MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3, 13 (1975)

O STRUKTURZE ROZWIĄZAŃ W ZAGADNIENIACH PŁYT ORTOTROPOWYCH

BOGDAN ROGOWSKI (ŁÓDŹ)

Metodą asymptotycznego całkowania równań teorii sprężystości badano wewnętrzny stan naprężenia w problemie zginania płyt ortotropowych w pracach [1, 2] oraz stan naprężenia w warstwie przybrzegowej w [3]. W niniejszej pracy buduje się rozwiązania ogólne dla płyty ortotropowej, przy dowolnym obciążeniu płaszczyzn ograniczających $|x_3| = h$ oraz rozwiązania jednorodne, tj. takie, które spełniają jednorodne naprężeniowe warunki brzegowe na tych płaszczyznach, a na pozostałych brzegach (na konturze) mogą przyjmować z góry dane wartości naprężeń lub przemieszczeń. Posłużono się przy tym metodą symbolicznego operatorowego zapisu rozwiązań [4] oraz zastosowano wprowadzone na wstępie pracy funkcje przemieszczeń dla rozpatrywanej klasy materiałów.

1. Równania podstawowe zagadnienia

Rozpatrzymy jednorodne, sprężyste ciało z prostoliniową ortotropią właściwości sprężystych. Przyjmiemy kartezjański, prostokątny układ współrzędnych X_i.

Równania równowagi

$$\sigma_{ij,j}+X_i = 0; \quad i,j = 1,2,3, \tag{1.1}$$

po uwzględnieniu związków fizycznych

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= c_{11}u_{1,1}+c_{12}u_{2,2}+c_{13}u_{3,3}, & \sigma_{12} &= G_{12}(u_{1,2}+u_{2,1}),\\ \sigma_{22} &= c_{12}u_{1,1}+c_{22}u_{2,2}+c_{23}u_{3,3}, & \sigma_{13} &= G_{13}(u_{1,3}+u_{3,1}),\\ \sigma_{33} &= c_{13}u_{1,1}+c_{23}u_{2,2}+c_{33}u_{3,3}, & \sigma_{23} &= G_{23}(u_{2,3}+u_{3,2}) \end{aligned} \tag{1.2}$$

przyjmą postać równań przemieszczeniowych (pominięto siły masowe X_i)

$$\begin{aligned} &c_{11}u_{1,11}+G_{12}u_{1,22}+G_{13}u_{1,33}+(c_{12}+G_{12})u_{2,12}+(c_{13}+G_{13})u_{3,13} = 0,\\ &G_{12}u_{2,11}+c_{22}u_{2,22}+G_{23}u_{2,33}+(c_{12}+G_{12})u_{1,12}+(c_{23}+G_{23})u_{3,23} = 0,\\ &G_{13}u_{3,11}+G_{23}u_{3,22}+c_{33}u_{3,33}+(c_{13}+G_{13})u_{1,13}+(c_{23}+G_{23})u_{2,23} = 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Rozpatrzymy klasę materiałów ortotropowych, których odpowiednie stałe sprężystości w dwóch wzajemnie prostopadłych płaszczyznach symetrii sprężystej $x_1 \mathrm{O}\, x_3$, $x_2 \mathrm{O}\, x_3$ są proporcjonalne

$$\frac{G_{23}}{G_{13}} = \frac{c_{23}}{c_{13}} = \frac{\sqrt{c_{22}}}{\sqrt{c_{11}}} = \frac{c_{12}+2G_{12}}{c_{11}} = \lambda, \tag{1.4}$$

czyli te materiały, których właściwości sprężyste charakteryzuje sześć niezależnych stałych. Związek (1.4.) spełniony jest w przypadku materiałów poprzecznie izotropowych ($\lambda = 1$), izotropowych, a w niektórych materiałach konstrukcyjnych ortotropowych proporcjonalność ta może mieć miejsce (np. laminaty, czy pewne przypadki anizotropii konstrukcyjnej).

Dla rozpatrywanej klasy materiałów przemieszczeniowe równania równowagi przyjmują postać

$$
\begin{aligned}
&G_{12}(\lambda^{-1}u_{1,11}+u_{1,22})+G_{13}u_{1,33}+(c_{12}+G_{12})(\lambda^{-1}u_{1,11}+u_{2,12})+(c_{13}+G_{13})u_{3,13} = 0,\\
(1.5)\quad &G_{12}(\lambda^{-1}u_{2,11}+u_{2,22})+G_{13}u_{2,33}+(c_{12}+G_{12})(\lambda^{-1}u_{1,12}+u_{2,22})+(c_{13}+G_{13})u_{3,23} = 0,\\
&G_{13}(\lambda^{-1}u_{3,11}+u_{3,22})+c_{33}\lambda^{-1}u_{3,33}+(c_{13}+G_{13})(\lambda^{-1}u_{1,13}+u_{2,32}) = 0.
\end{aligned}
$$

Równania (1.5) uzupełnione warunkami brzegowymi na płaszczyznach ograniczających opisują zagadnienia równowagi rozpatrywanego ośrodka.

2. Funkcje przemieszczeń

Rówania (1.5.) mają budowę podobną do równań przemieszczeniowych ośrodka poprzecznie izotropowego i dlatego możliwe jest rozdzielenie tych równań przez wprowadzenie trzech funkcji przemieszczeń [6]. Postępując analogicznie jak w [6] otrzymuje się

$$
(2.1)\qquad
\begin{aligned}
u_1 &= a\varphi_{1,1}+\varphi_{2,1}+\lambda\varphi_{3,2},\\
u_2 &= a\varphi_{1,2}+\varphi_{2,2}-\varphi_{3,1},\\
u_3 &= \varphi_{1,3}+a\varphi_{2,3},
\end{aligned}
$$

przy czym funkcje przemieszczeń $\varphi_i(x_i)$ spełniają równania różniczkowe o takiej samej budowie

$$
(2.2)\qquad \left(\lambda^{-1}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+s_i^{-2}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\varphi_i = 0, \quad i = 1, 2, 3.
$$

Występujące tu parametry s_i oraz a zależą od stałych sprężystości ośrodka i oblicza się je ze wzorów

$$
(2.3)\qquad \begin{Bmatrix} s_1^2 \\ s_2^2 \end{Bmatrix} = \alpha\lambda\left(1\pm\sqrt{1-\frac{\beta}{\alpha^2}}\right),
$$

$$
(2.3')\qquad \alpha = \frac{c_{11}}{2G_{13}}-\frac{(c_{13}+2G_{13})c_{13}}{2G_{13}c_{33}}, \qquad \beta = \frac{c_{11}}{c_{33}},
$$

$$
(2.4)\qquad s_3^2 = \frac{G_{12}}{G_{13}},
$$

$$
(2.5)\qquad a = \frac{c_{33}}{(c_{13}+G_{13})\lambda}s_1^2-\frac{G_{13}}{c_{13}+G_{13}}.
$$

Parametry te mają analogiczne właściwości jak parametry dla ośrodka poprzecznie izotropowego omówione w [6].

Uwzględniając (2.1) w (1.2.) i wykorzystując (2.2.) otrzymuje się wyrażenie składowych tensora naprężenia w omawianym ośrodku przez pochodne cząstkowe wprowadzonych funkcji przemieszczeń

$$
\begin{aligned}
\sigma_{11} &= -G_{13}(a+1)\partial_3^2(\varphi_1+\varphi_2)-2G_{12}\partial_2^2(a\varphi_1+\varphi_2)+2G_{12}\partial_{12}^2\varphi_3,\\
\sigma_{22} &= -G_{13}(a+1)\partial_3^2(\varphi_1+\varphi_2)-2G_{12}\partial_1^2(a\varphi_1+\varphi_2)-2G_{12}\lambda\partial_{12}^2\varphi_3,\\
\sigma_{33} &= G_{23}(a+1)\partial_3^2\left(\frac{1}{s_1^2}\varphi_1+\frac{1}{s_2^2}\varphi_2\right),\\
\sigma_{12} &= 2G_{12}\partial_{12}^2(a\varphi_1+\varphi_2)+G_{12}(\lambda\partial_2^2\varphi_3-\partial_1^2\varphi_3),\\
\sigma_{13} &= G_{13}(a+1)\partial_{13}^2(\varphi_1+\varphi_2)+G_{23}\partial_{23}^2\varphi_3,\\
\sigma_{23} &= G_{23}(a+1)\partial_{23}^2(\varphi_1+\varphi_2)-G_{23}\partial_{13}^2\varphi_3.
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Związki (2.1.), (2.6.) oraz równania (2.2.) opisują zagadnienia równowagi trójwymiarowego ciała ortotropowego, którego parametry materiałowe spełniają zależności (1.4.). Sprowadzenie problemu do całkowania równań drugiego rzędu i otrzymanie stosunkowo prostych wyrażeń dla składowych wektora przemieszczenia i tensora naprężenia pozwalają na rozwiązanie szeregu zagadnień brzegowych teorii sprężystości ciała ortotropowego. Rozpatrzymy dwa z nich.

3. Warstwa ortotropowa z danymi naprężeniami na brzegach

Rozpatrzymy warstwę ograniczoną płaszczyznami $|x_3| = h$. Założymy, że na brzegach dane są dowolne siły powierzchniowe $p_i^{\pm}$, które rozłożymy na styczne $p_\lambda^{\pm}$ i normalne $q^{\pm}$.

Warunki brzegowe zapiszemy w postaci

$$
\begin{aligned}
\sigma_{33}|_{x_3=h}\pm\sigma_{33}|_{x_3=-h} &= q^+\pm q^-,\\
\sigma_{13}|_{x_3=h}\pm\sigma_{13}|_{x_3=-h} &= p_1^+\pm p_1^-,\\
\sigma_{23}|_{x_3=h}\pm\sigma_{23}|_{x_3=-h} &= p_2^+\pm p_2^-.
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Wyrażając funkcje określające intensywność obciążeń stycznych przez nowe funkcje $\tau^{\pm}(x_1, x_2)$, $\chi^{\pm}(x_1, x_2)$

$$
\begin{aligned}
p_1^{\pm} &= \lambda^{-1}\frac{\partial\tau^{\pm}}{\partial x_1}+\frac{\partial\chi^{\pm}}{\partial x_2},\\
p_2^{\pm} &= \frac{\partial\tau^{\pm}}{\partial x_2}-\frac{\partial\chi^{\pm}}{\partial x_1}
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

i wykorzystując odpowiednie związki (2.6.), otrzymuje się z (3.1.) warunki brzegowe dla funkcji przemieszczeń

$$
\begin{aligned}
\partial_3^2\left(\frac{1}{s_1^2}\varphi_1+\frac{1}{s_2^2}\varphi_2\right)\bigg|_{x_3=h}\pm\partial_3^2\left(\frac{1}{s_1^2}\varphi_1+\frac{1}{s_2^2}\varphi_2\right)\bigg|_{x_3=-h} &= \frac{q^+\pm q^-}{(a+1)G_{23}},\\
\partial_3(\varphi_1+\varphi_2)|_{x_3=h}\pm\partial_3(\varphi_1+\varphi_2)|_{x_3=-h} &= \frac{\tau^+\pm\tau^-}{(a+1)G_{23}},\\
\partial_3\varphi_3|_{x_3=h}\pm\partial_3\varphi_3|_{x_3=-h} &= \frac{\chi^+\pm\chi^-}{G_{23}}.
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Z (3.2) wynikają związki

$$p^{\pm}_{\alpha,\alpha} = \Delta\tau^{\pm}, \qquad \frac{\partial p_1^{\pm}}{\partial x_2} - \lambda^{-1}\frac{\partial p_2^{\pm}}{\partial x_1} = \Delta\chi^{\pm}, \tag{3.4}$$

gdzie oznaczono

$$\Delta = \lambda^{-1}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}. \tag{3.4'}$$

Stosując symboliczny zapis rozwiązań, odpowiadających liniowym równaniom różniczkowym cząstkowym [4], zapiszemy rozwiązania równań (2.2) w postaci

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \tilde{S}_1(w_1)+\tilde{C}_1(v_1),\\ \varphi_2 &= \tilde{S}_2(w_2)+\tilde{C}_2(v_2),\\ \varphi_3 &= \tilde{S}_3(\psi_3)+\tilde{C}_3(\psi_4), \end{aligned} \tag{3.5}$$

gdzie funkcje $w_\alpha(x_\alpha)$, $v_\alpha(x_\alpha)$ ($\alpha = 1, 2$) oraz $\psi_3(x_\alpha)$, $\psi_4(x_\alpha)$ są funkcjami początkowymi określonymi w płaszczyźnie środkowej $x_3 = 0$, które wyznacza się z warunków brzegowych (3.3), a działające na te funkcje operatory $\tilde{S}_i$, $\tilde{C}_i$ ($i = 1, 2, 3$) są liniowymi operatorami nieskończonego rzędu, zależnymi parametrycznie od zmiennej x_3

$$\begin{aligned} \tilde{S}_i &= \frac{\sin s_i\sqrt{\Delta}x_3}{s_i\sqrt{\Delta}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x_3^{2n+1}s_i^{2n}\Delta^n}{(2n+1)!},\\ \tilde{C}_i &= \cos s_i\sqrt{\Delta}x_3 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x_3^{2n}s_i^{2n}\Delta^n}{(2n)!}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Funkcje początkowe w_α i ψ_3 opisują, jak wynika z (2.1), i (3.5), pole przemieszczeń, w którym u_α są antysymetryczne względem płaszczyzny środkowej, a u_3 symetryczne względem tej płaszczyzny; opisują więc problem zginania płyty, czyli tzw. zagadnienie płytowe. Pozostałe funkcje początkowe, występujące w (3.5), opisują zagadnienie tarczowe w płycie.

Z warunków brzegowych (3.3) otrzymuje się

$$\begin{aligned} [S_1C_2-C_1S_2]\Delta\begin{Bmatrix} w_1\\ w_2\end{Bmatrix} &= \frac{1}{2(a+1)G_{23}}\begin{Bmatrix} C_2(q^- -q^+)-S_2(p_\alpha^+ +p_\alpha^-)_{,\alpha}\\ -C_1(q^- -q^+)+S_1(p_\alpha^+ +p_\alpha^-)_{,\alpha}\end{Bmatrix},\\ C_3(\psi_3) &= \frac{1}{2G_{23}}(\chi^+ +\chi^-) \end{aligned} \tag{3.7}$$

dla zagadnienia płytowego oraz

$$\begin{aligned} [s_2^2C_1S_2-s_1^2C_2S_1]\Delta\begin{Bmatrix} v_1\\ v_2\end{Bmatrix} &= \frac{1}{2(a+1)G_{23}}\begin{Bmatrix} -s_2^2S_2(q^+ +q^-)+C_2(\tau^+ -\tau^-)\\ s_1^2S_1(q^+ +q^-)-C_1(\tau^+ -\tau^-)\end{Bmatrix},\\ s_3^2\Delta S_3(\psi_4) &= \frac{1}{2G_{23}}(\chi^- -\chi^+) \end{aligned} \tag{3.8}$$

dla zagadnienia tarczowego.

Operatory S_i, C_i otrzymuje się z operatorów $\tilde{S}_i$, $\tilde{C}_i$ danych wzorami (3.6), zamieniając formalnie x_3 na h. Uwzględniając (3.7), (3.8) w (3.5), a te w (2.1), otrzymujemy rozwiązania w symbolicznym zapisie operatorowym

$$
\begin{gathered}
[S_1 C_2 - C_1 S_2]\Delta(u_\alpha^P) = \frac{1}{2(a+1)G_{23}}\{[aC_2\tilde{S}_1 - C_1\tilde{S}_2](q^- - q^+)_{,\alpha} - \\
- [aS_2\tilde{S}_1 - S_1\tilde{S}_2]\partial_\alpha(p_\beta^+ + p_\beta^-)_{,\beta}\},\\
[S_1 C_2 - C_1 S_2]\Delta(u_3) = \frac{1}{2(a+1)G_{23}}\{[C_2\tilde{C}_1 - aC_1\tilde{C}_2](q^- - q^+) - \\
- [S_2\tilde{C}_1 - aS_1\tilde{C}_2](p_\beta^+ + p_\beta^-)_{,\beta}\},\\
C_3(u_\alpha^R) = \frac{1}{2G_{23}}\lambda_1\varepsilon_\alpha^\beta\tilde{S}_3(\chi^+ + \chi^-)_{,\beta},\\
u_\alpha = u_\alpha^P + u_\alpha^R, \quad \lambda_1 = \begin{cases}\lambda & \text{dla} \quad \alpha = 1,\\ 1 & \text{dla} \quad \alpha = 2\end{cases}
\end{gathered} \tag{3.9}
$$

dla zagadnienia płytowego oraz

$$
\begin{gathered}
[s_2^2 C_1 S_2 - s_1^2 C_2 S_1]\Delta(u_\alpha^P) = \frac{1}{2(a+1)G_{23}}\{[s_1^2 S_1\tilde{C}_2 - as_2^2 S_2\tilde{C}_1](q^+ + q^-)_{,\alpha} - \\
- [C_1\tilde{C}_2 - aC_2\tilde{C}_1](\tau^+ - \tau^-)_{,\alpha}\},\\
[s_2^2 C_1 S_2 - s_1^2 C_2 S_1](u_3) = \frac{1}{2(a+1)G_{23}}\{s_1^2 s_2^2[S_2\tilde{S}_1 - aS_1\tilde{S}_2](q^+ + q^-) - \\
- [s_1^2 C_2\tilde{S}_1 - as_2^2 C_1\tilde{S}_2](\tau^+ - \tau^-)\},\\
\Delta S_3(u_\alpha^R) = \frac{1}{2G_{12}\lambda}\lambda_1\varepsilon_\alpha^\beta\tilde{C}_3(\chi^- - \chi^+)_{,\beta},\\
u_\alpha = u_\alpha^P + u_\alpha^R
\end{gathered} \tag{3.10}
$$

dla zagadnienia tarczowego.

Związki (3.9), (3.10), stanowiące rozdzielone przemieszczeniowe równania równowagi omawianego ośrodka, uwzględniają obciążenia na płaszczyznych ograniczających $|x_3| = h$. Po lewej stronie działają na składowe wektora przemieszczenia $u_i(x_i)$ operatory różniczkowe zależące od dwóch zmiennych x_α, a po prawej na funkcje obciążeń (dwóch zmiennych x_α) działają operatory różniczkowe zmiennych x_α, parametrycznie zależące od zmiennej x_3. W przypadku, gdy na konturze płyty występują warunki brzegowe typu antysymetrii, z równań tych można otrzymać ścisłe rozwiązanie. W tym bowiem przypadku można posłużyć się metodą podwójnych szeregów Fouriera i wówczas działanie operatorów występujących w tych rozwiązaniach na funkcje obciążeń i przemieszczenia u_i będzie znane [5]. Przy innych typach warunków brzegowych, dla spełnienia warunków brzegowych, niezbędne są rozwiązania jednorodne, tj. takie rozwiązania, przy których znikają naprężenia na płaszczyznach ograniczających $|x_3| = h$, natomiast na pozostałych powierzchniach brzegowych płyty pole przemieszczeń i naprężeń przyjmuje z góry dane wartości.

4. Rozwiązania jednorodne

Wyznaczmy pole przemieszczeń odpowiadające nieobciążonym płaszczyznom ograniczającym $|x_3| = h$. Trzeba zatem znaleźć taką klasę funkcji początkowych $w_\alpha(x_\alpha)$, $v_\alpha(x_\alpha)$, $\psi_3(x_\alpha)$, $\psi_4(x_\alpha)$, które zgodnie z (3.3) i (3.5) spełniają równania

$$\begin{gathered} \Delta[S_1(w_1)+S_2(w_2)] = 0, \\ C_1(w_1)+C_2(w_2) = 0, \\ C_3(\psi_3) = 0 \end{gathered} \tag{4.1}$$

w zagadnieniu płytowym oraz

$$\begin{gathered} \Delta[C_1(v_1)+C_2(v_2)] = 0, \\ \Delta[s_1^2 S_1(v_1)+s_2^2 S_2(v_2)] = 0, \\ \Delta S_3(\psi_4) = 0 \end{gathered} \tag{4.2}$$

w zagadnieniu tarczowym.

W zagadnieniu płytowym funkcja $\psi_1(x_\alpha)$ taka, że

$$w_1 = C_2(\psi_1), \qquad w_2 = -C_1(\psi_1) \tag{4.3}$$

spełnia równania $(4.1)_1$ i $(4.1)_2$, jeśli jest rozwiązaniem równania

$$\Delta[S_1 C_2 - C_1 S_2]\psi_1 = 0. \tag{4.4}$$

Funkcja ta opisuje zgodnie z (3.5) i (2.1) potencjalne pole przemieszczeń w zagadnieniu płytowym

$$\begin{aligned} u_\alpha^P &= [a\tilde{S}_1 C_2 - \tilde{S}_2 C_1]\psi_{1,\alpha}, \\ u_3 &= [\tilde{C}_1 C_2 - a\tilde{C}_2 C_1]\psi_1. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Funkcja ψ_3, spełniająca równanie $(4.1)_3$, opisuje rotacyjną część pola przemieszczenia wzorem

$$u_\alpha^R = \lambda_1 \tilde{S}_3 \varepsilon_\alpha^\beta \psi_{3,\beta}, \qquad u_\alpha = u_\alpha^P + u_\alpha^R, \tag{4.6}$$

przy czym

$$\lambda_1 = \begin{cases} \lambda & \text{dla} \quad \alpha = 1, \\ 1 & \text{dla} \quad \alpha = 2. \end{cases} \tag{4.6'}$$

W zagadnieniu tarczowym otrzymuje się

$$\begin{aligned} u_\alpha^P &= [s_2^2 a S_2 \tilde{C}_1 - s_1^2 S_1 \tilde{C}_2]\psi_{2,\alpha}, \\ u_3 &= s_1^2 s_2^2 [S_2 \tilde{S}_1 - a S_1 \tilde{S}_2]\Delta\psi_2, \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$u_\alpha^R = \lambda_1 \tilde{C}_3 \varepsilon_\alpha^\beta \psi_{4,\beta}, \qquad u_\alpha = u_\alpha^P + u_\alpha^R, \tag{4.8}$$

przy czym funkcja $\psi_2(x_\alpha)$ spełnia równanie

$$[s_2^2 C_1 S_2 - s_1^2 C_2 S_1]\Delta\psi_2 = 0, \tag{4.9}$$

a funkcja $\psi_4(x_\alpha)$ jest rozwiązaniem równania $(4.2)_3$.

Symboliczna postać równań $(4.1)_3$, (4.4) oraz $(4.2)_3$, (4.9) dla funkcji $\psi_1(x_\alpha)$, $\psi_3(x_\alpha)$ oraz $\psi_2(x_\alpha)$, $\psi_4(x_\alpha)$, opisujących jednorodne rozwiązania w zagadnieniu płytowym oraz tarczowym, prowadzi do całkowania równań różniczkowych nieskończenie wysokiego rzędu [4].

5. Struktura rozwiązań jednorodnych

Aby zastąpić symboliczną formę zapisu równań $(4.1)_3$, (4.4) oraz $(4.2)_3$, (4.9) formą różniczkową, przedstawimy funkcje argumentów operatorowych w postaci iloczynów nieskończonych względem ich miejsc zerowych.

Otrzymuje się

$$\Delta^2 \prod_{k=1}^{\infty} \left[1 - \frac{\Delta h^2}{\varrho_k^2}\right]\left[1 - \frac{\Delta h^2}{\bar{\varrho}_k^2}\right]\psi_1 = 0, \tag{5.1}$$

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left[1 - \frac{4\Delta s_3^2 h^2}{\pi^2(2k-1)^2}\right]\psi_3 = 0, \tag{5.2}$$

$$\Delta \prod_{k=1}^{\infty} \left[1 - \frac{\Delta h^2}{\varrho_k^{*2}}\right]\left[1 - \frac{\Delta h^2}{\bar{\varrho}_k^{*2}}\right]\psi_2 = 0, \tag{5.3}$$

$$\Delta \prod_{k=1}^{\infty} \left[1 - \frac{\Delta s_3^2 h^2}{k^2\pi^2}\right]\psi_4 = 0, \tag{5.4}$$

gdzie ϱ_k, $\bar{\varrho}_k$, ϱ_k^*, $\bar{\varrho}_k^*$ są zespolonymi pierwiastkami równań

$$\frac{\sin(s_1 - s_2)\varrho}{(s_1 - s_2)\varrho} - \frac{\sin(s_1 + s_2)\varrho}{(s_1 + s_2)\varrho} = 0, \tag{5.5}$$

$$\frac{\sin(s_1 - s_2)\varrho^*}{(s_1 - s_2)\varrho^*} + \frac{\sin(s_1 + s_2)\varrho^*}{(s_1 + s_2)\varrho^*} = 0, \tag{5.6}$$

przy czym $\bar{\varrho}_k$, $\bar{\varrho}_k^*$ są liczbami sprzężonymi z ϱ_k, ϱ_k^* (por. [5]). Ogólne rozwiązania równań (5.1) - (5.4) przedstawimy w postaci

$$\psi_1 = \Phi_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (\psi_{1k} + \bar{\psi}_{1k}), \tag{5.7}$$

$$\psi_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_{3k}, \tag{5.8}$$

$$\psi_2 = \Phi_2 + \sum_{k=1}^{\infty} (\psi_{2k} + \bar{\psi}_{2k}), \tag{5.9}$$

$$\psi_4 = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{4k}, \tag{5.10}$$

gdzie poszczególne składniki tych sum są rozwiązaniami równań

$$\Delta^2\Phi_1 = 0, \tag{5.11}$$

$$[\Delta - \varrho_k^2 h^{-2}]\psi_{1k} = 0, \tag{5.12}$$

$$[\Delta - \bar{\varrho}_k^2 h^{-2}]\bar{\psi}_{1k} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{5.13}$$

$$\left[\Delta - \frac{G_{13}}{G_{12}}\pi^2\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 h^{-2}\right]\psi_{3k} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{5.14}$$

$$\Delta\Phi_2 = 0, \tag{5.15}$$

$$[\Delta - \varrho_k^{*2} h^{-2}]\psi_{2k} = 0, \tag{5.16}$$

$$[\Delta - \bar{\varrho}_k^{*2} h^{-2}]\bar{\psi}_{2k} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{5.17}$$

$$\left[\Delta - \frac{G_{13}}{G_{12}}\pi^2 k^2 h^{-2}\right]\psi_{4k} = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots. \tag{5.18}$$

Uwzględniając w związkach (4.5) — (4.8) zależności (5.7) (5.18) otrzymujemy rozwiązania jednorodne.

W zagadnieniu płytowym mamy

$$\begin{aligned} u_\alpha^1 &= -a_0 z\Phi_{1,\alpha} - \frac{a_1}{2}h^2 z\Delta\Phi_{1,\alpha} + \frac{1-a_1}{6}z^3\Delta\Phi_{1,\alpha} + h\sum_{k=1}^{\infty}(H_{1k}\psi_{1k} + \bar{H}_{1k}\bar{\psi}_{1k})_{,\alpha}^{1} + \\ &\quad + \lambda_1 \varepsilon_\alpha^\beta \sum_{k=1}^{\infty}\sin\left[\pi\left(k-\frac{1}{2}\right)\zeta\right]\psi_{3k,\beta}, \\ u_3 &= a_0\Phi_1 + \frac{a_1}{2}z^2\Delta\Phi_1 - \frac{1-a_1}{2}h^2\Delta\Phi_1 + \sum_{k=1}^{\infty}(F_{1k}\psi_{1k} + \bar{F}_{1k}\bar{\psi}_{1k}), \end{aligned} \tag{5.19}$$

gdzie

$$\begin{aligned} H_{1k}(\zeta) &= a\frac{\sin s_1\varrho_k\zeta}{s_1\varrho_k}\cos s_2\varrho_k - \frac{\sin s_2\varrho_k\zeta}{s_2\varrho_k}\cos s_1\varrho_k, \\ F_{1k}(\zeta) &= \cos s_1\varrho_k\zeta\cos s_2\varrho_k - a\cos s_2\varrho_k\zeta\cos s_1\varrho_k, \quad \zeta = \frac{x_3}{h}, \end{aligned} \tag{5.20}$$

$\bar{H}_{1k}(\zeta)$, $\bar{F}_{1k}(\zeta)$ są zespolonymi sprzężonymi funkcjami z $H_{1k}(\zeta)$, $F_{1k}(\zeta)$, natomiast a_0, a_1 są rzeczywistymi liczbami, które oblicza się ze wzorów

$$a_0 = \frac{G_{13}c_{33}}{(c_{11}c_{33} - c_{13}^2)\lambda}, \quad a_1 = \frac{G_{13}c_{13}}{c_{11}c_{33} - c_{13}^2}. \tag{5.21}$$

W zagadnieniu tarczowym jest

$$\begin{aligned} u_\alpha &= \Phi_{2,\alpha}^{*} + h\sum_{k=1}^{\infty}(H_{2k}\psi_{2k} + \bar{H}_{2k}\bar{\psi}_{2k})_{,\alpha} + \lambda_1\varepsilon_\alpha^\beta\sum_{k=0}^{\infty}\cos(k\pi\zeta)\psi_{4k,\beta}, \\ u_3 &= \sum_{k=1}^{\infty}(F_{2k}\psi_{2k} + \bar{F}_{2k}\bar{\psi}_{2k}), \end{aligned} \tag{5.22}$$

$$
(5.23)\qquad
\begin{aligned}
H_{2k}(\zeta) &= as_2\frac{\sin s_2\varrho_k^*}{\varrho_k^*}\cos s_1\varrho_k^*\zeta - s_1\frac{\sin s_1\varrho_k^*}{\varrho_k^*}\cos s_2\varrho_k^*\zeta,\\
F_{2k}(\zeta) &= s_1 s_2\left[\frac{\sin s_2\varrho_k^*}{\varrho_k^*}\cdot\frac{\sin s_1\varrho_k^*\zeta}{\varrho_k^*} - a\frac{\sin s_1\varrho_k^*}{\varrho_k^*}\cdot\frac{\sin s_2\varrho_k^*\zeta}{\varrho_k^*}\right],
\end{aligned}
$$

a $\bar{H}_{2k}(\zeta)$, $\bar{F}_{2k}(\zeta)$ są sprzężonymi funkcjami z $H_{2k}(\zeta)$, $F_{2k}(\zeta)$. Otrzymane rozwiązania jednorodne wraz z rozwiązaniami szczególnymi, uwzględniającymi obciążenia na płaszczyznach $|x_3| = h$, które można wyznaczyć z równań (3.9) lub (3.10), opisują problem statyczny płyt ortotropowych lub poprzecznie izotropowych ($\lambda = 1$), czy też płyt wykonanych z materiału izotropowego ($a = \lambda = s_1 = s_2 = 1$). Podane rozwiązania mogą być wyjściowymi do analizy stanu naprężenia i przemieszczenia w dowolnie grubych płytach ortotropowych, gdyż stwarzają możliwość spełnienia z dowolną dokładnością warunków brzegowych występujących na konturze płyty, a w granicznym przypadku ścisłego ich spełnienia. Podstawowy (wewnętrzny) stan naprężenia opisywany jest funkcjami $\Phi_1(x_a)$ i $\Phi_2(x_a)$ będącymi rozwiązaniami równań (5.11) i (5.15). Rozwiązania opisywane funkcjami $\psi_{1k}(x_a)$, $\psi_{2k}(x_a)$, określone na zbiorze pierwiastków zespolonych równań transcendentnych (5.5) i (5.6), opisują efekt brzegowy. Natomiast pole przemieszczeń przedstawione funkcjami $\psi_{3k}(x_a)$, $\psi_{4k}(x_a)$, określone na zbiorze wartości własnych danych w postaci jawnej, jest rotacyjnym polem przemieszczenia w płycie. Ograniczając się w rozwiązaniach jednorodnych do skończonych sum otrzymamy rozwiązania aproksymujące ścisłe rozwiązania i w tym przypadku warunki brzegowe na konturze będzie można spełnić w sposób przybliżony.

Równanie (5.11), określające funkcję opisującą wewnętrzny stan naprężenia w problemie zginania, ma po wykorzystaniu oznaczenia (3.4′) i zależności (1.4) postać

$$
(5.24)\qquad \left[c_{11}\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2(c_{12}+2G_{12})\frac{\partial^4}{\partial x_1^2\partial x_2^2} + c_{22}\frac{\partial^4}{\partial x_2^4}\right]\Phi_1 = 0.
$$

W klasycznej teorii zginania płyt ortotropowych stan naprężenia opisywany jest funkcją ugięcia powierzchni środkowej, spełniającą równanie (por. [7] s. 332)

$$
(5.25)\qquad \left[D_{x_1}\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2(D_1+2D_{x_1x_2})\frac{\partial^4}{\partial x_1^2\partial x_2^2} + D_{x_2}\frac{\partial^4}{\partial x_2^4}\right]w = q,
$$

w którym stałe współczynniki zależą jedynie od parametrów sprężystych w płaszczyźnie płyty, podczas gdy współczynniki występujące w równaniu (5.24) zależą od właściwości sprężystych materiału w trzech kierunkach. Stwarza to możliwości uwzględnienia wpływu parametrów materiałowych w kierunku poprzecznym na stany przemieszczenia i naprężenia, co w przypadku płyt anizotropowych nie jest bez znaczenia [8].

Jeśli odstąpić od ścisłego spełnienia warunków brzegowych na konturze płyty i zastąpić je przybliżonymi, całkowymi lub uśrednionymi, to stan naprężenia i przemieszczenia można opisać funkcjami $\Phi_1(x_a)$, $\Phi_2(x_a)$ oraz ψ_{31} i ψ_{40}, przy czym można wówczas spełnić pięć warunków na każdym brzegu. Równania służące do obliczenia całki szczególnej, uwzględniającej obciążenia płaszczyzn ograniczających, wyznaczymy z równań przybliżonych, jakie otrzymuje się z (3.9), (3.10)

$$\Delta^2 u_3 = \frac{3}{2h^3 G_{23}}\left\{\left[a_0+\frac{a_1}{2}z^2\Delta-\frac{1-a_1}{2}h^2\Delta\right](q^+-q^-)+\right.$$
$$\left.+h\left[a_0+\frac{a_1}{2}z^2\Delta-\frac{1-a_1}{6}h^2\Delta\right](p_\beta^+ + p_{\bar\beta}^-)_{,\beta}\right\},$$

$$\Delta^2 u_\alpha^P = \frac{3z}{2h^3 G_{23}}\left\{\left[-a_0-\frac{a_1}{2}h^2\Delta+\frac{1-a_1}{6}z^2\Delta\right](q^+-q^-)_{,\alpha}+\right.$$

$$\left.+h\left[-a_0-\frac{a_1}{6}h^2\Delta+\frac{1-a_1}{6}z^2\Delta\right]\partial_\alpha(p_\beta^+ + p_{\bar\beta}^-)_{,\beta}\right\}, \tag{5.26}$$

$$\left[\Delta-\frac{G_{13}}{G_{12}}\frac{\pi^2}{4}h^{-2}\right]u_\alpha^R = -\frac{\pi^2\lambda_1}{2G_{12}\lambda h}\frac{z}{h}\varepsilon_\alpha^\beta(\chi^+ + \chi^-)_{,\beta},$$
$$u_\alpha = u_\alpha^P + u_\alpha^R$$

w zagadnieniu płytowym oraz

$$u_3 = \frac{z}{2G_{23}}[a_2 a_0(q^+ + q^-)+h^{-1}a_1(\tau^+ - \tau^-)],$$

$$\Delta u_\alpha^P = \frac{1}{2G_{23}}\left\{\left[-a_l+\frac{a_3}{6}h^2\Delta-\frac{1}{2}a_2 a_0 z^2\Delta\right](q^+ + q^-)_{,\alpha}+\right. \tag{5.27}$$
$$\left.+\left[-a_0-\frac{a_1}{2}h^2\Delta+\frac{1-a_1}{2}z^2\Delta\right]h^{-1}(\tau^+ - \tau^-)_{,\alpha}\right\},$$

$$\Delta u_{\alpha j}^R = \frac{\lambda_1}{2G_{12}\lambda h}\varepsilon_\alpha^\beta(\chi^- - \chi^+)_{,\beta},$$
$$u_\alpha = u_\alpha^P + u_\alpha^R$$

w problemie rozciągania (ściskania) płyty.

W związkach (5.27) oznaczono

$$a_3 = \left(\frac{c_{13}+G_{13}}{c_{33}} - \frac{G_{13}c_{13}^2}{c_{33}(c_{11}c_{33}-c_{13}^2)}\right)\lambda, \quad a_2 = \frac{c_{11}}{c_{33}}\lambda^2. \tag{5.28}$$

Tak zbudowana „teoria uściślona", oparta na założeniu stosowalności zasady de Saint Venanta, może służyć do wyznaczenia wewnętrznego stanu naprężenia i z punktu widzenia zastosowań technicznych będzie to dobre przybliżenie ścisłych rozwiązań. Wyjaśnienie innych sprężystych zjawisk w płycie, w szczególności efektu brzegowego, możliwe jest przy wykorzystaniu ogólnych rozwiązań podanych w pracy.

Literatura cytowana w tekście

1. Л. А. Агаловян, *Об уточнении классической теории изгиба анизотропных пластин*, Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. XVIII, 5 (1965).
2. Л. А. Агаловян, *К теории изгиба ортотропных пластин МТТ*, 6 (1966).

3. Л. А. Агаловян, *О погранслое ортотропных пластинок*, Изв. АН Арм. ССР, механика, т. XXVI, 2 (1973).
4. А. И. Лурье, *Пространственные задачи теории упругости*, Гостехиздат, Москва 1955.
5. B. Rogowski, *Zagadnienia równowagi grubej płyty poprzecznie izotropowej*, Rozpr. Inż., 22, 3 (1974) 445 - 467.
6. B. Rogowski, *Funkcje przemieszczeń dla ośrodka poprzecznie izotropowego*, Mech. Teor. Stos., 1, **13** (1975), 69 - 83.
7. S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, *Teoria płyt i powłok*, Arkady, 1962.
8. B. Rogowski, *Zginanie płyty poprzecznie izotropowej*, AIL, 4 (1974).

Р е з ю м е

О СТРУКТУРЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ОБ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИНАХ

Введены функции перемещений для тела с прямолинейной ортотропией и шестью независимыми упругими константами. Функция использовалась для решения статической задачи об ортотропной плите произвольно нагруженной на ограничивающих плоскостях, а также для случая, когда эти плоскости свободны от напряжений. Для составляющих вектора перемещения было получено, независимо для задачи о диске и для задачи о плите, разделенное уравнение в символической операторной записи, соответствующее дифференциальным уравнениям бесконечного порядка. Одиородные решения содержат: удовлетворяющие соответственно уравнениям четвертого и второго порядков функции описывающие внутреннее напряженное состояние, удовлетворяющие уравнениям Гельмгольца, определенные на множестве корней соответствующих трансцендентных уравнений, функции, которые описывают краевые эффекты и, наконец, определенные на множестве данных в явнов виде действительных собственных значений, функции которые удовлетворяют уравнениям Гельмгольца и описывают поле вращательных перемещений в плите. Проводятся уравнения «уточненной теории».

S u m m a r y

ON THE STRUCTURE OF SOLUTIONS IN THE PROBLEMS OF ORTHOTROPIC PLATES

Displacement potentials are introduced in the case of rectilinear orthotropy characterized by six independent elastic constants. The potentials are used to solve the static case of an orthotropic plate either arbitrarily loaded on the bounding planes or free from loads. Two independent equations for the displacement components are obtained, corresponding to the plane stress and plate bending problems, respectively; the equations are written in a symbolic, operator form and are equivalent to differential equations of infinite order. The homogeneous equations contain: the functions describing the internal state of stress and satisfying the 4th and 2nd order equations, respectively; the functions defined in the set of roots of the corresponding transcendental equations satisfying the Helmholtz equations and describing the boundary effect, and the functions defined in the set of real-valued eigenvalues, given in an explicit form, which satisfy the Helmholtz equations and describe the rotational field of displacements in the plate. Equations of the «more accurate» theory are presented.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA, ŁÓDŹ

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 grudnia 1974 r.