

WPLYW TARCIA W PRZEGUBACH NA PRZEBIEG WYBOCZENIA PRĘTA ŚCISKANEGO

ANDRZEJ TROJNACKI (KRAKÓW)

1. Wstęp

Doświadczalne badania prętów na wyboczenie przeprowadza się najczęściej dla dwuprzegubowego sposobu zamocowania. W konstrukcyjnych rozwiązaniach przegubów niemożliwe jest całkowite wyeliminowanie tarcia, a jak się okazuje, ma ono duży wpływ na przebieg i wynik eksperymentu. W niektórych przypadkach tarcie może spowodować nawet przekroczenie siły eulerowskiej, rozumianej jako siła krytyczna dla pręta idealnego, zamocowanego dwuprzegubowo. Na zjawisko to zwraca uwagę WASIUTYŃSKI [9], doszukując się w nim przyczyny nagłości procesu wyboczenia: „...Przed wygięciem pręta, siły tarcia, wzrastając stopniowo do wartości rozwiniętych, dają w przegubach pewne momenty opierające się wygięciu pręta, a więc działające podobnie jak częściowe zamocowanie jego końców, i pozwalające na doprowadzenie obciążenia do wartości nieco większej od tej, którą by można było osiągnąć w razie zmniejszenia sil tarcia. W chwili powstania ruchu, rozwinięte siły tarcia w przegubach zmniejszają się nagle do wartości tarć posuwistych, wskutek czego obciążenie pręta nagle staje się większe o skończoną nadwyżkę od siły, odpowiadającej stanowi równowagi.” Tej nadwyżce obciążenia WASIUTYŃSKI przypisuje dynamiczny charakter większości prób na wyboczenie.

Tarcie w przegubach z jednej strony, a podatność utwierdzenia z drugiej powodują, że rzeczywiste warunki zamocowania ściskanych prętów odbiegają od idealnych i są zawarte między idealnymi przegubami a idealnym utwierdzeniem. Z zagadnieniem tym wiążą się również inne nieuniknione odstępstwa od teoretycznego schematu: pierwotna krzywizna osi pręta i mimośrodowe przyłożenie obciążenia. Wpływ tych czynników na przebieg wyboczenia jest szeroko omówiony w monografiach BLEICHA [1], TIMOSHENKI [8] i WOLMIRA [11]. Oprócz rozważań teoretycznych, autorzy przytaczają wyniki licznych doświadczeń oraz proponują metody uwzględniania wymienionych wyżej nieprawidłowości w obliczeniach wytrzymałościowych rzeczywistych elementów konstrukcyjnych.

Doświadczalny sposób określenia warunków brzegowych na końcach ściskanego pręta, a w konsekwencji wielkości obciążenia krytycznego, podają HORTON, CRAIG i STRUBLE [3]. Przy klasycznych badaniach na ściskanie siłą osiową, obciążenie musi być doprowadzone do bliskiego krytycznemu. Wiążą się z tym jednak niepożądane odkształcenia trwałe, zatem autorzy proponują badać pręt na zginanie siłą prostopadłą do osi. W pracy zamieszczone są wyniki badań prętów aluminiowych i stalowych, których końce zamocowane były na spiralnych sprężynach o różnej sztywności. Podobnym zagadnieniem

zajmowali się LAZARD i MOUTY [5]. Badali oni na zginanie pręt z utwierdzonymi sprężystymi końcami, wyliczając siłę krytyczną z wyprowadzonej zależności między giętą sztywnością elementu i osiowym obciążeniem pręta.

Metoda doświadczalnego określenia początkowego ugięcia i mimośrodowość obciążenia ściskanego osiowo pręta przedstawiona jest w pracach [2] i [4]. Zakładając pierwotną krzywiznę w postaci półfali sinusoidy i wykorzystując znane równanie różniczkowe osi pręta dla małych przemieszczeń, autorzy otrzymują zależność ugięć pręta od ugięcia pierwotnego i mimośrodowość. Przy jej pomocy opracowano wyniki badań, z których wynika, że wpływ mimośrodowość wypadkowej siły zewnętrznej jest w porównaniu z wpływem krzywizny początkowej niewielki i daje efekty rzędu 10%. Ten sam problem jest celem rozważań SHINGO [7].

Niniejsza praca zajmuje się teoretycznym opisem przebiegu wyboczenia sprężystego pręta, zamocowanego w dwóch rzeczywistych przegubach z tarciami. Wyboczenie rozumie się tu w sensie technicznym (WIERZBIŃSKI [10]), jako silny wzrost ugięć ściskanego pręta o niewielkich niedokładnościach wstępnych, które w pracy będą reprezentowane stałą krzywizną pierwotną pręta κ_0 . Wpływ mimośrodowości obciążenia i niejednorodności materiału pręta ma zbliżony charakter i zazwyczaj może być ujęty pewną zastępczą krzywizną pierwotną (ŻYCZKOWSKI [12]). Takie podejście umożliwi zbliżenie teorii do realnych warunków doświadczalnych, gdzie całkowite wyeliminowanie niedokładności wstępnych nie jest możliwe. Praca pozostaje w związku z eksperymentalnymi badaniami wyboczenia, wykonanymi dla prętów z tworzywa sztucznego. Obciążenie realizowano przy stałej prędkości przesuwu półek maszyny, równej 0,5 cm/min. Dla serii sześciu prób, w czterech przypadkach nagły wzrost ugięć pręta wystąpił wyraźnie powyżej teoretycznej siły krytycznej (eulerowskiej) dla zamocowania dwuprzegubowego, przekraczając ją odpowiednio o 5, 3, 1 i 5%. Ponieważ reologiczne własności materiału powodować mogą jedynie zmniejszenie siły krytycznej badanych prętów (RABOTNOW, SZESTIERIKOW [6]), wyniki doświadczeń można wytłumaczyć przede wszystkim istnieniem tarcia w przegubach i temu zagadnieniu jest poświęcona obecna praca.

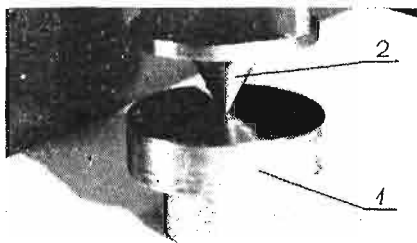
2. Opis budowy zastosowanego przegubu i określenie momentu tarcia

Pręt zamocowany był w maszynie wytrzymałościowej w dwóch jednakowych przegubach (rys. 1). Każdy z nich składał się z płytki oporowej 1, z wydrążonym wgłębieniem w kształcie stożka o kącie rozwarcia 2φ . We wgłębieniu osadzona była końcówka 2, zamocowana w badanym pręcie. Miała ona również kształt stożka, lecz o mniejszym kącie rozwarcia i wierzchołku zaokrąglonym promieniem r . Oba elementy były wykonane ze stali. Moment tarcia M_T w przegubie (przy założeniu, że w przegubie tym występuje ruch) można określić, analizując jego budowę i współpracę końcówki z płytką podczas obciążania pręta. W dalszym ciągu założono, że styk obu tych części następuje jedynie w dwóch punktach A i B , leżących w płaszczyźnie osi wstępnie wygiętego pręta (rys. 2). Zgodnie z prawem tarcia Coulomba pojawią się w nich reakcje normalne P_A i P_B oraz proporcjonalne do nich reakcje styczne. Ich zwrot jest przeciwny do założonego kierunku obrotu końcówki,

zaznaczonego na rys. 2 strzałką. Reakcje P_A i P_B można wyliczyć z warunku równowagi sił w przegubie, a moment tarcia ostatecznie wynosi

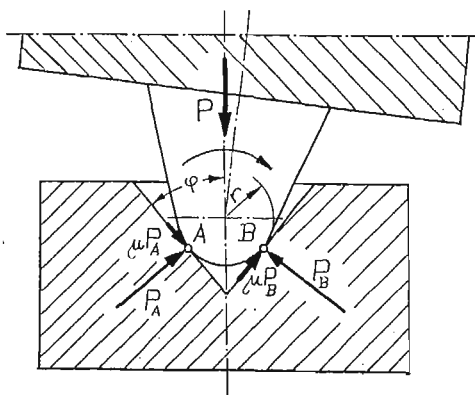
$$(2.1) \quad M_T = \frac{Pr\mu}{(1+\mu^2)\sin\varphi},$$

gdzie μ jest współczynnikiem tarcia dla materiałów końcówki i płytki, a P aktualną siłą osiową. Wzór (2.1) można stosować w powyższej formie (ze znakiem równości), gdy obrót w przegubie jest możliwy od samego początku obciążania, to jest w układach o dużych niedokładnościach wstępnych i małym współczynniku tarcia μ . W przeciwnym przypadku,



Rys. 1

Przegub zastosowany w próbie stateczności



Rys. 2. Rozkład sił w uruchomionym przegubie

tarcie w przegubach da zauważalny efekt, w postaci początkowego utwierdzenia końców pręta. Pojawią się momenty utwierdzenia, zwiększające się ze wzrostem siły ściskającej. Przegub będzie unieruchomiony aż do chwili, gdy momenty utwierdzenia pokonają momenty tarcia (2.1) i w przegubie rozpocznie się obrót. Wymienione warianty będą poddane analizie w dalszej części pracy.

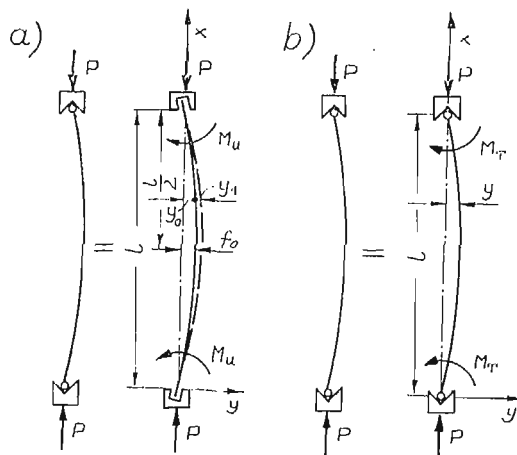
3. Analiza procesu obciążania pręta

Proces utraty stateczności można najogólniej rozpatrywać w dwóch etapach. Początkowo pręt zachowuje się jak utwierdzony (rys. 3a) aż do chwili, gdy w przegubach zostaną przekroczone momenty tarcia (2.1) o wartości wynikającej z wymiarów przegubu, współczynnika tarcia μ i aktualnej siły osiowej P . Następnie rozpocznie się ruch elementów przegubu i ten sam pręt należy potraktować jak dwuprzegubowy, lecz obciążony oprócz siły ściskającej dodatkowo momentami tarcia M_T (rys. 3b). Granicę tych etapów wyznaczy siła P , przy której zachodzi równość $M_U = M_T$. W rozdziale 4 zostaną zbadane również warunki, w których etap I nie występuje i zjawisko od początku przebiega zgodnie z założeniami II etapu.

3.1. Etap I, utwierdzenie w wyniku tarcia w przegubach. W pierwszym etapie rozważano obustronnie utwierdzony pręt o długości l , z krzywizną pierwotną o stałej wartości $\kappa_0 = \text{const}$ (rys. 3a). Jedynym obciążeniem zewnętrznym jest osiowa siła ściskająca P . Całkowite ugięcie

osi pręta y jest sumą ugięcia pierwotnego y_0 i przyrostu tego ugięcia y_1 . W ramach teorii małych przemieszczeń pierwotna linia ugięcia jest parabolą o równaniu $y_0 = \kappa_0 (lx - x^2)/2$. Funkcję y_1 można podobnie wyznaczyć ze znanego równania różniczkowego osi pręta

$$(3.1) \quad EIy_1'' = -P(y_1 + y_0) + M_U,$$



Rys. 3. Przyjęty schemat zamocowania pręta: a) I etap — utwierdzenie w wyniku tarcia, b) II etap — zamocowanie przegubowe z tarcie

gdzie M_U oznacza moment utwierdzenia w wyniku tarcia w przegubach. Do dyspozycji są po dwa warunki brzegowe na każdym końcu pręta

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \text{dla } x = 0 \quad & y_1 = 0, \\ & y_1' = 0 \text{ lub } y' = \frac{\kappa_0 l}{2}, \\ \text{dla } x = l \quad & y_1 = 0, \\ & y_1' = 0 \text{ lub } y' = -\frac{\kappa_0 l}{2}. \end{aligned}$$

Stałe całkowania w rozwiązaniu równania (3.1) dają się wyznaczyć przy pomocy pierwszego i trzeciego z nich, a całkowite ugięcie osi pręta wynosi

$$(3.3) \quad y = \frac{(EI\kappa_0 - M_U)l^2}{m\pi^2 EI} \left\{ \frac{\cos \left[\left(1 - \frac{2x}{l}\right) \frac{\pi}{2} \sqrt{m} \right]}{\cos \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{m} \right)} - 1 \right\},$$

gdzie m jest bezwymiarową siłą zdefiniowaną następująco

$$(3.4) \quad m = \frac{P}{P_E} = \frac{Pl^2}{\pi^2 EI}.$$

Do określenia zależności momentów utwierdzenia M_U od siły osiowej P , można wykorzystać pozostałe dwa warunki brzegowe (3.2). Przyjęcie, że ze względu na symetrię momenty M_U są na obu końcach równe, pozwoli ograniczyć się tylko do jednego z nich, np. drugiego

$$(3.5) \quad M_U = EI\kappa_0 \left[1 - \frac{\pi}{2} \sqrt{m} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{m} \right) \right].$$

Uwzględniając ten związek w równaniu (3.3), otrzymamy równanie linii ugięcia pręta w I etapie, gdy końce pręta są utwierdzone w przegubach w wyniku działania tarcia

$$(3.6) \quad y_I = \frac{\kappa_0 l^2}{2\pi \sqrt{m}} \frac{\cos \left[\left(1 - \frac{2x}{l} \right) \frac{\pi}{2} \sqrt{m} \right] - \cos \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{m} \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{m} \right)}.$$

3.2. Ograniczenia I etapu, początek ruchu w przegubach. Pierwszy etap obciążania kończy się w chwili, gdy momenty utwierdzenia pokonują ruchowe momenty tarcia. Porównanie wzorów na M_T (2.1) i M_U (3.5) oraz wykorzystanie podstawienia (3.4) daje

$$(3.7) \quad \alpha m + \frac{\pi}{2} \sqrt{m} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{m} \right) - 1 = 0,$$

gdzie α jest pewnym «uogólnionym» współczynnikiem tarcia, zdefiniowanym następująco

$$(3.8) \quad \alpha = \frac{\pi^2 r \mu}{(1 + \mu^2) \kappa_0 l^2 \sin \varphi}.$$

Graniczną bezwymiarową siłę, przy której rozpocznie się obrót końcówki względem płytki i przejście do II etapu, określa pierwiastek m^* równania (3.7).

3.3. Etap II, uruchomione przeguby z tarcie. Analizę zachowania się pręta w II etapie wykonano w oparciu o rys. 3b. Obecnie pręt jest zamocowany przegubowo, obciążony siłą osiową P i momentami tarcia M_T w przegubach. Równanie linii ugięcia można otrzymać z (3.3), wstawiając, wobec $M_U = M_T$, zamiast M_U zależność (2.1)

$$(3.9) \quad y_{II} = \frac{\kappa_0 l^2}{\pi^2 m} (1 - m\alpha) \left\{ \frac{\cos \left[\left(1 - \frac{2x}{l} \right) \frac{\pi}{2} \sqrt{m} \right] - 1}{\cos \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{m} \right)} \right\}.$$

4. Dyskusja wyników i wnioski

Okazuje się, że pierwiastek m^* równania (3.7) nie zawsze istnieje. Zależy to od współczynnika α i oznacza, że dla pewnych jego wartości nie może dojść do wstępnego utwierdzenia końców pręta, wskutek zbyt małego współczynnika tarcia μ lub zbyt dużej krzywizny κ_0 . Równanie (3.7) jest przestępne ze względu na m , lecz daje się łatwo rozwiązać ze względu na α . W przedziale $0 \leq m \leq 4$ funkcja $\alpha = f(m)$, przedstawiona na rys. 4, posiada kres dolny

$$\inf_{0 \leq m \leq 4} \alpha = \pi^2/12 = 0,8225,$$

3. Wreszcie, gdy $1 < \alpha < \infty$, istnieje również rozwiązanie równania (3.7) — $m^* > 1$. Ugięcia w obu etapach wyrażają się tymi samymi wzorami co poprzednio, przy czym siła P w drugim etapie maleje (równowaga niestateczna).

Przypadek pręta prostego ($\alpha_0 = 0$ lub $\alpha \rightarrow \infty$) ma niewielkie znaczenie, gdyż jest praktycznie nieosiągalny. Przy braku mimośrodowości siły P , nawet niewielkie momenty tarcia w przegubach dają teoretyczną możliwość doprowadzenia obciążania do wartości $m = 4$, jak dla idealnego utwierdzenia. Można rozróżnić trzy etapy procesu obciążania. Początkowo, przy narastaniu siły od zera do $m = 4$, pręt zachowuje prostoliniową postać równowagi statecznej. Osiągnięcie siły $m = 4$ powoduje przejście do II etapu, w którym układ jest w stanie równowagi obojętnej. Równowaga pręta (z utwierdzonymi nadal w wyniku tarcia końcami) pod tym obciążeniem, jest możliwa dla różnych postaci linii ugięcia, jednak z pewnym ograniczeniem. Istnieje graniczna linia ugięcia y_{gr} , stanowiąca przejście z etapu II do III. Można ją otrzymać ze wzoru (3.6)

$$(4.1) \quad y_{gr} = \lim_{\substack{\alpha_0 \rightarrow 0 \\ m \rightarrow 4}} y_I,$$

przy warunku pobocznym, którym jest równanie (3.7). W efekcie mamy

$$(4.2) \quad y_{gr} = \frac{r\mu}{(1+\mu^2)\sin\varphi} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right).$$

Gdy ugięcia pręta przekroczą wartości wynikające z (4.2), momenty utwierdzenia w przegubach pokonają momenty tarcia i przeguby zostaną uruchomione. Obecnie, w III etapie, wystąpi gwałtowny wzrost ugięć przy spadku siły, zgodnie z odpowiednio przekształconym równaniem (3.9).

Graficzną interpretację wyników, otrzymanych dla pręta z krzywizną pierwotną, jest najwygodniej przedstawić w układzie: bezwymiarowa strzałka ugięcia w połowie pręta f/f_0 — bezwymiarowa siła m (rys. 5). Odpowiednie wzory można otrzymać z (3.6) i (3.9), podstawiając $x = l/2$. W przypadku 1 utrata stateczności odbywa się jednoetapowo i w całym zakresie obowiązuje zależność

$$(4.3) \quad \frac{f}{f_0} = \frac{8}{\pi^2 m} (1 - m\alpha) \left[\sec \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{m} \right) - 1 \right].$$

Dla przypadków 2 i 3 mamy

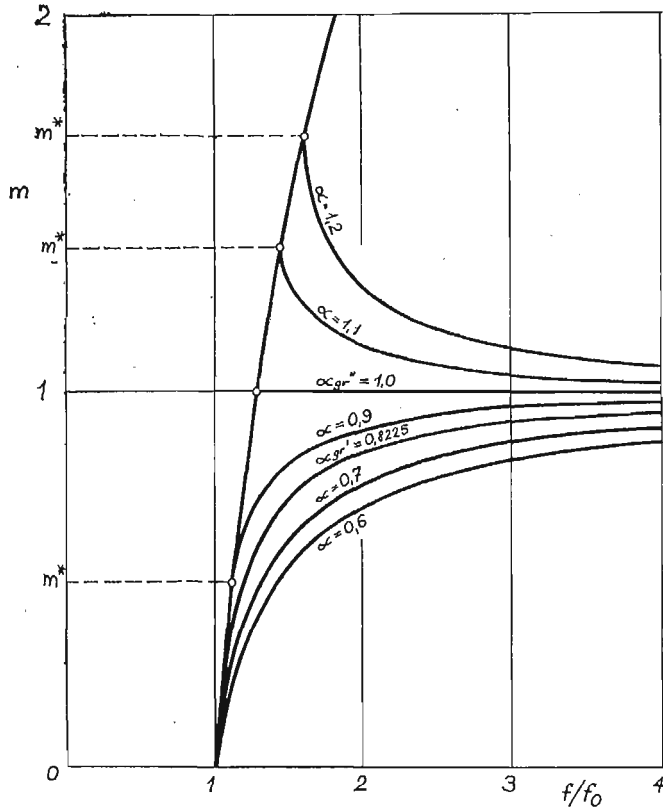
$$(4.4) \quad \left(\frac{f}{f_0} \right)_I = \frac{4}{\pi \sqrt{m}} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \sqrt{m} \right),$$

$$(4.5) \quad \left(\frac{f}{f_0} \right)_{II} = \frac{8}{\pi^2 m} (1 - m\alpha) \left[\sec \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{m} \right) - 1 \right].$$

W równaniu (4.4) dla I etapu współczynnik α nie interweniuje; wpływa on jedynie na wartość siły m^* . Po jej osiągnięciu następuje przejście do II etapu i prawie natychmiastowe wyboczenie.

Z przedstawionych na rys. 5 zależności między siłą i ugięciem wynika, że gdy $\alpha > 1$ (przyp. 3), można — w pewnych warunkach — przekroczyć pod koniec I etapu procesu obciążania krytyczną siłę eulerowską $m = 1$ dla idealnego pręta dwuprzegubowego, bez

utrąty stateczności. Równanie (3.7), które rozgranicza I etap od II, ma wtedy pierwiastek $m^* > 1$. W zakresie obciążenia $1 \leq m \leq m^*$ pręt jest nadal stateczny (wzrostowi siły towarzyszy wzrost ugięć) w wyniku tarcia w przegubach, które daje momenty utwierdzające. Gwałtowny wzrost ugięć, połączony ze spadkiem siły, rozpoczyna się dopiero po osiągnięciu



Rys. 5. Wykres zależności siły m od bezwymiarowej strzałki ugięcia f/f_0 dla różnych wartości współczynnika α

siły m^* , uruchomieniu przegubów i przejściu do II etapu. Z takim przebiegiem zjawiska należy się liczyć przy badaniu prętów krępych (ale pozostających jeszcze w zakresie sprężystym), z małymi niedokładnościami wstępnymi i dla znacznych wartości współczynnika tarcia μ .

Literatura cytowana w tekście

1. F. BLEICH, *Buckling strength of metal structures*, McGraw-Hill, 1952.
2. C. HAYASHI, A. KOBAYASHI, *Nihon koku gakkayshi*, J. Japan Soc. Aeronaut. and Space Sci., 157, 15 (1967), 47 - 51.
3. W. H. HORTON, J. I. CRAIG, D. E. STRUBLE, *A simple, practical method for the experimental determination of the end fixity of a column*, Proc. 8th Int. Symp. Space Technol. and Sci., Tokyo 1969, Tokyo 1969, 269 - 280.

4. A. KOBAYASHI, C. HAYASHI, *Tokio daigaku utiu koku kenkiushio hokoku*, Bull. Inst. Space and Aeron. Sci. Univ. Tokyo, 3, A2 (1966), 907 - 917.
5. A. LAZARD, J. MOUTY, *Détermination expérimentale de la charge de flambement et des souplesses d'encastrement d'un élément*, Mém. Assoc. int. ponts et charp., 27 (1967), 31 - 42.
6. Ю. Н. РАБОТНОВ, С. А. ШЕСТЕРНИКОВ, *Устойчивость стержневой и пластинок в условиях ползучести*, Прикл. мат. и мех., 3, 21 (1957) 406-412.
7. T. SHINGO, *Influences of initial eccentricities of columns while testing*, Mem. Def. Acad., 2, 8 (1968), 595 - 603.
8. S. P. TIMOSHENKO, J. M. GERE, *Teoria stateczności sprężystej*, Arkady, Warszawa 1963.
9. Z. WASIUTYŃSKI, *O wyboczeniu stalowych prętów prostych*, Warsz. Tow. Politech., Warszawa 1933.
10. W. WIERZBICKI, *O powstawaniu wyboczenia prętów prostych*, Rozpr. Inż., 12 (1954), 1 - 65.
11. А. С. ВОЛЬМИР, *Устойчивость деформируемых систем*, Изд. Наука, Москва 1967.
12. M. ŻYCZKOWSKI, *Skończone ugięcia mimośrodowo ściskanych prętów o krzywiznie pierwotnej*, Księga jubileuszowa Witolda Wierzbickiego, PWN, Warszawa 1959, 479 - 518.

Р е з ю м е

ВЛИЯНИЕ ТРЕНИЯ В ШАРНИРАХ НА ПРОЦЕСС ПРОДОЛЬНОГО ИЗГИБА
СЖАТОГО СТЕРЖНЯ

В работе исследуется влияние трения в шарнирах на продольный изгиб шарнирно закрепленного на концах стержня с небольшим начальным изгибом. Указывается, что для реальных, используемых в экспериментах шарниров трение может вызвать эффект начального защемления концов стержня. Таким образом, процесс продольного изгиба происходит двумя этапами. Первый этап (стержень с защемленными концами) заканчивается тогда, когда моменты в защемлении превышают моменты трения в шарнирах. На втором этапе этот же стержень следует рассматривать в качестве шарнирно закрепленного стержня с добавочной нагрузкой от моментов трения в шарнирах. На конце первого этапа может наблюдаться равновесие при нагрузке превосходящей эйлеровскую критическую силу для идеального свободно опертого стержня.

S u m m a r y

THE INFLUENCE OF FRICTION IN THE HINGES ON THE BUCKLING PROCESS OF
A COLUMN

The paper presents the problem of the influence of friction occurring in the hinges on the buckling process of a simply supported column with a small initial curvature. It has been found, that the initial clamping of the ends of the bar is possible for the type of the hinge actually used in the experiments. Thus the buckling process runs in two stages. The first stage (bar with fixed ends) terminates, when the clamping moments exceed the friction moments. In the second stage the same bar is analyzed with two hinges at the ends, but it is additionally loaded with the friction moments at these hinges. At the end of the first period, the column may be stable even under the loading, exceeding the critical Euler force at the simply supported rod.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 30 września 1974 r.