+\left(\frac{\nu_1}{E_1}\right)^{(n)}-\frac{1}{2}\frac{1}{G^{(n)}_1}.
\end{aligned}$$

Kombinacja wzorów (13c), (13b) i (13e) daje

$$b_n = \frac{13}{128}a_{n-1} + \frac{5}{64}b_{n-1}. \tag{16}$$

Odejmując zaś stronami (13d) od (13a) otrzymujemy

$$a_n = -\frac{77}{8\cdot 64}a_{n-1} - \frac{13}{4\cdot 64}b_{n-1}. \tag{17}$$

Odpowiednie kombinacje dwóch ostatnich zależności pozwalają napisać dwa proste związki rekurencyjne

$$a_n+2b_n = \frac{27}{8\cdot 64}(a_{n-1}+2b_{n-1}), \tag{18}$$

$$a_n+\frac{1}{4}b_n = -\frac{1}{8}\left(a_{n-1}+\frac{1}{4}b_{n-1}\right). \tag{19}$$

Oba ciągi $\{a_n+2b_n\}$ i $\left\{a_n+\frac{1}{4}b_n\right\}$ są zbieżne do zera. Można także podać ich sumy (które będą dalej potrzebne) korzystając z odpowiednich wzorów dla postępów geometrycznych:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+2b_n) = \frac{8\cdot 64}{485}(a_0+2b_0), \tag{20}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n+\frac{1}{4}b_n\right) = \frac{8}{9}\left(a_0+\frac{1}{4}b_0\right). \tag{21}$$

Same ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ również są zbieżne do zera. Np:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\frac{1}{7}\lim_{n\to\infty}(a_n+2b_n-8a_n-2b_n) = -\frac{1}{7}\lim_{n\to\infty}(a_n+2b_n)+$$
$$+\frac{8}{7}\lim_{n\to\infty}\left(a_n+\frac{1}{4}b_n\right) = -\frac{1}{7}\cdot 0+\frac{8}{7}\cdot 0 = 0.$$

Dla ciągu $\{b_n\}$ dowód jest analogiczny.

Aby obliczyć granice interesujących nas wielkości fizycznych, dodajemy jeszcze stronami (13a) i (13b), skąd otrzymamy:

$$\begin{aligned} k_n &= k_{n-1} + \frac{67}{8\cdot 64}a_{n-1} - \frac{125}{4\cdot 64}b_{n-1} = k_{n-2} + \frac{67}{8\cdot 64}(a_{n-1}+a_{n-2}) - \\ &- \frac{125}{4\cdot 64}(b_{n-1}+b_{n-2}) = \ldots = k_0 + \frac{67}{8\cdot 64}\sum_{i=0}^{n-1}a_i - \frac{125}{4\cdot 64}\sum_{i=0}^{n-1}b_i. \end{aligned} \tag{22}$$

Korzystając ze wzorów (20) i (21) możemy obliczyć granicę tego ciągu:

$$\lim_{n\to\infty} k_n = k_0 + \frac{1}{15}a_0 - \frac{8}{15}b_0.$$

Zauważmy, że zgodnie z oznaczeniami (15) $\frac{1}{2}(a_n+k_n) = \frac{1}{E_0^{(n)}}$. Teraz już łatwo możemy obliczyć granicę dla $n \to \infty$, ponieważ istnieją granice ciągów $\{a_n\}$ i $\{k_n\}$. Zauważmy także, że z tych samych powodów istnieje granica $\left\{\frac{1}{E_1^{(n)}}\right\} = \left\{\frac{1}{2}(k_n-a_n)\right\}$ i co więcej, obie te granice są równe, gdyż jak wykazaliśmy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Wobec tego

$$\text{(23a)} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{E_0^{(n)}} = \lim \frac{1}{2}(a_n+k_n) = \frac{1}{2}[\lim_{n\to\infty} k_n + \lim_{n\to\infty} a] = \frac{1}{2}\left(k_0 + \frac{1}{15}a_0 - \frac{8}{15}b_0\right),$$

$$\text{(23b)} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{E_1^{(n)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(a_n-k_n) = \frac{1}{2}[\lim_{n\to\infty} k - \lim_{n\to\infty} a] = \frac{1}{2}\left(k_0 + \frac{1}{15}a_0 - \frac{8}{15}b_0\right).$$

Tę wspólną granicę oznaczamy $\frac{1}{E}$ i korzystając z oznaczeń (15), otrzymujemy:

$$\text{(24)} \qquad \frac{1}{E} = \frac{8}{15}\frac{1}{E_0} + \frac{1}{5}\frac{1}{E_1} - \frac{4}{15}\frac{\nu_1}{E_1} + \frac{2}{15}\frac{1}{G_1}.$$

Odnotujmy jeszcze, że udowodniliśmy także, iż $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, co oznacza:

$$\text{(25)} \qquad \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{E_1^{(n)}} + \left(\frac{\nu_1}{E_1}\right)^{(n)} - \frac{1}{2G_1^{(n)}}\right] = 0.$$

Widać, że w granicy $E_1^{(n)}$, $\nu^{(n)}$ i $G_1^{(n)}$ spełniają związek charakterystyczny dla stałych sprężystych ośrodka izotropowego.

Znajdziemy teraz wartości graniczne $\nu_1^{(n)}$ i $\nu_0^{(n)}$. Wprowadzimy dodatkowe oznaczenia

$$\text{(26)} \qquad \left(\frac{\nu_0}{E_0}\right)^{(n)} - \left(\frac{\nu_1}{E_1}\right)^{n} = c_n, \qquad \left(\frac{\nu_0}{E_0}\right)^{(n)} + \left(\frac{\nu_1}{E_1}\right)^{(n)} = d_n.$$

Używając tych oznaczeń oraz wprowadzonych uprzednio [wzór (15)], możemy różnicę wyrażeń (13c) i (13d) zapisać następująco:

$$\text{(27)} \qquad c_n = -\frac{1}{8}c_{n-1}\frac{13}{4\cdot 64}b_{n-1} - \frac{13}{8\cdot 64}a_{n-1}.$$

Odejmując od ostatniego wyrażenia wyrażenie (17) otrzymujemy wzór rekurencyjny dla różnicy $c_n - a_n$

$$\text{(28)} \qquad c_n - a_n = -\frac{1}{8}(c_{n-1} - a_{n-1}).$$

Drugi wzór rekurencyjny znajdujemy ze wzorów (16) i (27)

$$\text{(29)} \qquad c_n + \frac{1}{4}b_n = -\frac{1}{8}\left(c_{n-1} + \frac{1}{4}b_{n-1}\right).$$

Sumy odpowiednich szeregów wynoszą

$$\sum_{n=0}^{\infty}(c_n-a_n) = \frac{8}{9}(c-a_0), \tag{30}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(c_n+\frac{1}{4}b_n\right) = \frac{8}{9}\left(c_0+\frac{1}{4}b_0\right), \tag{31}$$

natomiast granica ciągu $\{c_n\}$ wynosi

$$\begin{aligned} \lim_{n\leftarrow\infty} c_n &= \lim_{n\to\infty}\left[-c_n+a_n+2\left(c_n+\frac{1}{4}b_n\right)-\frac{1}{7}(a_n+2b_n)-\frac{6}{7}\left(a_n+\frac{1}{4}b_n\right)\right] = \\ &= -\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\left[-c_n+a_n+2\left(c_n+\frac{1}{4}b_n\right)-\frac{1}{7}(a_n+2b_n)-\frac{6}{7}\left(a_n+\frac{1}{4}b_n\right)\right] = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Aby obliczyć granicę ciągu $\{d_n\}$, dodajemy stronami równania (13c) i (13d) i korzystamy z sum (30), (31) oraz (20) i (21):

$$\lim_{n\to\infty} d_n = d_0-\frac{1}{3}c_0-\frac{2}{15}a_0-\frac{4}{15}b_0. \tag{33}$$

Zauważmy teraz, że

$$\left(\frac{\nu_0}{E_0}\right)^{(n)} = \frac{1}{2}(d_n+c_n),$$

$$\left(\frac{\nu_1}{E_1}\right)^{(n)} = \frac{1}{2}(d_n-c_n).$$

Znów więc, znając granice ciągów $\{d_n\}$ i $\{c_n\}$, możemy znaleźć granice $\left\{\left(\frac{\nu_0}{E_0}\right)\right\}$ i $\left\{\left(\frac{\nu_1}{E_1}\right)\right\}$ i ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$, są one sobie równe. Wspólną granicę oznaczamy $\frac{\nu}{E}$, wynosi ona:

$$\frac{\nu}{E} = \frac{1}{2}\frac{\nu_0}{E_0}+\frac{8}{15}\frac{\nu_1}{E_1}-\frac{1}{15}\frac{1}{E_0}-\frac{1}{15}\frac{1}{E_1}+\frac{1}{15}\frac{1}{G_1}.$$

Wróćmy do wzoru (25): ponieważ istnieją granice ciągów $\frac{1}{E_1^{(n)}}$ i $\left(\frac{\nu_1}{E_1}\right)^{(n)}$, to ze wzoru (25) wynika, że istnieje także skończona granica $\left\{\frac{1}{G^{(n)}}\right\}$; oznaczmy ją przez $\frac{1}{G}$; wówczas wzór (25) można przepisać następująco:

$$\frac{1}{E}+\frac{\nu}{E}-\frac{1}{2G} = 0 \quad \text{lub} \quad \frac{1}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}.$$

Ostatecznie ośrodek jest scharakteryzowany przez dwie stałe niezależne ν, E i jest ośrodkiem izotropowym.

4. Zakończenie

Przybliżone rozwiązanie, pomijające oddziaływanie drugiego rzędu, określone wynikami (24) i (29) jest dość oporne na oszacowanie jego błędu. Tym niemniej jest pewnym rozszerzeniem rozwiązań otrzymanych w pracy [1]. Wydaje się, że oszacowanie błędu można by uzyskać na drodze doświadczalnej, porównując stałe sprężystości określonych mono- i polikryształów lub też odpowiednie wartości np. dla tworzyw sztucznych jednokierunkowo zbrojonych z takim samym laminatem zbrojonym matą powierzchniową.

Pozostaje pytanie, czy tak otrzymany ośrodek izotropowy posiada te same własności co ośrodek izotropowy, otrzymany w wyniku innej procedury uśredniania. Zagadnieniem tym autorzy zamierzają się zająć w przyszłości.

Literatura cytowana w tekście

1. L. H. COX, *The elasticity and strength of paper and other fibrous materials*, Brit. Jour. Appl. Phys., 72 - 79, 3 (1952).
2. A. P. WILCZYŃSKI, *Teoria wzmocnienia kompozycji. Rozważania ogólne* (praca nie publikowana).

Р е з ю м е

ИЗОТРОПИЯ, КАК ПРЕДЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ОРТОТРОПНОЙ СРЕДЫ

Такие многофазные среды как реальные кристаллы или армированные пластмассы в общем случае состоят из ортотропных компонентов. В случае когда они ориентированы вдоль одного направления, механические свойства таких композиционных сред описываются с достаточной точностью с помощью некоторых из теорий упрочнения. В работе рассматривается однородное случайное распределение армирующих элементов в материале. Доказано, что применение закона смеси приводит к простым алгебраическим зависимостям описывающим механические свойства рассматриваемых сред.

S u m m a r y

ISOTROPY AS THE LIMITING CASE OF ORTHOTROPIC MULTIPHASE MEDIA

Multiphase media, such as real crystals or reinforced plastics consist, in general, of orthotropic components. In the case of their unidirectional arrangement some of the reinforcement theories describe mechanical properties of such a composite with sufficient accuracy. The paper deals with a case of homogeneous random distribution of directional elements in a composite. It is shown that the law of mixtures leads to a simple finite algebraic relation describing the mechanical properties of such media.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 4 listopada 1974 r.