

PEWIEN ITERACYJNY SPOSÓB WYZNACZANIA NAPRĘŻEŃ W TARCZACH
WIELOSPÓJNYCH

ZBIGNIEW BUDZIANOWSKI FELIKS ANDERMANN,
JÓZEF WRANIK (GLIWICE)

1. Wstęp

W niniejszej pracy przedstawiono sposób obliczania tarcz wielospójnych (o skokowo zmiennej grubości lub z otworami) polegający na wielokrotnym rozwiązywaniu odpowiednio dobranej tarczy jednospójnej i pozwalający określić stan naprężenia w tarczy wielospójnej metodą iteracyjną.

Sposób ten pozwala zatem na rozwiązanie problemu trudniejszego przez wielokrotne rozwiązanie problemu łatwiejszego. Obliczenie tarczy jednospójnej, mimo że stanowi problem łatwiejszy, nie jest zadaniem prostym i wymaga w większości przypadków bądź korzystania z gotowych rozwiązań, np. podanych w [3], lub z elektronicznych maszyn cyfrowych. W przypadku korzystania z maszyn przedstawiony sposób pozwala obliczyć tarcze wielospójne na podstawie programów opracowanych dla tarcz jednospójnych.

Zgodnie z powszechnie przyjętymi założeniami w przypadku tarcz o skokowo zmiennej grubości pomija się fakt występowania w strefie przyuskokowej przestrzennego stanu naprężeń. W pracy [1] wykazano na drodze doświadczalnej, że w strefie tej naprężenia równoległe do środkowej płaszczyzny tarczy różnią się nieznacznie od analogicznych naprężeń obliczonych dla płaskiego stanu naprężenia, mimo występowania dodatkowych naprężeń skierowanych prostopadle do tej płaszczyzny.

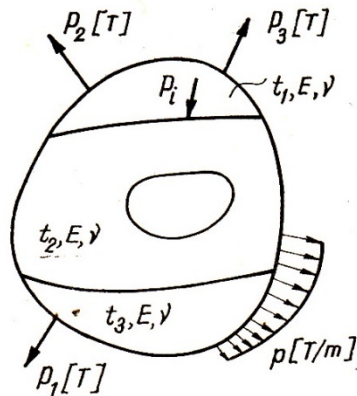
Sposób postępowania opisano na przykładzie prostokątnej tarczy bezotworowej z jedną skokową zmianą grubości i na tarczy perforowanej. Na zakończenie podano dwa przykłady liczbowe.

2. Przedstawienie problemu

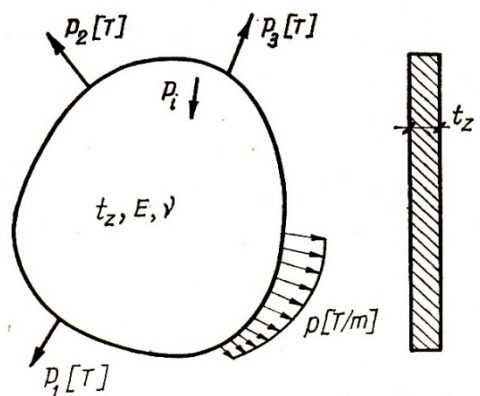
Stan naprężenia w jednorodnej tarczy wielospójnej (rys. 1) będzie poszukiwany przez obliczanie tarczy jednospójnej (rys. 2), której kontur zewnętrzny przystaje do konturu tarczy wielospójnej. Tarczę jednospójną o dowolnej grubości będziemy w dalszym ciągu nazywali tarczą zastępczą. Rozwiązanie dla tarczy wielospójnej otrzymamy jako sumę kolejnych rozwiązań tarczy zastępczej dla kolejnych składowych obciążeń, z których pierwsze obciążenie składowe jest identyczne z obciążeniem tarczy wielospójnej (rys. 2),

następne zaś wynikają z rozwiązań tarczy zastępczej w poprzedzających etapach postępowania.

Metodę rozwiązania zadania przedstawimy na przykładzie prostokątnej tarczy bezotworowej z jedną zmianą grubości, obciążonej siłami $p(x)$, $Y(x)$, $X(x)$ (rys. 3). Niech tarcza z tym obciążeniem tworzy układ wyjściowy U_0 , dla którego poszukuje się rozwiązania.

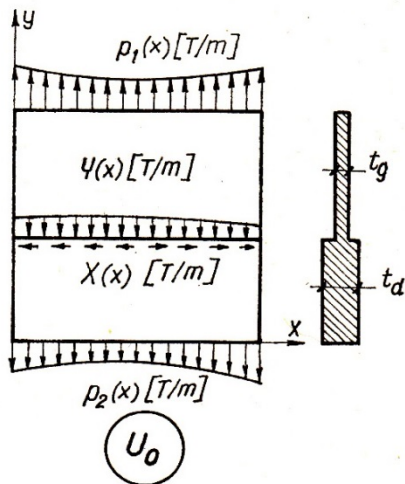


Rys. 1

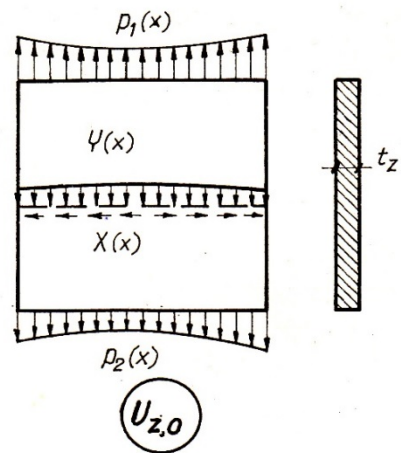


Rys. 2

Wprowadzimy do obliczeń zastępczą tarczę gładką o grubości t_z , która wraz z obciążeniem tarczy rzeczywistej tworzy układ zastępczy $U_{z,0}$ (rys. 4). Załóżmy, że układ ten można rozwiązać i że znane są tym samym stany naprężenia w górnej i dolnej części tarczy ($\sigma_x^g, \sigma_y^g, \tau^g$ oraz $\sigma_x^d, \sigma_y^d, \tau^d$). Występujący w tarczy zastępczej stan naprężenia wymuszamy



Rys. 3



Rys. 4

obecnie na tarczy rzeczywistej (rys. 5a), zapewniając w ten sposób ciągłość odkształcenia wzdłuż linii skokowej zmiany grubości, co prowadzi do układu \bar{U}_0 z rys. 5b, dla którego stan naprężenia jest określony w układzie $U_{z,0}$.

Wprowadzamy obecnie układ U_1 (rys. 6a) utworzony przez rzeczywistą tarczę obciążoną różnicą sił działających na tarcze układu U_0 oraz \bar{U}_0 , czyli

$$(1) \quad U_1 = U_0 - \bar{U}_0.$$

W linii zmiany grubości wystąpią w tym układzie obciążenia

$$(2) \quad \Delta_1 Y = Y - (\sigma_y^g t_g - \sigma_y^d t_d), \quad \Delta_1 X = X - (\tau^g t_g - \tau^d t_d);$$

wzdłuż brzegów poziomych zaś

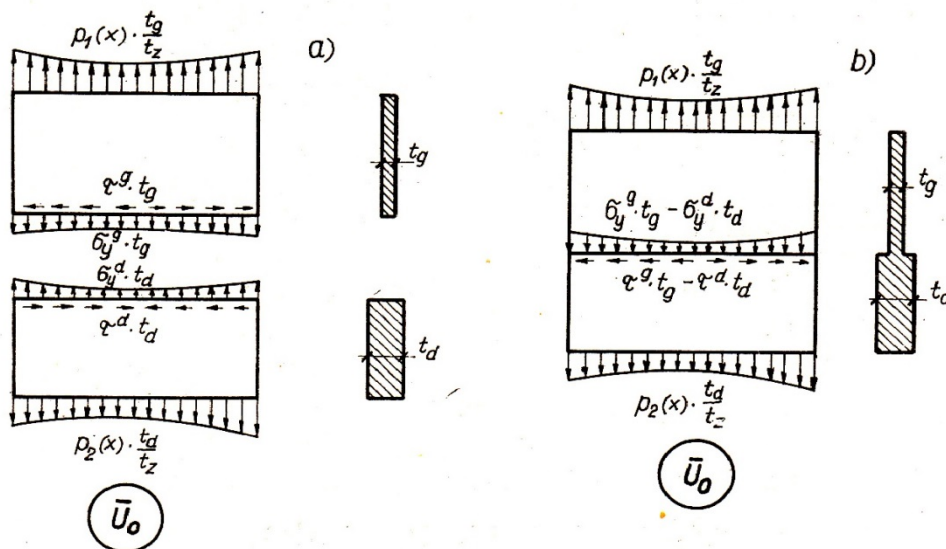
$$(3) \quad \Delta_1 p_1(x) = \mu_1 p_1(x), \quad \Delta_1 p_2(x) = \mu_2 p_2(x),$$

gdzie

$$(4) \quad \mu_1 = \frac{t_z - t_g}{t_z}, \quad \mu_2 = \frac{t_z - t_d}{t_z}.$$

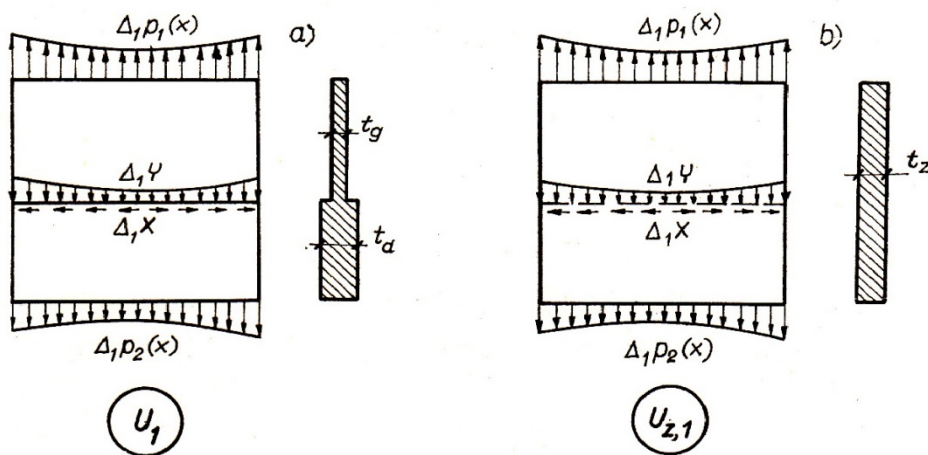
Ze wzoru (1) wynika, że

$$(5) \quad U_0 = \bar{U}_0 + U_1,$$



Rys. 5

czyli rozwiązanie tarczy w układzie U_0 zostało uwarunkowane rozwiązaniem układu U_1 . Sposób rozwiązania tego ostatniego będzie podobny do poprzedniego, zastosowanego do układu U_0 , tzn. rozwiązujemy tarczę gładką, obciążoną siłami (2) i (3), (rys. 6b), tworzącą



Rys. 6

O zbieżności szeregu (10) świadczy zbieżność sumy wartości obciążeń, działających na gładką tarczę zastępczą w układach $U_{z,n}$. Dla górnego i dolnego brzegu tarczy sumę tę wyznacza szereg geometryczny

$$(11) \quad p_{z,i}(x) = p_i(x) + \mu_i p_i(x) + \mu_i^2 p_i(x) + \dots = \frac{p_i(x)}{1 - \mu_i}, \quad i = 1, 2,$$

zbieżny pod warunkiem

$$(12) \quad |\mu_1| = \left| \frac{t_z - t_g}{t_z} \right| < 1, \quad |\mu_2| = \left| \frac{t_z - t_d}{t_z} \right| < 1.$$

Z kolei obciążenia tarczy zastępczej w linii zmiany grubości tarczy rzeczywistej wynoszą

$$(13) \quad \begin{aligned} Y_z &= Y + \Delta_1 Y + \Delta_2 Y + \dots + \Delta_k Y + \dots, \\ X_z &= X + \Delta_1 X + \Delta_2 X + \dots + \Delta_k X + \dots, \end{aligned}$$

gdzie

$$(14) \quad \begin{aligned} \Delta_k Y &= \Delta_{k-1} Y - (\Delta_{k-1} \sigma_y^g t_g - \Delta_{k-1} \sigma_y^d t_d), \\ \Delta_k X &= \Delta_{k-1} X - (\Delta_{k-1} \tau^g t_g - \Delta_{k-1} \tau^d t_d). \end{aligned}$$

Składowe obciążenia (13) stanowią również ciąg zbieżny, gdyż zbieżny ciąg tworzą obciążenia brzegowe (11).

Jednakową zbieżność dla obciążenia na górnym i dolnym brzegu uzyska się dla $|t_z - t_g| = |t_z - t_d|$ czyli

$$(15) \quad t_z = \frac{t_g + t_d}{2}.$$

W praktyce obliczeniowej ograniczamy się przy wyznaczaniu naprężeń w tarczy według (10) do kilku tylko przybliżeń. O dokładności wyniku otrzymanego dla r wyrazów orientować może reszta szeregu (11)

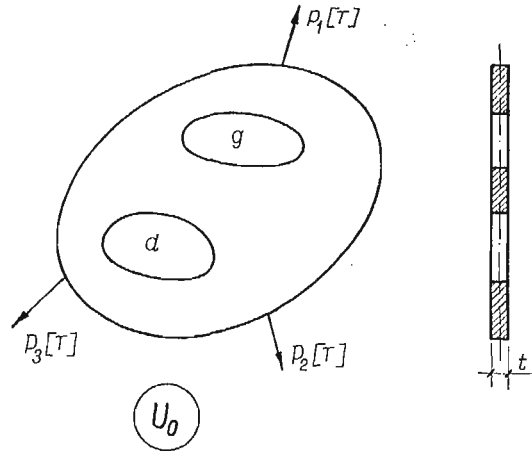
$$(16) \quad R_i = \frac{\mu_i^r}{1 - \mu_i} p_i(x).$$

Przedstawiona droga postępowania nie ulega zmianie w przypadku rozpatrywania tarczy o kilku skokowych zmianach grubości.

3. Tarcze perforowane o stałej grubości

Zasady obliczania takich tarcz (rys. 8) są podobne do stosowanych przy obliczaniu tarcz o skokowo zmiennej grubości. Wprowadzamy zastępczą tarczę bezotworową o grubości t_z , która wraz z obciążeniem układu rzeczywistego U_0 tworzy układ $U_{z,0}$ (rys. 9). Rozwiązując ją, otrzymujemy wzdłuż linii odpowiadających brzegom otworów w tarczy rzeczywistej siły przekrojowe W_0^g, W_0^d . Określony dla stanu $U_{z,0}$ stan naprężenia wymuszamy w tarczy rzeczywistej o grubości t , co wymaga zmiany obciążeń brzegowych zewnętrz-

nych i wewnętrznych do wartości $P \frac{l}{t_z}$ oraz $W_0 \frac{l}{t_z}$. Siły te tworzą wraz z tarczą rzeczywistą układ \bar{U}_0 (rys. 10).



Rys. 8

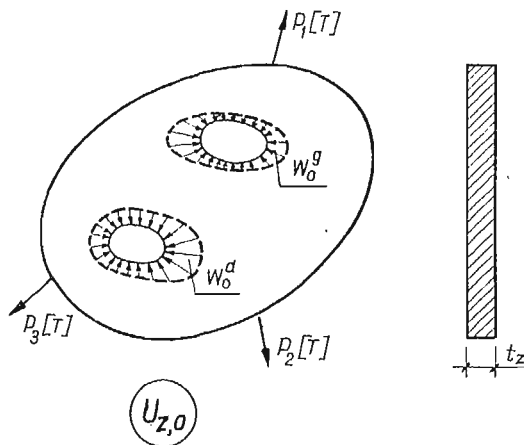
Między tym układem a układem wyjściowym zachodzi stosunek

$$(17) \quad U_0 = \bar{U}_0 + U_1,$$

gdzie nowo wprowadzony układ U_1 (rys. 11) otrzymuje się przez przyłożenie do tarczy rzeczywistej obciążeń, będących różnicą obciążeń układów U_0 i \bar{U}_0 , tzn. na brzegach zewnętrznych sił μP na brzegach zaś wewnętrznych sił ΔZ , gdzie

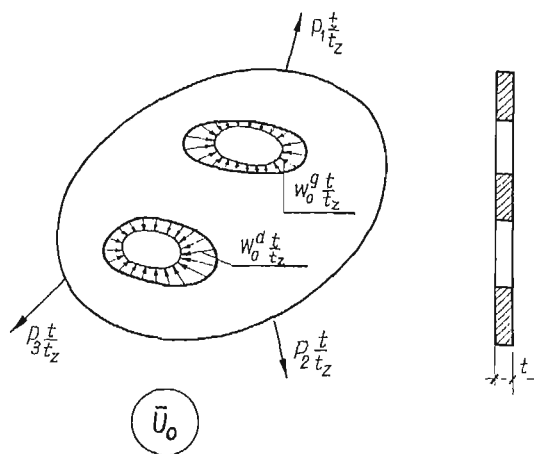
$$(18) \quad \mu = \frac{t_z - t}{t_z},$$

$$(19) \quad \Delta_1 Z_g = 0 - W_0^g \frac{t}{t_z}, \quad \Delta_1 Z_d = 0 - W_0^d \frac{t}{t_z}.$$



Rys. 9

W drugim cyklu obliczeń traktuje się układ U_1 , jak w cyklu pierwszym układ U_0 . Rozwiązuje się mianowicie tarczę zastępczą układu $U_{z,1}$ dla obciążeń układu U_1 (rys. 12) i otrzymuje się nowe wartości sił przekrojowych wzdłuż linii brzegów otworów tarczy



Rys 10

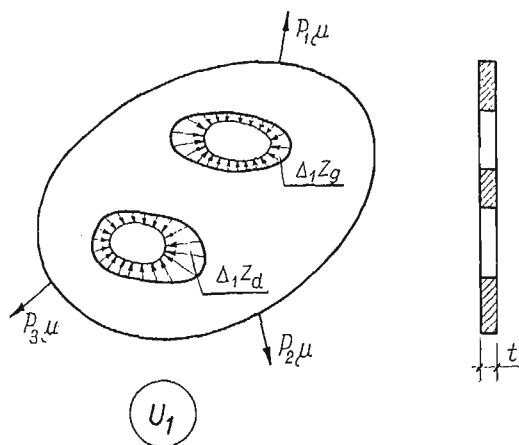
rzeczywistej — W_1 . Wymuszenie stanu naprężenia i odkształcenia tarczy układu $U_{z,1}$ na tarczy rzeczywistej prowadzi do układu \bar{U}_1 (rys. 13). Zachodzi znów związek analogiczny do (17)

$$(20) \quad U_1 = \bar{U}_1 + U_2,$$

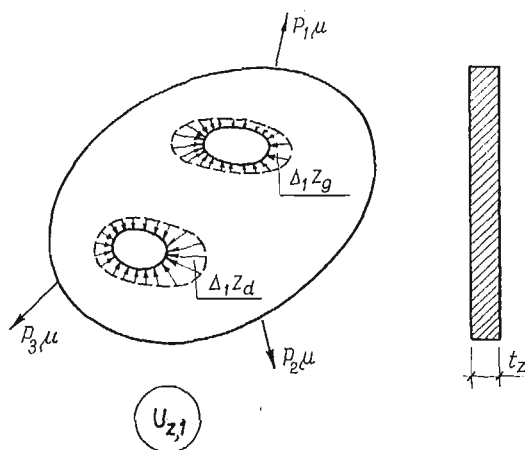
gdzie układ U_2 utworzony jest z tarczy rzeczywistej i obciążeń będących różnicą obciążeń układów U_1 i \bar{U}_1 , czyli z sił $\mu^2 P$ oraz

$$(21) \quad \Delta_2 Z_g = \Delta_1 Z_g - W_1^g \frac{t}{t_z}, \quad \Delta_2 Z_d = \Delta_1 Z_d - W_1^d \frac{t}{t_z}.$$

Układ U_2 jest wyjściowy dla trzeciego cyklu obliczeń.

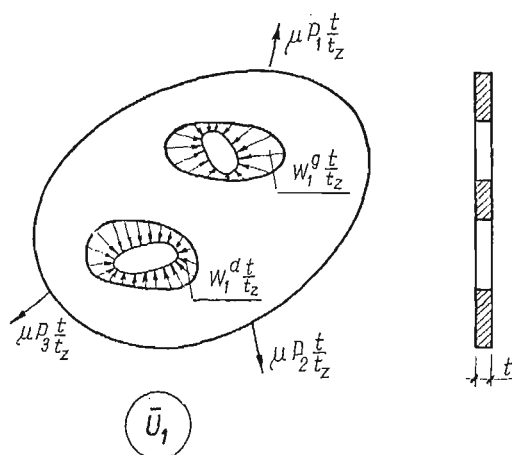


Rys. 11



Rys. 12

Przy opisanym postępowaniu iteracyjnym stan naprężeń w układzie rzeczywistym U_0 oblicza się jako sumę wyrażoną wzorem (10). Zauważa się, że dla $t_z = t$ jest $\mu = 0$, czyli w cyklu drugim i następnych jako obciążenia zewnętrzne występują jedynie siły wzdłuż brzegu otworów $\Delta_k Z$.



Rys. 13

4. Przykłady liczbowe

4.1. Tarcza prostokątna o jednej zmianie grubości. Rozpatrzmy przypadek pokazany na rys. 14a, dla którego znane jest rozwiązanie ścisłe.

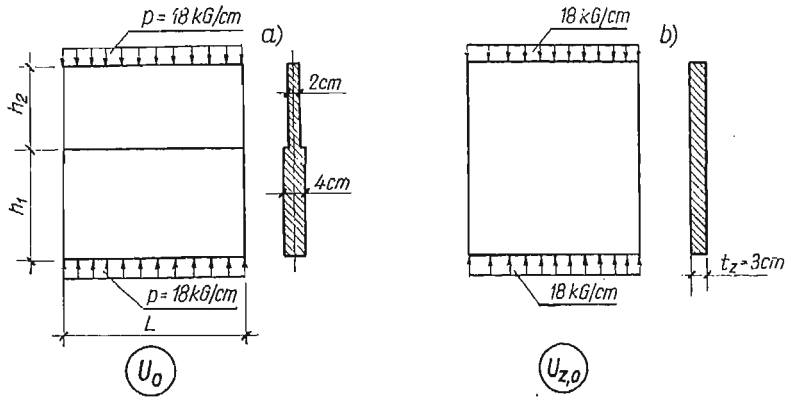
Zakładamy: $t_g = 2$ cm, $t_d = 4$ cm, $\nu = 0$.

Tarcza jest równomiernie ściskana obciążeniem $p = 18$ kG/cm.

Rozwiązanie ściśle badanego przypadku określa następujące wartości naprężeń:

dla części górnej: $\sigma_x^g = \tau^g = 0, \quad \sigma_y^g = \frac{p}{t_g} = -9 \text{ kG/cm}^2,$
 (22)

dla części dolnej: $\sigma_x^d = \tau^d = 0, \quad \sigma_y^d = \frac{p}{t_d} = -4,5 \text{ kG/cm}^2.$

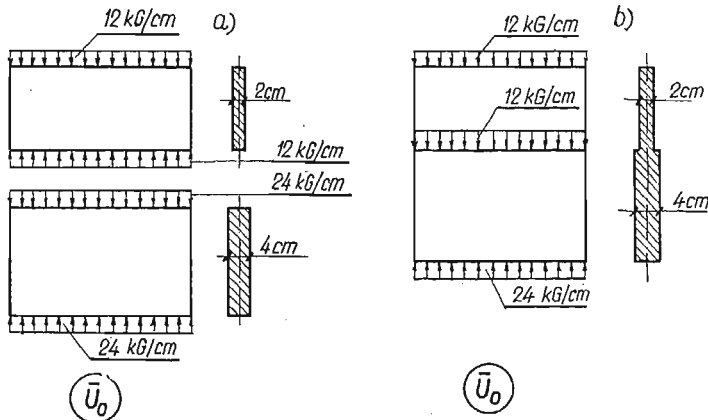


Rys. 14

Do wartości tych dojdziemy przy zastosowaniu przedstawionego sposobu. Przyjmujemy zgodnie z (15) grubość tarczy zastępczej

$$t_z = \frac{2+4}{2} = 3 \text{ cm},$$

czyli zgodnie z (4): $\mu_1 = 1/3, \quad \mu_2 = -1/3.$



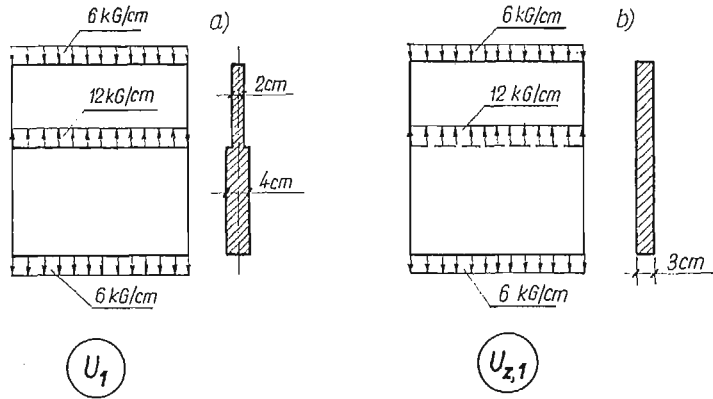
Rys. 15

Dla układu $U_{z,0}$, pokazanego na rys. 14b, otrzymuje się

$$\sigma_y^g = \sigma_y^d = -6 \text{ kG/cm}^2, \quad \tau^g = \tau^d = 0.$$

Wymuszenie tego stanu naprężenia na tarczy rzeczywistej prowadzi do układu \bar{U}_0 , przedstawionego na rys. 15.

Rysunek 16 pokazuje układ $U_1 = U_0 - \bar{U}_0$ oraz odpowiedni układ zastępczy $U_{z,1}$.



Rys. 16

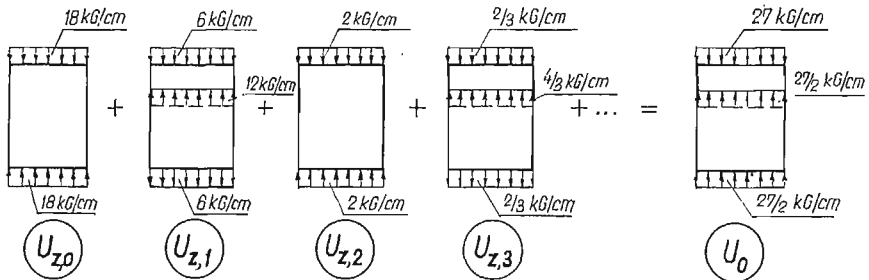
Dla tego ostatniego stanu naprężenia jest określony następująco:

część górna: $\Delta_1 \sigma_y^g = -2 \text{ kG/cm}^2$, $\Delta_1 \sigma_x^g = \Delta_1 \tau^g = 0$,

część dolna: $\Delta_1 \sigma_y^d = +2 \text{ kG/cm}^2$, $\Delta_1 \sigma_x^d = \Delta_1 \tau^d = 0$.

Można zatem utworzyć następne układy U_2 , $U_{z,2}$ itd.

Ciąg układów $U_{z,n}$ z relacji (10), prowadzący do układu U_0 , przedstawia rys. 17.



Rys. 17

Na podstawie (11) otrzymamy sumaryczne obciążenie

$$\text{dla górnej krawędzi} \quad p_{z,1}(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \cdot 18 = 27 \text{ kG/cm},$$

$$\text{dla dolnej krawędzi} \quad p_{z,2}(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} \cdot 18 = \frac{27}{2} \text{ kG/cm}.$$

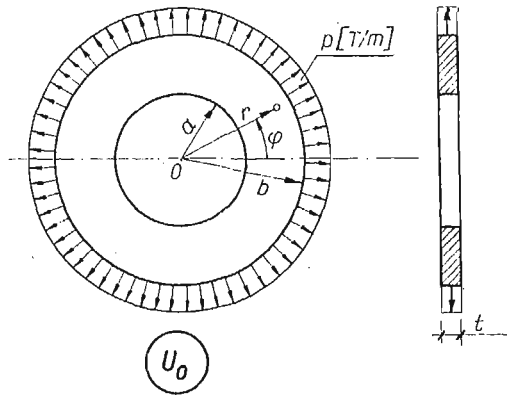
W miejscu zmiany grubości według (13)

$$Y_z = 0 + 12 + 0 + \frac{4}{3} + 0 + \frac{4}{27} + \dots = \frac{27}{2} \text{ kG/cm.}$$

Stan naprężenia w układzie U_0 z rys. 17 jest identyczny z (22).

4.2. Pierścień kołowy. Rozpatrzmy pierścień osiowo-symetrycznie równomiernie rozciągany (rys. 18), czyli tzw. zagadnienie Lamégo, dla którego znane jest rozwiązanie ścisłe (por. [2], str. 157)

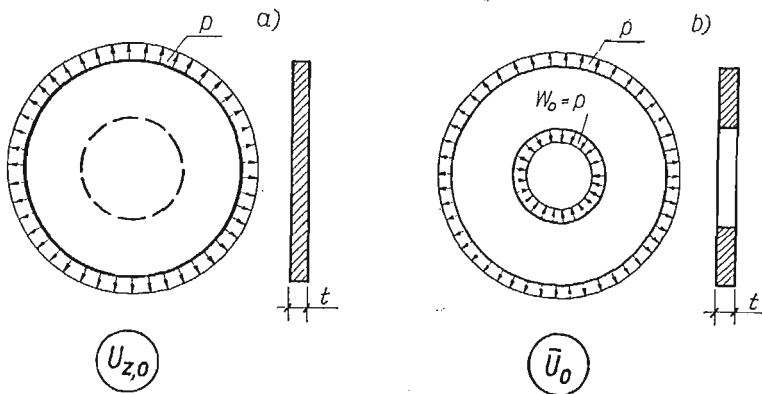
$$(23) \quad \sigma_r = \frac{p}{t} \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right), \quad \sigma_\varphi = \frac{p}{t} \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right).$$



Rys. 18

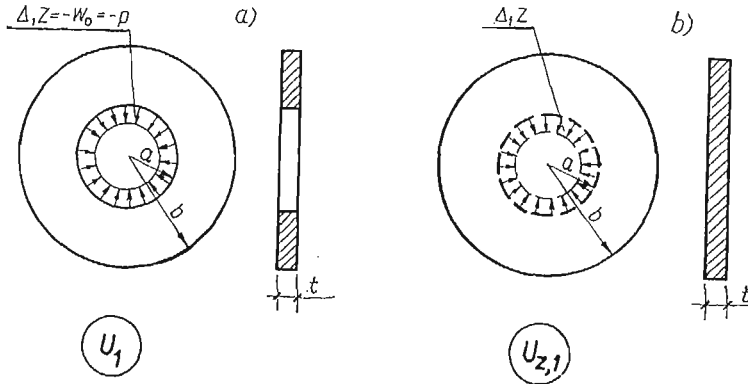
Wprowadzamy układ $U_{z,0}$ (rys. 19a) z kołową tarczą zastępczą o grubości $t_z = t$. Stan naprężenia w tej tarczy określony jest przez wyrażenie (por. [2], str. 161):

$$(24) \quad \sigma_r = \sigma_\varphi = \frac{p}{t}.$$



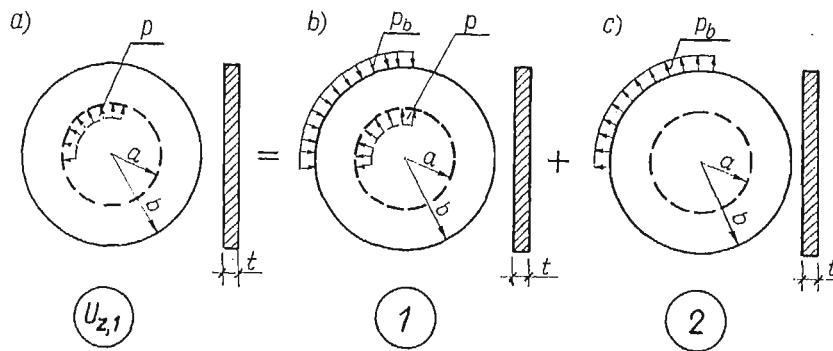
Rys. 19

Po wymuszeniu tego stanu naprężenia w tarczy rzeczywistej otrzymamy układ \bar{U}_0 z rys. 19b. Układ $U_1 = U_0 - \bar{U}_0$ pokazano na rys. 20a, odpowiedni układ zastępczy $U_{z,1}$ zaś na rys. 20b.



Rys. 20

Stan naprężenia dla tarczy układu $U_{z,1}$ otrzymamy przez nałożenie dwóch rozwiązań (rys. 21). Pierwszym z nich (rys. 21b) jest rozwiązanie kołowego wycinka tarczy nieograniczonej podane w [3], na str. 165, drugim zaś rozwiązanie tarczy kołowej osiowo-symetrycznie równomiernie rozciąganej (rys. 21c).



Rys. 21

Dla tarczy z rys. 21b stan naprężenia jest określony następująco:

$$\begin{aligned}
 \text{dla } r < a & \quad \sigma_r = \sigma_\varphi = \frac{1}{2}(1+\nu)\frac{p}{t}, \quad \tau = 0; \\
 (25) \quad \text{dla } a < r \leq b & \quad \sigma_r = -\sigma_\varphi = -\frac{1}{2}(1-\nu)\frac{p}{t}\frac{a^2}{r^2}, \quad \tau = 0; \\
 \text{dla } r = b & \quad \sigma_r^b = -\frac{1}{2}(1-\nu)\frac{p}{t}\frac{a^2}{b^2},
 \end{aligned}$$

czyli

$$(26) \quad p_b = \sigma_r^b t = \frac{1}{2} (1-\nu) \frac{a^2}{b^2} p.$$

W tarczy z rys. 21c, dla $0 \leq r \leq b$:

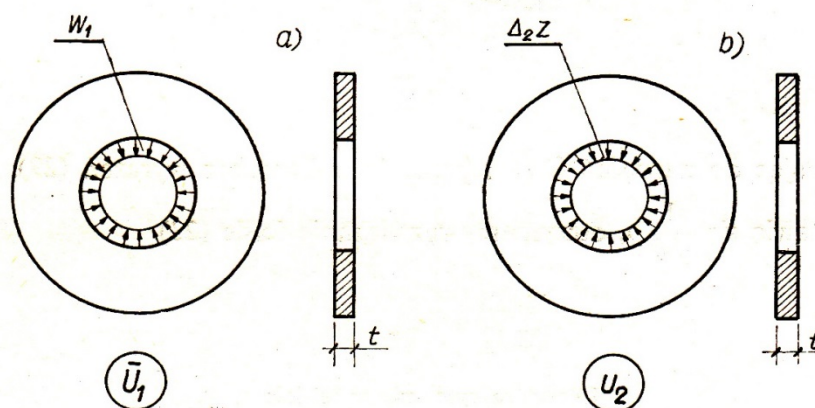
$$(27) \quad \sigma_r = \sigma_\varphi = \frac{p_b}{t} = \frac{1}{2} (1-\nu) \frac{p}{t} \frac{a^2}{b^2}, \quad \tau = 0.$$

W związku z tym w tarczy z rys. 21a:

$$(28) \quad \text{dla } r < a \quad \sigma_r = \sigma_\varphi = \frac{1}{2} \frac{a^2(1-\nu) + b^2(1+\nu)}{b^2} \frac{p}{t};$$

$$(29) \quad \text{dla } a < r \leq b \quad \sigma_r = \frac{1}{2} (1-\nu) a^2 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \right) \frac{p}{t},$$

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{2} (1-\nu) a^2 \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{r^2} \right) \frac{p}{t}.$$



Rys. 22

Wymuszając stan naprężenia (29) na tarczy rzeczywistej otrzymamy układ \bar{U}_1 z rys. 22a, gdzie siła przekrojowa po wprowadzeniu oznaczeń

$$(30) \quad \lambda = \frac{1}{2} (1-\nu), \quad \delta = \frac{b^2 - a^2}{b^2}$$

wynosi

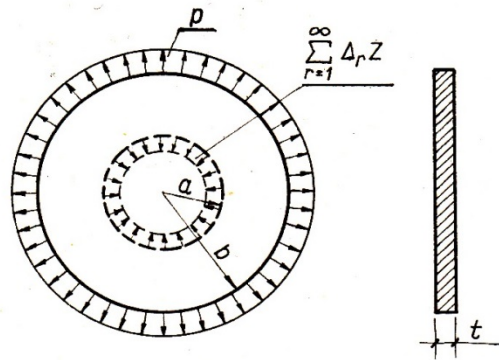
$$(31) \quad W_1 = \frac{1}{2} (1-\nu) a^2 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) p = -\lambda \delta p.$$

Układ $U_2 = U_1 - \bar{U}_1$ ma postać pokazaną na rys. 22b, gdzie według (21)

$$(32) \quad \Delta_2 Z = \Delta_1 Z - W_1 = -W_0 - W_1 = -p + \lambda \delta p = -(1 - \lambda \delta) p.$$

Kontynuując przedstawiony tok postępowania otrzymamy rozwiązanie zagadnienia Lamégo jako rozwiązanie tarczy kołowej pokazanej na rys. 23, gdzie

$$(33) \quad \sum_{r=1}^{\infty} \Delta_r Z = \Delta_1 Z + \Delta_2 Z + \Delta_3 Z + \dots = -p - (1 - \lambda\delta)p - \\ - (1 - \lambda\delta)^2 p - (1 - \lambda\delta)^3 p - \dots = -\frac{1}{\lambda\delta} p.$$



Rys. 23

Istotnie, dodając do naprężeń (24) naprężenia obliczone z wyrażeń (29), do których w miejsce p wstawia się $\frac{1}{\lambda\delta} p$, otrzymamy rozwiązanie ściśle (23).

Literatura cytowana w tekście

1. J. WRANIK, *Stan naprężenia w bezotworowych tarczach prostokątnych o skokowych zmianach grubości*, praca doktorska, Gliwice 1971.
2. K. GIRKMANN, *Dźwigary powierzchniowe* (tłum. z niem.) Arkady, Warszawa 1957.
3. F. ANDERMANN, *Tarcze prostokątne. Obliczenia statyczne*. Arkady, Warszawa 1966.

Резюме

МЕТОД ИТЕРАЦИОННОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В МНОГОСВЯЗНЫХ ДИСКАХ

Работа указывает итерационный процесс решения многосвязных дисков при помощи вычисления соответствующих односвязных дисков. Образ действия изображен для дисков со скачкообразно переменной толщиной, а также для перфорационных дисков.

S u m m a r y

METHOD OF AN ITERATIONAL SOLUTION OF MULTIPLY CONNECTED DISCS

In the paper there has been presented a method of an iterational solution of multiply connected discs by means of a calculation carried out for some simply connected discs. The method has been described for discs with jumped thickness and for discs with holes.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA, GLIWICE

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 listopada 1973 r.
